4

Posição relativa entre retas e círculos e distâncias

Sumário

Nesta unidade faremos uma demonstração algébrica de um resultado bem conhecido da Geometria Euclidiana que nos dá as possíveis posições relativas entre uma reta e um círculo em função da distância do centro do círculo a reta. Mas, antes vamos deduzir uma fórmula para calcular a distância de um ponto a uma reta e outra, para encontrar a distância entre duas retas paralelas.

4.1 Distância de um ponto a uma reta

Dados um ponto P e uma reta r no plano, já sabemos calcular a distância de P a cada ponto $P' \in r$. Agora vamos ver como calcular a distância de P à reta r.

DEFINIÇÃO 1

Definimos a **distância**, $d(P,r)$, **do ponto P à reta r** por

$$\boxed{d(P,r) = \min\{d(P,P') \,|\, P' \in r\}}$$

Dizemos que um ponto $P^\star \in r$ **realiza a distância** de P à reta r, se

$$d(P,P^\star) \leq d(P,P') \text{ ,para todo } P' \in r.$$

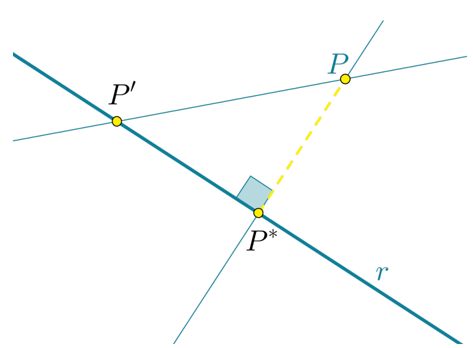

Figura 4.1: $P^\star$ realiza a distância de P à reta r.

Usando o *teorema de Pitágoras* é fácil verificar que o ponto $P^\star$ que realiza a distância do ponto P à reta r é o *pé da perpendicular a r que passa pelo ponto P*.

Assim,

$$d(P,r) = \min\{d(P,P') \,|\, P' \in r\} = d(P,P^\star)\,.$$

Teorema 2

Sejam $r : ax + by = c$ uma reta e $P = (x_0, y_0)$ um ponto no plano. Então a distância de P a r é dada por

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|\,ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Demonstração

Seja s a reta perpendicular à reta $r : ax + by = c$ que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$.

Como $\overrightarrow{u} = (a, b) \perp r$, temos que $\overrightarrow{u} \parallel s$. Logo,

$$s : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas de s.

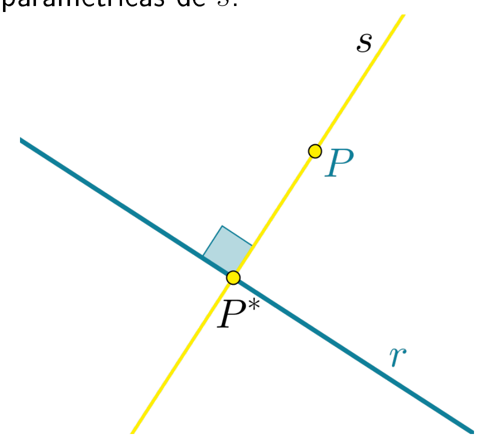

Figura 4.2: Demonstração do teorema 2.

Seja P^* o pé da perpendicular a r que passa por P, ou seja, $\{P^*\} = r \cap s$. Então, $P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*)$, para algum $t^* \in \mathbb{R}$, e

$$\begin{aligned} & a(x_0 + at^*) + b(y_0 + bt^*) = c \\ \iff\ & (a^2 + b^2)t^* + ax_0 + by_0 = c \\ \iff\ & t^* = \frac{c - (ax_0 + by_0)}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Como $d(P, r) = d(P, P^*) = ||\overrightarrow{PP^*}||$ e $\overrightarrow{PP^*} = (a, b)t^*$, temos:

$$\begin{aligned} d(P, r) &= |t^*| \cdot ||(a, b)|| = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ d(P, r) &= \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

4.2 Posição relativa de uma reta e um círculo no plano

Na unidade anterior, estudamos as posições que duas retas podem ter no plano. Abordaremos agora as posições relativas entre círculos e retas do ponto de vista algébrico. Para isso, lembramos da Geometria Plana, que um círculo $\mathcal{C}$ e uma reta r no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

(a) $r \cap \mathcal{C}$ consiste de dois pontos: a reta r é dita **secante** ao círculo $\mathcal{C}$.

(b) $r \cap \mathcal{C}$ consiste de exatamente um ponto: a reta r é dita **tangente** ao círculo $\mathcal{C}$.

Neste caso, o ponto de interseção é chamado **ponto de tangência** de r com $\mathcal{C}$.

(c) $r \cap \mathcal{C} = \varnothing$: a reta r é dita **exterior** ao círculo $\mathcal{C}$.

No seguinte teorema estabelecemos uma propriedade que caracteriza a tangência de uma reta a um círculo.

Teorema 3 **Se** a reta r é tangente no ponto P (ponto de tangência) ao círculo $\mathcal{C}$ de centro A e raio $\alpha > 0$, **então** a reta que passa por A e P é perpendicular à reta r.

Demonstração Seja OXY o sistema de eixos ortogonais que tem origem no ponto A e eixo$-OX$ positivo contendo o ponto P. A escolha desse sistema de eixos ortogonais visa facilitar a demonstração do teorema.

Neste sistema de coordenadas, $A = (0,0)$ e $P = (\alpha, 0)$.

Para demonstrar o teorema, basta mostrar que a equação da reta r no sistema de coordenadas escolhido é $r : x = \alpha$.

Suponhamos, *raciocinando por absurdo*, que r não é vertical. Isto é, $r : y = ax + b$.

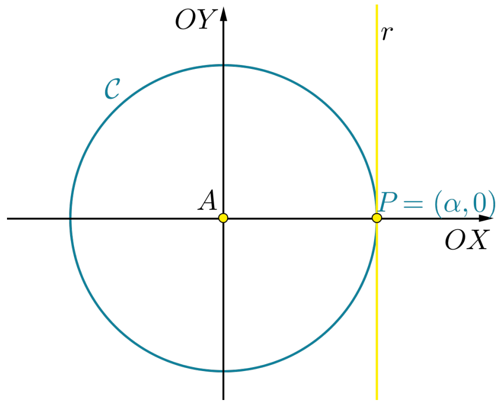

Figura 4.3: Escolha do sistema de coordenadas.

Como $P = (\alpha, 0) \in r$, devemos ter $0 = a\,\alpha + b$. Logo $b = -a\,\alpha$ e a equação de r é

$$r : y = ax - a\alpha\,, \qquad \text{ou melhor,} \qquad r : y = a(x - \alpha)\,.$$

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} y = a(x-\alpha) \\ x^2 + y^2 = \alpha^2\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $x^2+y^2 = \alpha^2$ é a equação do círculo $\mathcal{C}$ no sistema de coordenadas escolhido.

Um ponto é comum à reta r e ao círculo $\mathcal{C}$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem as duas equações do sistema (4.1).

Substituindo y da primeira equação na segunda, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + a^2(x-\alpha)^2 = \alpha^2 &\iff x^2 - \alpha^2 + a^2(x-\alpha)^2 = 0 \\ &\iff (x-\alpha)(x+\alpha) + a^2(x-\alpha)^2 = 0 \\ &\iff (x-\alpha)\,\left[x + \alpha + a^2(x-\alpha)\right] = 0\,. \end{aligned}$$

Então,

$$x = \alpha \ \text{ ou } \ x + \alpha + a^2(x-\alpha) = 0 \iff x = \alpha \ \text{ ou } \ x = \frac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2}\,.$$

Logo, o sistema (4.1) tem duas soluções:

$$P = (\alpha, 0)\,, \ \text{ correspondente a } x = \alpha;$$
$$P' = \left(\frac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2}, -\frac{2a\alpha}{1+a^2}\right), \ \text{ correspondente a } x = \frac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2} \ \text{(verifique!)}.$$

Mas isso é absurdo, pois a reta r e o círculo $\mathcal{C}$ são tangentes.

Assim, a hipótese de que r é uma reta não vertical é falsa. Isto conclue a prova do teorema.

Exemplo 1

Sabendo-se que o círculo $\mathcal{C}$ está centrado em $Q = (2, 4)$ e que o ponto $P = (2, -1) \in \mathcal{C}$, dê a equação da reta r tangente a $\mathcal{C}$ que passa por P.

Encontre também a outra reta tangente a $\mathcal{C}$ e paralela a r.

Solução. A equação do círculo $\mathcal{C}$ é

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-4)^2 = R^2 ,$$

onde $R > 0$ é o raio. Como $P = (2, -1) \in \mathcal{C}$, temos

$$(2-2)^2 + (-1-4)^2 = R^2 , \quad \text{ou seja,} \quad R^2 = 25.$$

Portanto, $\mathcal{C}$ tem raio $R = 5$ e sua equação é

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 .$$

Pelo teorema anterior, a reta r tangente a $\mathcal{C}$ no ponto P é perpendicular à reta s que contém os pontos Q e P.

A reta s é vertical, pois os pontos Q e P têm abscissas iguais a 2. Portanto, sua equação é $s : x = 2$ e a reta r deve ser horizontal. Como $P = (2, -1) \in r$, todos os pontos de r devem ter ordenadas iguais a -1. Isto é, $r : y = -1$ é a equação procurada da reta r.

Seja agora r' a outra reta tangente a $\mathcal{C}$ paralela à reta r. Como $r' : y = a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, e $r \cap \mathcal{C}$ consiste de apenas um ponto, a equação

$$(x-2)^2 + (a-4)^2 = 25 ,$$

deve ter apenas uma solução para x. Mas isso ocorre somente quando $25 - (a-4)^2 = 0 \iff a - 4 = \pm 5 \iff a = 4 + 5 = 9 \iff a = 4 - 5 = -1$. A segunda possibilidade corresponde a reta $r : y = -1$ e a primeira a reta $r' : y = 9$ procurada.

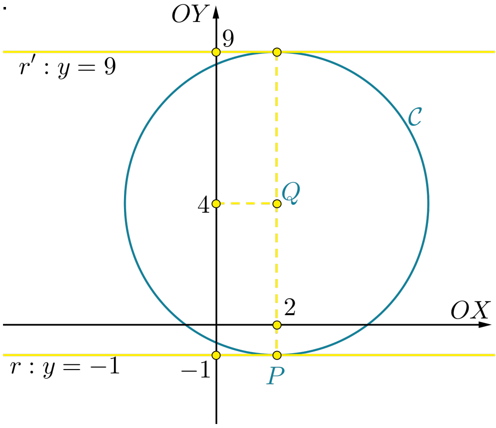

Figura 4.4: Circunferência $\mathcal{C}$ e tangentes horizontais.

Teorema 4

Sejam $r : ax + by = c$ uma reta e $\mathcal{C}$ um círculo de centro $A = (x_0, y_0)$ e raio $\alpha > 0$. Então,

(a) $\mathcal{C} \cap r = \varnothing$ se, e somente se $d(A, r) > \alpha$.

(b) $\mathcal{C} \cap r$ consiste de um único ponto se, e somente se, $d(A, r) = \alpha$.

(c) $\mathcal{C} \cap r$ consiste de exatamente dois pontos se, e somente se, $d(A, r) < \alpha$.

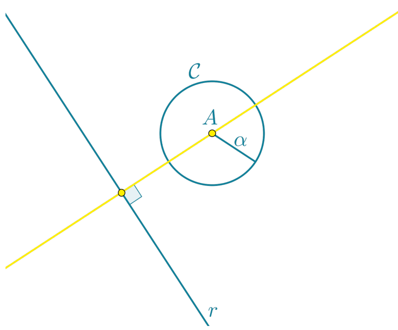

Figura 4.5: $d(A, r) > \alpha$.

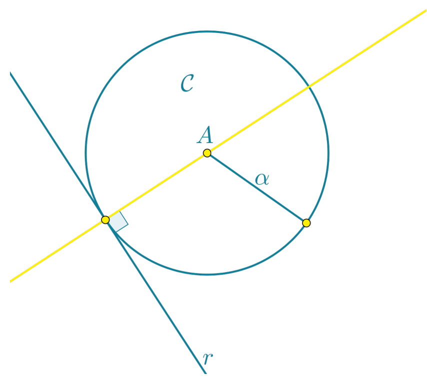

Figura 4.6: $d(A, r) = \alpha$.

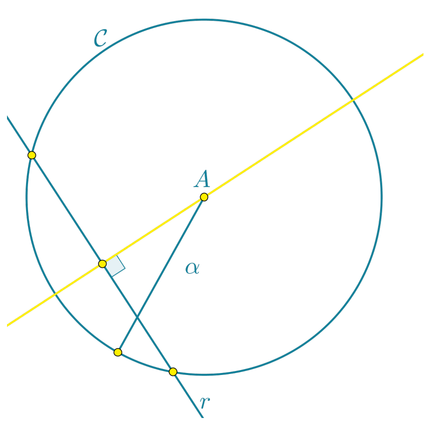

Figura 4.7: $d(A, r) < \alpha$.

Demonstração

Se $A \in r$, então as coordenadas de A satisfazem à equação de r, ou seja, $ax_0 + by_0 = c$, e, portanto,

$$\frac{|\, ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 = d(A, r),$$

e o teorema é verdadeiro.

Suponhamos agora que $A \notin r$, e consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by = c\,, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \alpha^2\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde a primeira equação é da reta r e a segunda equação é do círculo $\mathcal{C}$ de centro no ponto A e raio $\alpha > 0$.

Vamos analisar o sistema 4.2 quanto ao número de soluções:

- Se $b \neq 0$, então a primeira equação de (4.2) nos dá

$$y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}\,.$$

Em particular, a reta r não é vertical. Substituindo essa expressão de y na segunda equação do sistema (4.2), obtemos:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + \left(-\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b} - y_0\right)^2 &= \alpha^2 \\ \iff (x - x_0)^2 + \left(-\frac{1}{b}\,[a\,x - c + y_0 b]\right)^2 &= \alpha^2 \\ \iff (x - x_0)^2 + \left(-\frac{1}{b}\right)^2 [a\,x - c + y_0 b]^2 &= \alpha^2 \\ \iff (x - x_0)^2 + \frac{1}{b^2}\,(a\,x - c + y_0 b)^2 &= \alpha^2 \\ \iff b^2(x - x_0)^2 + (a\,x - c + y_0 b)^2 &= \alpha^2 b^2 \\ \iff b^2(x - x_0)^2 + (a\,x - a x_0 + a x_0 + b y_0 - c)^2 &= \alpha^2 b^2 \\ \iff b^2(x - x_0)^2 + (a\,(x - x_0) + [a x_0 + b y_0 - c])^2 &= \alpha^2 b^2 \end{aligned}$$

Fazendo $x' = x - x_0$ e $Q_0 = a x_0 + b y_0 - c$, temos

$$\begin{aligned} b^2(x')^2 + (a\,(x') + Q_0)^2 &= \alpha^2 b^2 \\ \iff b^2(x')^2 + a^2\,(x')^2 + 2ax'Q_0 + Q_0^2 &= \alpha^2 b^2 \\ \iff (a^2 + b^2)\,(x')^2 + 2aQ_0 x' + (Q_0^2 - \alpha^2 b^2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Esta última equação (de grau dois) terá uma única solução para x' (e, portanto, uma única solução para x) se, e somente se, o seu discriminante é igual a zero, isto é,

$$\Delta = (2aQ_0)^2 - 4\,(a^2 + b^2)\,(Q_0^2 - \alpha^2 b^2) = 0.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
4a^2Q_0^2 - 4a^2Q_0^2 + 4a^2b^2\alpha^2 - 4b^2Q_0^2 + 4\alpha^2b^4 &= 0 \\
4a^2b^2\alpha^2 - 4b^2Q_0^2 + 4\alpha^2b^4 &= 0 \\
4b^2\left(a^2\alpha^2 - Q_0^2 + \alpha^2b^2\right) &= 0 \\
a^2\alpha^2 - Q_0^2 + \alpha^2b^2 &= 0, \quad \text{pois } b \neq 0 \\
\alpha^2\left(a^2 + b^2\right) - Q_0^2 &= 0 \\
\alpha^2\left(a^2 + b^2\right) &= Q_0^2 \\
\alpha^2 &= \frac{Q_0^2}{a^2 + b^2},
\end{aligned}$$

Lembrando que $Q_0 = ax_0 + by_0 - c$ e extraindo a raiz quadrada, obtemos:

$$\alpha = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d(A, r)\,.$$

Logo, $r \cap \mathcal{C}$ consiste de um único ponto, isto é, r é tangente a $\mathcal{C}$ se, e somente se,

$$\alpha = d(A, r).$$

Analogamente, temos que o sistema (4.2):

- não tem solução $\iff \Delta < 0 \iff \alpha < d(A, r)$;

- tem duas soluções $\iff \Delta > 0 \iff \alpha > d(A, r)$.

Ou seja, a reta r é exterior ao círculo $\mathcal{C}$ se, e somente se, $\alpha < d(A, r)$, e r é secante a $\mathcal{C}$ se, e somente se, $\alpha > d(A, r)$.

O caso em que $r : x = c$ é uma reta vertical fica como exercício.

Exemplo 2

Calcule a distância do ponto $P = (1, -1)$ à reta $r : x + 2y = 1$.

Solução.

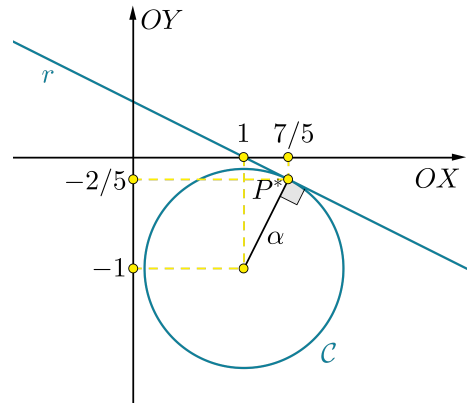

Figura 4.8: Exemplo 2.

Vamos resolver o problema de três maneiras:

(1) Usando a fórmula obtida no teorema 4: sendo $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$, temos

$$d(P, r) = \frac{|1 \times 1 + 2 \times (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

(2) Vamos achar $\alpha \geq 0$ de modo que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = \alpha^2\,, \end{cases}$$

tenha uma única solução, ou seja, de maneira que a reta r seja tangente ao círculo de centro P e raio α.

Substituindo $x = 1 - 2y$ na segunda equação, obtemos

$$(1 - 2y - 1)^2 + (y+1)^2 = \alpha^2\,.$$

Então, $4y^2 + y^2 + 2y + 1 = \alpha^2$, isto é,

$$5y^2 + 2y + (1 - \alpha^2) = 0.$$

Essa equação possui uma única solução se, e somente se, o seu discriminante é igual a zero:

$$\begin{aligned} \Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times (1 - \alpha^2) &= 0 \\ 4 - 20(1 - \alpha^2) &= 0 \\ 1 - 5(1 - \alpha^2) &= 0 \\ 1 - 5 + 5\alpha^2 &= 0 \\ \alpha^2 &= \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(P,r) = \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

(3) Seja r' a reta que passa pelo ponto $P = (1,-1)$ e é perpendicular à reta $r : x + 2y = 1$. Como r tem inclinação $m = -\frac{1}{2}$, a reta r' tem inclinação $n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1/2} = 2$. Logo, a equação de r' deve ser $r' : y = 2x + d$.

Sendo $P = (1,-1) \in r'$, temos $-1 = 2 \times 1 + d \Longrightarrow d = -1 - 2 = -3$. Assim, $r' : y = 2x - 3$. Note, também, que a equação de r se escreve: $r : y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$.

Seja $r \cap r' = \{P^\star\}$. Se $P^\star = (x,y)$, então

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } \left(2 + \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2} + 3.$$

Portanto,

$$x = \frac{2}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{5} \quad \text{e} \quad y = 2 \times \frac{7}{5} - 3 = -\frac{1}{5}\,.$$

Logo, $P^\star = \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} d(P,r) = d(P,P^\star) &= \sqrt{\left(\frac{7}{5} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{5} + 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + 16}{5^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\,, \end{aligned}$$

concluindo, assim, o cálculo desejado.

4.3 Distância entre duas retas no plano

Definição 5

Definimos a **distância entre r e r'** como sendo a menor distância entre um ponto de r e um ponto de r'.

Isto é,

$$\boxed{d(r,r') = \min\{d(P,P') \mid P \in r \quad \text{e} \quad P' \in r'\}}$$

Pela definição anterior, podemos concluir que $d(r,r') = 0$ se, e somente se, r e r' são coincidentes ou concorrentes.

Consideremos, então, duas retas paralelas r e r'. Sabemos que, dado $R \in r$, existe um único ponto $R^\star \in r'$, pé da perpendicular a r' traçada por R, tal que

$$d(R, R') \geq d(R, R^\star)\,, \quad \text{para todo } R' \in r'\,.$$

Como $r \parallel r'$, temos $d(Q, Q^\star) = d(P, P^\star)$, quaisquer que sejam $P, Q \in r$, pois $QPP^\star Q^\star$ é um retângulo. Então,

$$d(Q, Q') \geq d(Q, Q^\star) = d(P, P^\star) = d(P, r')\,,$$

quaisquer que sejam $Q \in r$ e $Q' \in r'$.

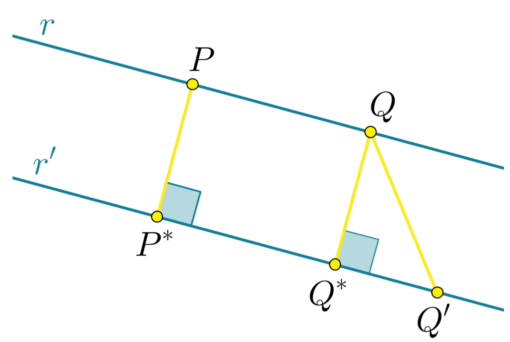

Figura 4.9: Distância entre duas retas paralelas.

Logo, qualquer que seja $P \in r$,

$$d(r, r') = d(P, r').$$

Como conseqüencia do teorema 2, temos o seguinte corolário.

Corolário 6

Sejam $r : ax + by = c$ e $r' : ax + by = c'$ retas paralelas ($c \neq c'$) ou coincidentes ($c = c'$). Então,

$$\boxed{d(r, r') = \frac{|\,c - c'\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Demonstração

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da reta r. Então

$$d(r, r') = d(P, r') = \frac{|ax_0 + by_0 - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Como $ax_0 + by_0 = c$, obtemos $d(r, r') = \dfrac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$

Exemplo 3

Determine as equações das retas paralelas à reta $r : x + 2y = 2$ que distam 5 unidades de r.

Solução. Seja $s : x + 2y = c$ uma reta paralela à reta r. Temos,

$$d(r, s) = 5 \iff \frac{|c - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5 \iff |c - 2| = 5\sqrt{5}\,.$$

Logo $c = 2 + 5\sqrt{5}$ ou $c = 2 - 5\sqrt{5}$, ou seja,

$$s_1 : x + 2y = 2 + 5\sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad s_2 : x + 2y = 2 - 5\sqrt{5}\,,$$

são as retas paralelas a r que distam 5 unidades da reta r.

Vejamos outra solução para o mesmo problema sem usar a fórmula da distância entre duas retas paralelas.

Seja $t : y = 2x$ a reta perpendicular à reta r que passa pela origem. Logo, $r \cap t = \{P\}$, onde $P = (2/5, 4/5)$ (verifique!).

Sejam $(x, 2x)$ os pontos pertencentes à reta t que distam 5 de r, ou seja,

$$d\left((x, 2x)\,,\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)\right) = 5\,.$$

Então,

$$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = 25$$
$$\iff 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = 25 \iff x = \pm\sqrt{5} + \frac{2}{5}.$$

Como $t : y = 2x$, os pontos ao logo de t que estão a distância 5 de P são:

$$P_1 = \left(\sqrt{5} + \frac{2}{5}, 2\sqrt{5} + \frac{4}{5}\right)$$
$$P_2 = \left(-\sqrt{5} + \frac{2}{5}, -2\sqrt{5} + \frac{4}{5}\right).$$

Consideremos agora as retas s_1 e s_2 paralelas à reta r que passam por P_1 e P_2, respectivamente.

Como

$$d(s_1, r) = d(P_1, P) = 5$$
$$d(s_2, r) = d(P_2, P) = 5,$$

s_1 e s_2 são as retas paralelas a r que distam 5 unidades de r, e suas equações são:

$$s_1 : x + 2y = \frac{5\sqrt{5} + 2}{5} + 2\left(\frac{10\sqrt{5} + 4}{5}\right) = 5\sqrt{5} + 2$$
$$s_2 : x + 2y = \frac{-5\sqrt{5} + 2}{5} + 2\left(\frac{-10\sqrt{5} + 4}{5}\right) = -5\sqrt{5} + 2.$$

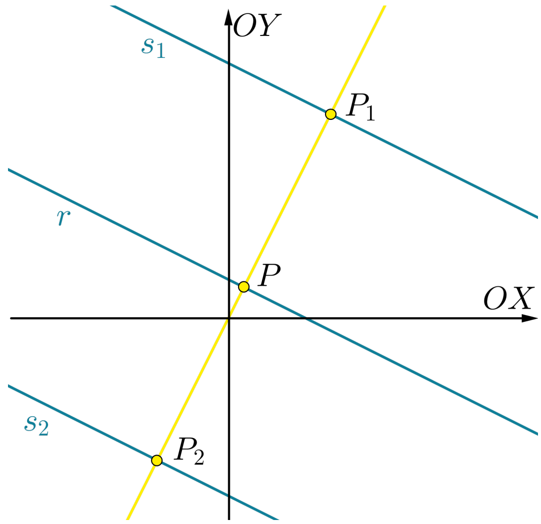

Figura 4.10: Retas a distância 5 de r.

Exercícios

1. A distância da reta $4x - 3y + 1 = 0$ ao ponto P é 4. Se a ordenada de P é 3, determine sua abscissa.

2. Um ponto se move de maneira que sua distância ao ponto $(1, -1)$ é sempre igual a duas vezes a distância à reta $3x - 2y + 6 = 0$. Determine a equação de seu lugar geométrico.

3. Sabendo-se que o círculo $\mathcal{C}$ está centrado em $(1, 3)$ e que o ponto $P = (-1, 1) \in \mathcal{C}$, encontre a equação da reta r tangente a $\mathcal{C}$ que passa por P. Encontre também a reta tangente a $\mathcal{C}$ e paralela a r.

4. Encontre as equações das retas paralelas à reta $r : 2x + y = 1$ que distam 3 de r.

5. Encontre, se possível, $\lambda \in \mathbb{R}$ para que $d(r, P) = 3$, onde:

   (a) $r : x - y = 3$ e $P = (2\lambda, \lambda)$, onde $\lambda \geq 0$.

   (b) $r : \lambda x = y$ e $P = (2, \sqrt{3})$.

6. Determine a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância a reta $4x - 3y + 12 = 0$ é sempre igual a duas vezes sua distância ao eixo OX.

7. Mostre que a reta $y = ax + b$ é tangente ao círculo $x^2 + y^2 = R^2$ se, e somente se, $b^2 = (1 + a^2)R^2$.

8. Encontre as retas que passam pelo ponto $(2, 7)$ e tangenciam o círculo de centro em $(3, 0)$ e raio 3.

9. Calcule a distância:

(a) da reta $2y = x + 1$ ao ponto $P = (2, -1)$.

(b) da reta $x + y = 2$ a reta $x + y = 3$.

10. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = R \end{cases},$$

onde $R \in \mathbb{R}$. Faça uma análise do número de soluções desse sistema em função do parâmetro R.

11. Suponha que a reta $r : 3x - 2y = 1$ tangencia um círculo $\mathcal{C}$ com centro no ponto $(2, 3)$.

(a) Calcule o raio do círculo $\mathcal{C}$.

(b) Calcule o ponto de tangência da reta r com a circunferência $\mathcal{C}$.

(c) Determine a reta que tangencia $\mathcal{C}$ e é paralela a r.

12. Sejam r e r' duas retas concorrentes no plano. Dizemos que uma reta s é **bissetriz** de r e r' quando os ângulos entre r e s e entre r' e s são iguais. Se s e s' são as bissetrizes das retas concorrentes r e r', mostre que

$$s \cup s' = \{P \mid d(P, r) = d(P, r')\}.$$

13. Considere as retas $r_1 : a_1x + b_1y = c_1$ e $r_2 : a_2x + b_2y = c_2$, onde $a_1^2 + b_1^2 = 1$ e $a_2^2 + b_2^2 = 1$. Mostre que as duas bissetrizes dos ângulos formados por r_1 e r_2 são

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y = c_1 - c_2 \quad \text{e} \quad (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2.$$

Dica: Utilize o exercício anterior.

14. Sejam as retas $r_1 : 4x + 3y = 0$ e $r_2 : 3x + 4y = 0$. Determine as equações dos círculos de raio igual a $7/5$ que são tangentes às retas r_1 e r_2.

15. Considere o ângulo $P\hat{R}Q$ cujos lados são as semirretas $\overrightarrow{RP}$ e $\overrightarrow{RQ}$. Determine, em função de um parâmetro, os pontos da semirreta que bissecta esse ângulo. Resolva também o caso particular em que $P = (3, 1)$, $R = (2, 4)$ e $Q = (-1, 2)$.

16. Encontre a equação cartesiana do círculo inscrito ao triângulo ABC, onde $A = (3, 4)$, $B = (6, -2)$ e $C = (4, 6)$.

17. Sejam r uma reta e A um ponto não pertencente a r. O **ponto simétrico** do ponto A em relação à reta r é o ponto A' tal que r é a mediatriz do segmento AA'. Determine as coordenadas de A' sabendo que $r : ax+by = c$ e $A = (x_0, y_0)$. Faça o caso particular em que $r : y = 2x + 1$ e $A = (4, 1)$.

18. Sejam r e s duas retas concorrentes. A reta obtida refletindo a reta s em relação à reta r é a reta s' tal que r é uma das bissetrizes de s e s'. Supondo que $r : ax + by = c$, $s : a'x + b'y = c'$ e $r \cap s = \{(x_0, y_0)\}$, determine a equação da reta s'. Resolva o caso particular em que $r : x + 3y = 3$ e $s : 2x + y = 1$.

19. Considere as retas paralelas r e s. A reflexão da reta s em relação à reta r é a reta s' paralela à reta r, diferente de s, tal que $d(s', r) = d(s, r)$. Supondo que $r : ax + by = c$ e $s : ax + by = c'$, encontre $c'' \in \mathbb{R}$, em função de c e c', de modo que $s' : ax + by = c''$. Faça o caso particular em que $r : 3x + 2y = 2$ e $s : 3x + 2y = 4$.

20. Considere as retas $r_1 : 3x + 4y = 2$ e $r_2 : 3x + 4y = -3$. Determine, em função de um parâmetro, a equação da família de círculos tangentes às retas r_1 e r_2. Se o centro do círculo pertence à reta $l : x + y = 1$, encontre sua equação.

21. (Posição relativa entre dois círculos) Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ dois círculos de centro A_1 e A_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente. Sendo $c = d(A_1, A_2)$, mostre que:

(a) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ é vazio se, e somente se, $c > r_1 + r_2$ ou $r_1 > r_2 + c$ ou $r_2 > r_1 + c$.

(b) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ consiste de um único ponto se, e somente se, $c = r_1 + r_2$ ou $r_1 = r_2 + c$ ou $r_2 = r_1 + c$.

(c) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ consiste de dois pontos se, e somente se, $c < r_1 + r_2$ ou $r_1 < r_2 + c$ ou $r_2 < r_1 + c$.

Conclua: $\mathcal{C}_2$ possui um ponto interior e outro ponto exterior a $\mathcal{C}_1$ se, e somente se, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ consiste de dois pontos.

◇