5

Elipse

Sumário

5.1 Introdução 2

5.2 Elipse 3

5.3 Forma canônica da elipse 6

5.3.1 Elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX 6

5.3.2 Esboço da Elipse 7

5.3.3 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY 9

5.4 Translação dos eixos coordenados 11

5.5 Elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ 12

5.6 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$ 15

5.7 Exercícios 18

5.8 Exercícios Suplementares 20

5.9 Solução de Exercícios 24

5.1 Introdução

Os historiadores atribuem ao matemático **Menaecmus** (380 – 320 A.C. aproximadamente), discípulo de Eudóxio na Academia de Platão, a descoberta das **curvas cônicas** ou **seções cônicas** quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que as *elipses*, as *parábolas* e as *hipérboles* são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base.

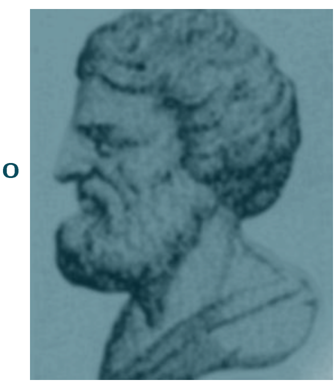
Figura 5.1: Apolônio de Perga

Nos escritos de **Pappus de Alexandria**, credita-se ao geometra grego **Aristeu** (370 – 300 a.C.) a publicação do primeiro tratado sobre seções cônicas. Mais tarde, o astrônomo e matemático grego **Apolônio de Perga** (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra **Seções Cônicas.** A denominação das curvas não foi devida a Menaecmus. As curvas somente foram nomeadas na obra de Apolônio, mas os nomes parábola e hipérbole foram usados antes dele. Foi Apolônio quem considerou as curvas como seções do cone duplo, com o qual a hipérbole adquiriu outro ramo, tal qual conhecemos hoje em dia. A obra **Seções Cônicas** de Apolônio e os **Elementos** de Euclides constituem o ápice da matemática grega.

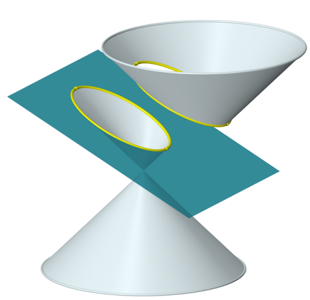
Figura 5.2: Elipse

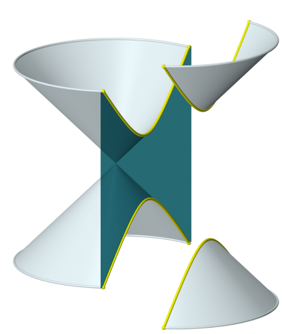
Figura 5.3: Hipérbole

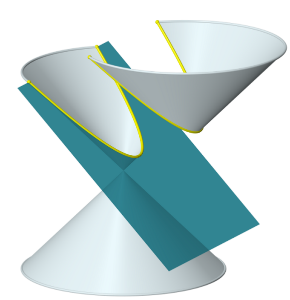
Figura 5.4: Parábola

A motivação principal de **Pierre de Fermat** na elaboração da sua obra *Ad locos planos et solidos isagoge* (1636), no qual estabelece um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana (equivalente ao de Descartes), aconteceu quando restaurava a obra perdida de Apolônio, *Plane Loci*, seguindo o delineamento feito por **Pappus de Alexandria** (290 – 350 aproximadamente). De posse da teoria de equações de **François Viète**, Fermat fez uso sistemático da linguagem algébrica para obter as demonstrações dos teoremas enunciados por **Pappus** na sua descrição da obra de Apolônio. A aplicação da Álgebra combinada com a natureza particular dos lugares geométricos estudados em *Plane Loci* e as técnicas usadas nas demonstrações dos resultados, revelaram a Fermat que todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio poderiam se exprimir na forma de equações algébricas com duas variáveis, cuja análise, usando a teoria de Viète, produziria as propriedades fundamentais do lugar geométrico assim como a natureza da sua construção.

Fermat aplicou os mesmos procedimentos ao estudar a obra *Cônicas* de Apolônio e, através das propriedades que definem as seções cônicas, obteve suas equações. Seus estudos e análise deram lugar a sete equações que ele podia obter como formas irredutíveis a partir da *equação geral do segundo grau com duas variáveis* que, escrita na linguagem atual, é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{5.1}$$

Segundo os valores dos coeficientes dessa equação, Fermat classificou os lugares geométricos obtidos na seguinte nomenclatura: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial.

Nosso objetivo, neste e nos próximos três capítulos, é estudar a equação (5.1) nos casos em que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$. Para isso, definiremos, geometricamente, uma elipse, uma hipérbole e uma parábola, que são os principais lugares geométricos obtidos dessa equação. O primeiro lugar geométrico que estudaremos corresponde à seção cônica denominada **elipse**.

5.2 Elipse

Definição 1

Uma **elipse** $\mathcal{E}$ de **focos** F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathcal{E} = \{\, P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \,\} .$$

Terminologia

• Como dissemos na definição, os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.

• A reta ℓ que contém os focos é a **reta focal** (Figura 5.5 (a)).

• A interseção da elipse com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da elipse sobre a reta focal.

De fato, seja $A \in \mathcal{E} \cap \ell$. Então, $A \notin F_1F_2$, pois, se $A \in F_1F_2$, teríamos

$$\begin{aligned} 2c &= d(F_1, F_2) \\ &= d(A, F_1) + d(A, F_2) \\ &= 2a, \end{aligned}$$

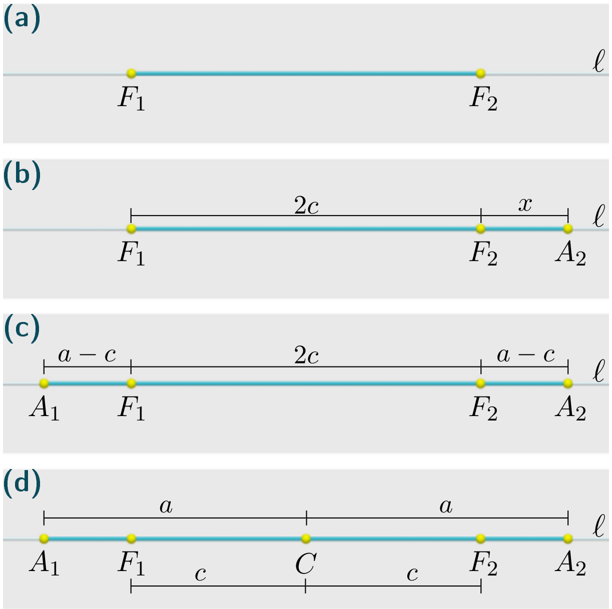

Figura 5.5: Elementos da elipse sobre a reta focal ℓ

o que é impossível, uma vez que, por definição, $2c < 2a$.

Seja $A_2 \in \mathcal{E} \cap \ell - F_1F_2$ tal que F_2 está entre F_1 e A_2 e $x = d(A_2, F_2)$ (Figura 5.5 (b)).

Como $A_2 \in \mathcal{E}$, temos:

$$2a = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2c + x = 2x + 2c \Longrightarrow x = a - c.$$

Logo, o ponto $A_2 \in \ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_2, tal que F_2 está entre F_1 e A_2, pertence à elipse $\mathcal{E}$.

Analogamente, o ponto $A_1 \in \ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_1, tal que F_1 está entre A_1 e F_2, pertence à elipse $\mathcal{E}$ (Figura 5.5 (c)).

• O segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ é o **eixo focal** da elipse.

• O **centro** C da elipse é o ponto médio do eixo focal A_1A_2 (Figura 5.5 (d)). Note que o centro C é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos.

• A **reta não focal** é a reta ℓ' perpendicular a ℓ que passa pelo centro C.

• A elipse intersecta a reta não focal ℓ' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2, denominados **vértices da elipse sobre a reta não focal** (Figura 5.6).

De fato, como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, temos que $B \in \ell' \cap \mathcal{E}$ se, e somente se,

$d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$.

Logo, pelo teorema de Pitágoras, $\ell' \cap \mathcal{E}$ consiste de dois pontos, B_1 e B_2, em ℓ', que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

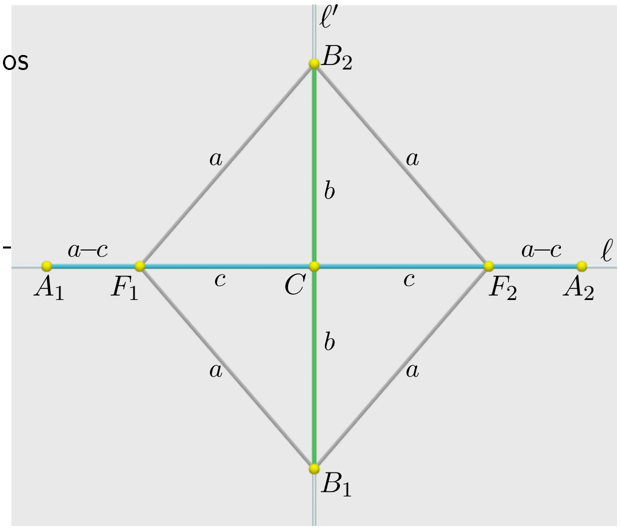

Figura 5.6: Elementos da elipse sobre as retas focal e não focal

- O **eixo não focal** da elipse é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$.
- O número $e = \dfrac{c}{a}$ é a **excentricidade** da elipse. Note que $0 \leq e < 1$.
- O número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e c é a distância do centro aos focos.

OBSERVAÇÃO 2

A elipse $\mathcal{E}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

De fato, se $P \in \mathcal{E}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então:

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

Em particular, $|F_1P| = |F_1P'|$ e $|F_2P| = |F_2P'|$. Logo, (Figura 5.7)

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2) \Longrightarrow P' \in \mathcal{E}\,.$$

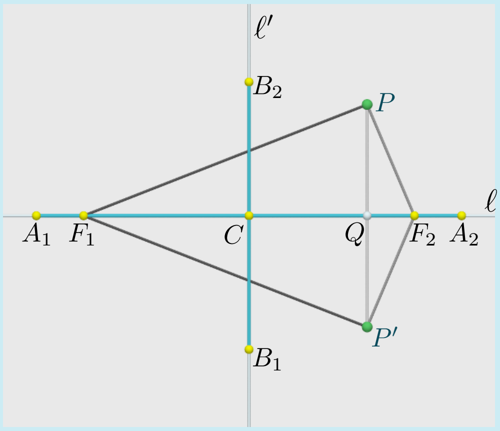

Figura 5.7: Simetria de $\mathcal{E}$ em relação à reta focal

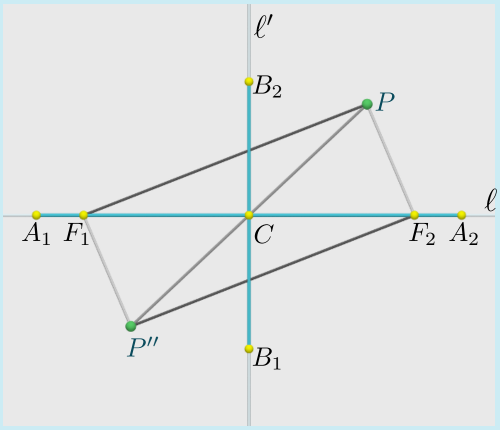

Figura 5.8: Simetria de $\mathcal{E}$ em relação ao centro

Se $P \in \mathcal{E}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então (Figura 5.8):

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1 \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1CP \equiv \triangle F_2CP''\,.$$

Em particular, $|F_1P| = |F_2P''|$ e $|F_2P| = |F_1P''|$. Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1) \Longrightarrow P'' \in \mathcal{E}\,.$$

A simetria em relação à reta não focal se verifica de maneira análoga.

Observação 3

Finalmente, observamos que:

$$\begin{aligned} & e = \frac{c}{a} = 0 \Longleftrightarrow c = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \mathcal{E} = \{P \mid d(P, C) = a\} \text{ é um círculo de centro } C \text{ e raio } a\,. \end{aligned}$$

5.3 Forma canônica da elipse

A partir da definição da elipse, vamos obter sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para alguns casos especiais.

5.3.1 Elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Neste caso, os vértices e focos de $\mathcal{E}$ são:

$$\begin{array}{lll} F_1 = (-c, 0) & A_1 = (-a, 0) & B_1 = (0, -b) \\ F_2 = (c, 0) & A_2 = (a, 0) & B_2 = (0, b), \end{array}$$

onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} & P = (x, y) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (5.2) \\ \Longleftrightarrow\ & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \qquad (5.3) \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 \\ & \qquad -2xc + c^2 + y^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Longleftrightarrow\ & a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (5.4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \qquad (5.5)\\
&\iff a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)\\
&\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)\\
&\iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\\
&\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}
$$

A rigor, para verficar que (5.5)$\Longrightarrow$(5.4) e (5.3)$\Longrightarrow$(5.2), precisamos mostrar que se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então

$$a^2 + cx \geq 0 \qquad \text{e} \qquad 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0.$$

Para Saber Mais

Com efeito, sendo $0 \leq c < a$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

- $\frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow x^2 \leq a^2 \Longrightarrow |x| \leq a \Longrightarrow -a \leq x \leq a$
$\Longrightarrow a^2 + cx \geq a^2 - ca > a^2 - a^2 \Longrightarrow a^2 + cx > 0.$
- $\frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y^2 \leq b^2 \Longrightarrow -b^2 + y^2 \leq 0$

$\Longrightarrow (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 < a^2 + 2a^2 + a^2 - b^2 + y^2 < 4a^2$

$\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} < 2a.$

A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é a **forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.**

5.3.2 Esboço da Elipse

Para esboçar uma elipse $\mathcal{E}$ no plano, consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY com origem O no centro e eixo OX igual à reta focal de $\mathcal{E}$. Nesse sistema, a elipse tem a forma canônica obtida acima:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Assim, $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$ e, portanto, $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Seja a função

$$
\begin{aligned}
f : [0, a] &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longmapsto f(x) = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},
\end{aligned}
$$

cujo gráfico é a parte da elipse situada no primeiro quadrante do plano.

Para $x = 0$, temos $y = b$ e para $x = a$, temos $y = 0$.

A função $f(x)$ é decrescente, pois, para $x_o, x_1 \in [0, a]$, temos:

$$x_0 < x_1 \iff x_0^2 < x_1^2 \iff a^2 - x_0^2 > a^2 - x_1^2$$
$$\iff \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} > \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2} \iff f(x_0) > f(x_1).$$

Outra maneira de verificar que $f(x)$ é decrescente é calculando sua primeira derivada e verificando que ela é sempre negativa para $x \in (0, a)$:

$$f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} < 0.$$

Também, para $x \in (0, a)$, a derivada segunda é também sempre negativa:

$$f''(x) = -\frac{ba}{(a^2 - x^2)^{3/2}} < 0.$$

Portanto, $f(x)$ é **côncava**, isto é, o segmento que liga dois pontos P_0 e P_1 do gráfico fica completamente (salvo as extremidades) abaixo do gráfico. Assim, o gráfico de $f(x)$ é da forma mostrada na Figura 5.7.

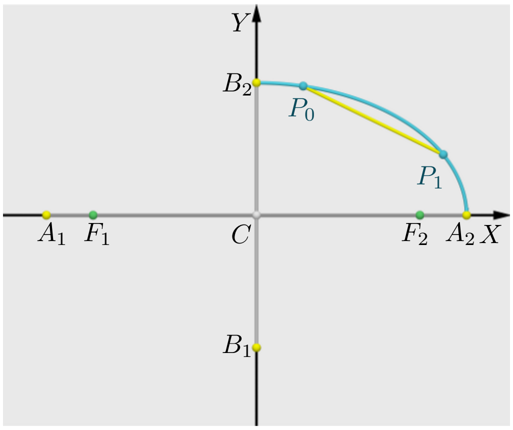

Figura 5.9: Gráfico de $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$

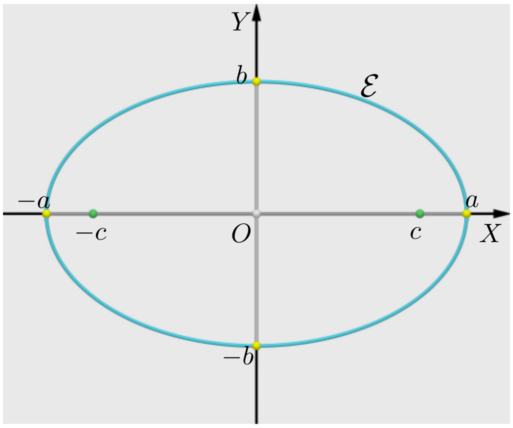

Figura 5.10: Esboço de $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Como a elipse é simétrica em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e ao eixo$-OY$ (reta não focal), seu gráfico tem a forma da Figura 5.10.

5.3.3 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, temos que:

$F_1 = (0, -c)$ $\quad$ $F_2 = (0, c)$

$A_1 = (0, -a)$ $\quad$ $A_2 = (0, a)$

$B_1 = (-b, 0)$ $\quad$ $B_2 = (b, 0)$,

são os focos e os vértices da elipse $\mathcal{E}$, onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Desenvolvendo como no caso anterior, verificamos que a equação da elipse $\mathcal{E}$ é:

$$\boxed{\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Forma canônica da elipse centrada na origem cuja reta focal coincide com o eixo OY.

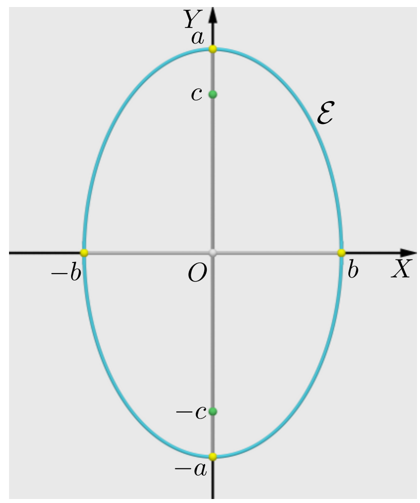

Figura 5.11: Esboço de $\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Exemplo 1

Os vértices de uma elipse são os pontos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$ e seus focos são os pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. Determine a equação da elipse.

Solução. Como $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$, a reta focal é o eixo$-OX$ e $A_1 = (-4, 0)$, $A_2 = (4, 0)$ são os vértices sobre a reta focal ℓ.

Então, $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = (0, 0)$ é o centro da elipse, $a = d(C, A_1) = d(C, A_2) = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Logo, a equação da elipse é

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1\,.$$

Exemplo 2

Dois vértices de uma elipse $\mathcal{E}$ são os pontos $(0, 6)$ e $(0, -6)$ e seus focos são os pontos $(0, 4)$ e $(0, -4)$. Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$.

Solução. Temos $F_1 = (0, -4)$ e $F_2 = (0, 4)$. Então, a reta focal (que contém os focos) é o eixo OY, os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (0, -6)$ e $A_2 = (0, 6)$, e o centro da elipse $\mathcal{E}$ é a origem, pois $C = \dfrac{(0, 4) + (0, -4)}{2} = (0, 0)$. Como $a = d(C, A_1) = 6$ e $c = d(C, F_1) = 4$, temos que $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.

Portanto, a equação da elipse é

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1\,.$$

Exemplo 3

Os focos de uma elipse são os pontos $(2,0)$ e $(-2,0)$ e sua excentricidade é $\frac{2}{3}$. Determine a equação da elipse.

Solução. Temos que a reta focal é o eixo OX, o centro da elipse é a origem $C = (0,0)$, $c = d(C, F_1) = 2$ e $e = \frac{2}{3} = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} \Longrightarrow a = 3$. Logo, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$ e, portanto,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

é a equação da elipse.

Exemplo 4

Uma elipse $\mathcal{E}$ tem centro na origem e um de seus vértices sobre a reta focal é $(0,7)$. Se a elipse passa pelo ponto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$, determine sua equação, seus vértices, seus focos e sua excentricidade.

Solução. A reta focal, que contém o centro e o vértice dado, é o eixo OY. A distância do centro $C = (0,0)$ ao vértice $A_2 = (0,7)$ é $a = d(C, A_2) = 7$ e o outro vértice na reta focal é $A_1 = (0,-7)$.

Logo, a equação da elipse $\mathcal{E}$ é da forma:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{ou seja,} \quad \mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1\,.$$

Como $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right) \in \mathcal{E}$, temos:

$$\frac{(\sqrt{5})^2}{b^2} + \frac{\left(\frac{14}{3}\right)^2}{49} = 1\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \frac{5}{b^2} + \frac{2^2\,7^2}{3^2\,7^2} = 1.$$

Então, $\frac{5}{b^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Longleftrightarrow b^2 = 9$ e, portanto, a equação da elipse é:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

Como a reta não focal é o eixo OX e $b = 3$, os vértices na reta não focal são $B_1 = (-3,0)$ e $B_2 = (3,0)$.

Temos também que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Logo, os focos são $F_1 = (0, -2\sqrt{10})$ e $F_2 = (0, 2\sqrt{10})$.

Finalmente, a excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$.

5.4 Translação dos eixos coordenados

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais, $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto no plano e $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema cujos eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido destes eixos, respectivamente. Designamos por $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY.

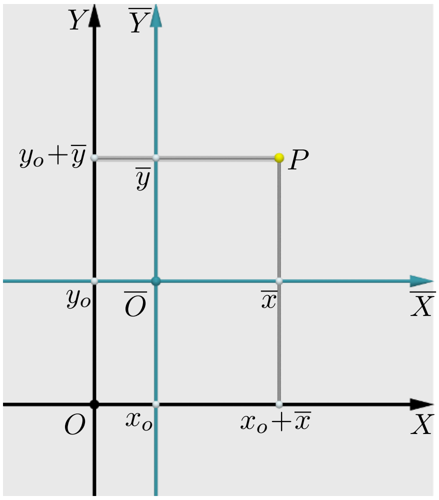

Figura 5.12: $P = (\overline{x}, \overline{y})_{\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}} = (x_0+\overline{x}, y_0+\overline{y})_{OXY}$

Se $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ são os vetores unitários na direção e sentido, respectivamente, dos eixos OX e OY (e, portanto, dos eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$) segue, da Proposição 13 do Capítulo 2, que:

$$\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{\overline{O}P} = \overline{x}\,\overrightarrow{e_1} + \overline{y}\,\overrightarrow{e_2} \ \text{ e } \ \overrightarrow{O\overline{O}} = x_o\,\overrightarrow{e_1} + y_o\,\overrightarrow{e_2}.$$

Como

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\overline{O}} + \overrightarrow{\overline{O}P},$$

temos:

$$\begin{aligned} x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} &= (x_o\,\overrightarrow{e_1} + y_o\,\overrightarrow{e_2}) + (\overline{x}\,\overrightarrow{e_1} + \overline{y}\,\overrightarrow{e_2}) \\ &= (\overline{x} + x_o)\,\overrightarrow{e_1} + (\overline{y} + y_o)\,\overrightarrow{e_2}. \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ são relacionadas pelas fórmulas (Figura 5.12):

$$\begin{cases} x = \overline{x} + x_0 \\ y = \overline{y} + y_0. \end{cases}$$

O exemplo a seguir mostra como uma simples translação do sistema de eixos ortogonais pode facilitar a solução de um problema geométrico.

Exemplo 5

Faça um esboço da curva

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0\,,$$

escrevendo a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\overline{O} = (1, 2)$.

Solução. Fazendo $x = \overline{x}+1$ e $y = \overline{y}+2$ na equação dada, obtemos:

$$(\overline{x}+1)^3 - 3(\overline{x}+1)^2 - (\overline{y}+2)^2 + 3(\overline{x}+1) + 4(\overline{y}+2) - 5 = 0\,.$$

Simplificando esta identidade, temos

$$\overline{x}^3 = \overline{y}^2.$$

Então, $\overline{y} = \pm\overline{x}^{3/2}$ e $\overline{x} \geq 0$.

Fazer agora o esboço da curva é bem mais simples (ver Figura 5.13).

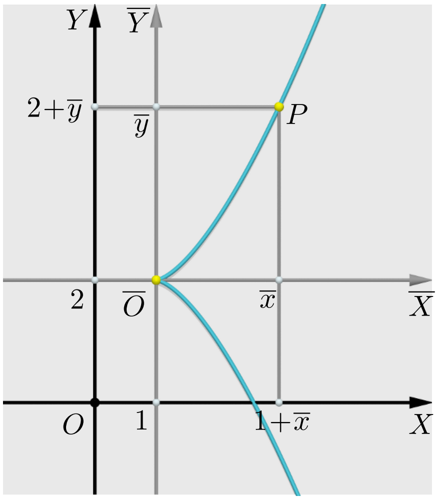

Figura 5.13: $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$.

5.5 Elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

Por uma translação dos eixos coordenados vamos obter a equação de uma elipse $\mathcal{E}$ cuja reta focal é horizontal ou vertical.

Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando o sistema OXY para a nova origem $\overline{O}$.

Caso I. Reta focal paralela ao eixo OX

Como $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é o centro, $\ell : y = y_0$ é a reta focal e $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ são os focos da elipse (pois $d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c$), temos que um ponto $P = (x, y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\,,$$

ou seja,

$$\iff \quad d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a$$

$$\iff \quad d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) + d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0)) = 2a$$

$$\iff \quad \frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Portanto, **a forma canônica da equação da elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OX é:**

$$\boxed{\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2}$$

Os elementos dessa elipse são:

- Reta focal: $\ell : y = y_0$;
- Reta não focal: $\ell' : x = x_0$;
- Focos: $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$;
- Vértices sobre a reta focal: $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$;
- Vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$;

O esboço da elipse é mostrado na Figura 5.14.

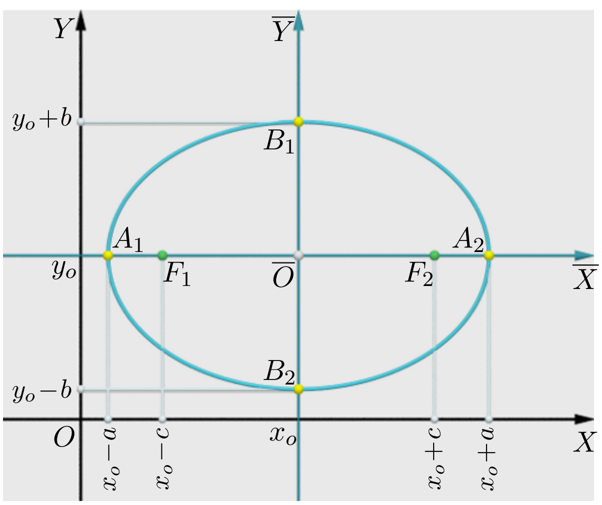

Figura 5.14: $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

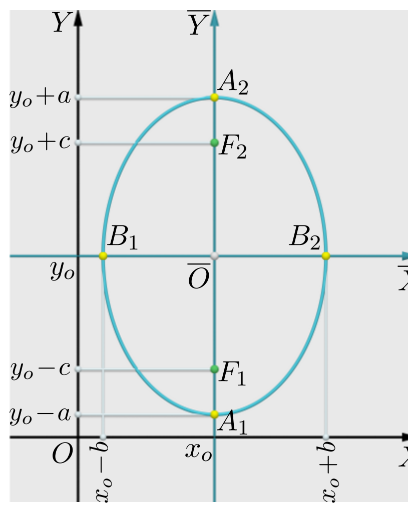

Figura 5.15: $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$.

Caso II. Reta focal paralela ao eixo OY

Procedendo como no caso anterior, verifica-se que **a forma canônica da equação da elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é:**

$$\boxed{\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1\,, \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2}$$

Os elementos dessa elipse são:

- Reta focal: $\ell : x = x_0$;
- Reta não focal: $\ell' : y = y_0$
- Focos: $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$;
- Vértices sobre a reta focal: $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$;
- Vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

O esboço da elipse é mostrado na Figura 5.15.

Exemplo 6

Os focos de uma elipse $\mathcal{E}$ são $(3,8)$ e $(3,2)$, e o comprimento de seu eixo não focal é 8. Determine a equação de $\mathcal{E}$, seus vértices e sua excentricidade.

Solução. Como $F_1 = (3,2)$ e $F_2 = (3,8)$ são os focos da elipse, sua reta focal é $\ell : x = 3$ (paralela ao eixo OY) e seu centro é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (3,5)$. Além disso, $2b = 8$, isto é, $b = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Portanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$; $A_1 = (3,0)$ e $A_2 = (3,10)$ são os vértices sobre a reta focal; $\ell' : y = 5$ é a reta não focal; $B_1 = (-1,5)$ e $B_2 = (7,5)$ são os vértices sobre a reta não focal e sua equação é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1.$$

Exemplo 7

A equação de uma elipse é $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$. Encontre a equação da elipse na forma canônica, seu centro, seus vértices, seus focos e sua excentricidade.

Solução. Completando os quadrados na equação de $\mathcal{E}$, temos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E} : (x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6 \\
&\mathcal{E} : (x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -6 + 1 + 4 \times \frac{9}{4} = 4 \\
&\mathcal{E} : (x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 \\
&\mathcal{E} : \frac{(x+1)^2}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1\,.
\end{aligned}$$

Esta última equação é a forma canônica de $\mathcal{E}$. Assim, $C = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$ é o centro de $\mathcal{E}$, $a = 2$, $b = 1$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Logo, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ é a excentricidade de $\mathcal{E}$.

A reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : y = \dfrac{3}{2}$, paralela ao eixo OX, e a reta não focal é $\ell' : x = -1$, paralela ao eixo$-OY$.

Os focos da elipse são $F_1 = \left(-1 - \sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\right)$ e $F_2 = \left(-1 + \sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\right)$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = \left(-1 - 2, \dfrac{3}{2}\right) = \left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$ e $A_2 = \left(-1 + 2, \dfrac{3}{2}\right) = \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ e os vértices sobre a reta não focal são $B_1 = \left(-1, \dfrac{3}{2} - 1\right) = \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ e $B_2 = \left(-1, \dfrac{3}{2} + 1\right) = \left(-1, \dfrac{5}{2}\right)$.

5.6 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Consideremos a equação da elipse $\mathcal{E}$ de centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

com $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Então, **$B = 0$ e A e C têm o mesmo sinal**. O mesmo vale para a equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY.

Reciprocamente, temos:

Proposição 4

Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{5.6}$$

têm o mesmo sinal, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:

- uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados;
- um ponto;
- o conjunto vazio.

Demonstração

Dividindo a equação (5.6) por AC, obtemos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0\,,$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}\,.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x+\dfrac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y^2+\dfrac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3} = \frac{M}{4A^2C^3} \qquad (5.7)$$

onde $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2$.

Se $M = 0$, a equação (5.7) representa o ponto $\left(-\dfrac{D}{2A}, -\dfrac{E}{2C}\right)$, pois A e C têm o mesmo sinal.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (5.7) na forma:

$$\frac{\left(x+\dfrac{D}{2A}\right)^2}{\dfrac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y^2+\dfrac{E}{2C}\right)^2}{\dfrac{M}{4ACC^2}} = 1. \qquad (5.8)$$

Como $AC > 0$, a equação (5.8) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\dfrac{D}{2A}, -\dfrac{E}{2C}\right)$, se $M > 0$.

Se $M < 0$, a equação (5.8) representa o conjunto vazio, pois, neste caso, $\dfrac{M}{4A^2C^2} < 0$ e $\dfrac{M}{4ACC^2} < 0$.

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, com $AC > 0$, representa um ponto ou o conjunto vazio são denominados **casos degenerados da elipse**.

EXEMPLO 8

Verifique se as equações abaixo representam uma elipse ou uma elipse degenerada. Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

(a) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$.

Solução. Como $25x^2+9y^2 = 225$, obtemos, dividindo por 225, que a equação $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ representa uma elipse com:

- $a = 5$, $b = 3$ e $c = \sqrt{25-9} = 4$;
- centro: $C = (0,0)$;
- reta focal: $\ell =$ eixo $- OY : x = 0$;
- reta não focal: $\ell' =$ eixo $- OX : y = 0$;
- vértices sobre a reta focal: $A_1 = (0,-5)$ e $A_2 = (0,5)$;
- vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (-3,0)$ e $B_2 = (3,0)$;
- focos: $F_1 = (0,-4)$ e $F_2 = (0,4)$.

(b) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$

Solução. Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) = -100 \\ \iff & 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 + 4y + 4) = -100 + 4 \times 25 + 9 \times 4 \\ \iff & 4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \\ \iff & \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma elipse com:

- $a = 3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$;
- centro: $C = (5, -2)$;
- reta focal: $\ell : y = -2$, paralela ao eixo$-OX$;
- reta não focal: $\ell' : x = 5$, paralela ao eixo$-OY$;
- vértices sobre a reta focal: $A_1 = (2, -2)$ e $A_2 = (8, -2)$;
- vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (5, -4)$ e $B_2 = (5, 0)$;
- focos: $F_1 = (5 - \sqrt{5}, -2)$ e $F_2 = (5 + \sqrt{5}, -2)$.

(c) $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0.$

Solução. Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 36(x^2 - 3x) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) = -82 \\ \iff & 36\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -82 + 36 \times \frac{9}{4} + 9 \times \frac{1}{9} \\ \iff & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -82 + 81 + 1 \\ \iff & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Assim, apenas o ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ satisfaz à equação dada, isto é, a equação representa um ponto.

(d) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y + 25 = 0.$

Solução. Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 9(x^2 + 2x) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y\right) = -25 \\ \iff & 9(x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{81}{64}\right) = -25 + 9 \times 1 + 4 \times \frac{81}{64} \\ \iff & 9(x+1)^2 + 4\left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = -16 + \frac{81}{16} = -\frac{175}{16}\,. \end{aligned}$$

Como $-\frac{175}{16} < 0$, nenhum ponto do plano satisfaz à equação, isto é, a equação representa o conjunto vazio.

5.7 Exercícios

1. Determine a equação da elipse:

(a) centrada no ponto $(1, -1)$ e com um foco no ponto $(2, -1)$, que passa pelo ponto $(2, 1)$.

(b) centrada no ponto $(1, 2)$ com um vértice na reta focal no ponto $(3, 2)$ e excentricidade $\frac{1}{2}$.

2. Considere a elipse de centro $(1, 1)$, foco $(3, 2)$ e excentricidade $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Determine:

(a) as coordenadas dos vértices e do outro foco da elipse.

(b) a equação cartesiana da elipse e faça um esboço.

3. Seja $\mathcal{E}$ a elipse que tem vértices nos pontos $(4, 4)$ e $(3, 1)$, e reta focal $\ell : x - y = 0$.

(a) Determine os outros vértices, os focos, o centro e a reta não focal.

(b) Obtenha a equação de $\mathcal{E}$.

(c) Faça um esboço de $\mathcal{E}$, indicando todos seus elementos.

4. Determine, caso existam, os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a equação dada representa uma elipse, incluindo os casos degenerados.

(a) $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 3)y^2 = \lambda - 2$;

(b) $(\lambda - 1)(\lambda - 2)x^2 + (\lambda - 2)y^2 - 2\lambda(\lambda - 2)y = 3\lambda^2 - \lambda^3$;

(c) $(\lambda - 2)x^2 + 2(\lambda - 2)x + (\lambda + 2)y^2 = \lambda^2 - 3\lambda + 3$;

(d) $(\lambda^2 - 1)x^2 + 2(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)x + (\lambda^2 - 4)y^2 = (\lambda - 1)^2$.

5. Obtenha os pontos da elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ cuja distância ao foco, que se encontra no semieixo OX positivo, é igual a 14.

6. Uma elipse não degenerada $\mathcal{E}$ divide o plano em três subconjuntos disjuntos: a própria elipse; a região delimitada por $\mathcal{E}$ que contém o centro e os focos, denominada *região focal,* $\mathcal{R}_f$, e a região que não contém o centro, a *região não focal,* $\mathcal{R}_{nf}$.

Seja $\mathcal{E} : Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ uma elipse. Caracterize os conjuntos $\mathcal{R}_f$ e $\mathcal{R}_{nf}$ mediante uma desigualdade nas variáveis x e y.

7. O complementar de uma reta no plano consiste de dois semiplanos localizados em lados opostos da reta. Se $r : ax+by=c$ é a equação da reta, os semiplanos determinados por r são caracterizados pelas desigualdades $ax+by<c$ e $ax+by>c$. Mostre que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, ax+by>c\}$ é o semiplano para o qual o vetor (a,b), normal à reta r, aponta.

8. Sejam $\mathcal{E}$ a elipse e $\mathcal{R}$ a região do plano dadas por:

$$\mathcal{E} : 25x^2+16y^2-150x-32y-159=0 \text{ e } \mathcal{R} : \begin{cases} 4x+3y \geq 1 \\ 5x-3y \leq 12 \\ |y| \leq 5. \end{cases}$$

(a) Determine todos os elementos da elipse $\mathcal{E}$.

(b) Faça um esboço detalhado da região do plano obtida pela interseção de $\mathcal{R}$ com a região focal determinada por $\mathcal{E}$.

9. Obtenha todos os elementos da elipse $\mathcal{E} : x^2+9y^2-6x=0$ e faça um esboço detalhado da região obtida pela interseção da região focal de $\mathcal{E}$ com o interior do círculo $\mathcal{C} : (x-8)^2+y^2-25=0$.

10. Sejam F_1 e F_2 pontos do plano tais que $d(F_1,F_2)=2c>0$ e $a>0$ um número real positivo. Considere o conjunto

$$\mathcal{C} = \{P\,;\, d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\}.$$

Vimos no texto que se $a>c$, então $\mathcal{C}$ é uma elipse. Determine o conjunto $\mathcal{C}$ quando $a=c$ e quando $a<c$.

11. Uma reta r é **tangente** a uma elipse $\mathcal{E}$ num ponto $P \in \mathcal{E}$ se r intersecta $\mathcal{E}$ só neste ponto, ou seja, $r \cap \mathcal{E} = \{P\}$. Verifique que a equação da reta tangente à elipse $\mathcal{E} : b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ em um ponto $(x_0,y_0) \in \mathcal{E}$ é $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$.

(Indicação: seja $r : \begin{cases} x = x_o + tv_1 \\ y = y_o + tv_2 \end{cases}$ uma reta que passa pelo ponto $P = (x_o, y_o) \in \mathcal{E}$. Substitua x e y das equações paramétricas de r na equação da elipse $\mathcal{E}$ e obtenha que r é tangente a $\mathcal{E} \Longleftrightarrow b^2 x_o v_1 + a^2 y_o v_2 = 0$, isto é, $(b^2 x_o, a^2 y_o)$ é um vetor perpendicular à reta tangente a $\mathcal{E}$ no ponto P.)

12. Determine as equações das retas tangentes à elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ que passam pelo ponto $\left(\frac{10}{3}, \frac{25}{3}\right)$.

13. Mostre que as retas tangentes a uma elipse nos pontos extremos de um diâmetro são paralelas.

5.8 Exercícios Suplementares

1. O ponto $(3, 1)$ é um vértice de uma elipse $\mathcal{E}$ cujos focos se acham sobre a reta $y + 6 = 0$. Encontre a equação de $\mathcal{E}$, sabendo que sua excentricidade é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Os pontos $V_1 = (7, 1)$ e $V_2 = (2, 5)$ são vértices de uma elipse $\mathcal{E}$ cuja reta focal é paralela a um dos eixos do sistema OXY.

   (a) Determine o centro, a reta focal e a reta não focal de $\mathcal{E}$, sabendo que V_1 pertence à reta focal.

   (b) Determine o centro, a reta focal e a reta não focal de $\mathcal{E}$, sabendo que V_2 pertence à reta focal.

   (c) Encontre as equações das elipses dos itens (a) e (b).

   (d) Elabore um esboço das elipses determinadas em (c) num mesmo sistema de eixos ortogonais.

3. Determine a equação da família de elipses com centro $(2, 3)$, reta focal paralela ao eixo-OX e excentricidade $\frac{1}{2}$.

4. Encontre a equação da elipse que passa pelos pontos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $(-3, 3)$ e $\left(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, sabendo que seus eixos são paralelos aos eixos coordenados.

5. Considere o ponto $F = (1, 2)$ e a reta $r : y = 1$. Mostre que o conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ P \,;\, d(P,F) = \frac{1}{2} d(P,r) \right\}$$

é uma elipse com um dos focos no ponto F. Determine também os demais elementos da elipse $\mathcal{E}$.

6. Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2 e vértices sobre a reta focal A_1 e A_2. Prove que, se $d(F_1, F_2) = 2c > 0$ e $d(A_1, A_2) = 2a > 0$, então:

   (a) $a - c \leq d(P, F_1) \leq a + c$ para todo ponto $P \in \mathcal{E}$;

   (b) $d(P, F_1) = a - c$ se, e só se, $P = A_1$.

   (c) $d(P, F_1) = a + c$ se, e só se, $P = A_2$.

7. Encontre as retas de inclinação 3 que são tangentes à elipse $4x^2 - 2y^2 = 9$.

8. Considere a elipse $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e o círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = a^2$. Prove que um ponto $P = (x_o, y_o)$ pertence à elipse $\mathcal{E}$ se, e só se, o ponto $P' = \left(x_o, \dfrac{a}{b} y_o\right)$ pertence ao círculo $\mathcal{C}$. Conclua que r é a reta tangente à elipse no ponto $(x_o, y_o) \in \mathcal{E}$ se, e só se, $\overline{r} = \left\{ \left(x, \dfrac{a}{b} y \right) \,;\, (x,y) \in r \right\}$ é uma reta que é tangente a $\mathcal{C}$ no ponto $\left(x_o, \dfrac{a}{b} y_o\right) \in \mathcal{C}$. Daí, já sabendo como determinar a reta tangente a $\mathcal{C}$ no ponto $(x_o, \frac{a}{b} y_o)$, mostre que $b^2 x_o x + a^2 y_o y = a^2 b^2$ é a reta tangente a $\mathcal{E}$ no ponto (x_o, y_o).

9. Seja P um ponto da elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2. Mostre que os segmentos PF_1 e PF_2 formam ângulos iguais com a reta tangente a $\mathcal{E}$ em P, e que a reta normal a $\mathcal{E}$ em P é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_1 P F_2}$.

10. Construções da elipse usando o GeoGebra.

   (a) Numa tela do GeoGebra:

   • escolha dois pontos F_1 e F_2;

   • trace a semirreta de origem F_1 passando por F_2;

   • trace um círculo de centro F_1 contendo F_2 no seu interior;

   • escolha um ponto D no círculo não pertencente à semirreta $\overrightarrow{F_1 F_2}$;

   • trace os segmentos DF_1 e DF_2;

   • trace a mediatriz do segmento DF_2 e determine o ponto P onde ela intersecta o segmento DF_1;

• Note que o ponto P pertence à elipse de focos F_1 e F_2 com $2a = d(F_1, D)$.

(De fato, como o ponto P pertence à mediatriz de DF_2, temos $d(P, D) = d(P, F_2)$ e, portanto, $2a = d(F_1, D) = d(F_1, P) + d(P, D) = d(F_1, P) + d(P, F_2)$).

Habilite o rastro no ponto P para desenhar a elipse, movendo o ponto D ao longo do círculo.

(b) Numa tela do GeoGebra:

• trace a reta que passa por dois pontos A e B;

• trace dois círculos concêntricos de centro A;

• escolha um ponto C no círculo exterior;

• trace o segmento AC e determine sua interseção D com o círculo interior;

• determine a interseção P da perpendicular à reta AB que passa por C com a paralela à reta AB que passa por D;

• prove que o ponto P pertence a uma elipse de centro A cujos semieixos tem comprimentos iguais aos raios dos círculos dados.

• habilite o rastro no ponto P e desenhe a elipse que o contém, movendo o ponto C ao longo do círculo.

Para Saber Mais

1. O Exercício 9 é o **princípio de reflexão** da elipse. Como consequência dele, todo feixe de luz, ou onda sonora, que parte de um dos focos, atinge o outro foco.

2. O termo *foco* foi empregado pela primeira vez em 1604 por **Johannes Kepler** (1571 – 1630). Analisando a enorme coleção de dados e observações astronômicas de **Thcho Brahe** (1546 – 1601), de quem se tornou assistente, Kepler concluiu que a órbita de Marte é uma elipse tendo o Sol num dos focos.

Esta é a *primeira lei do movimento planetário* ou *primeira lei de Kepler*. Esse resultado, juntamente com a *segunda lei de Kepler* (o segmento que liga o planeta Marte ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais) foram publicados na sua obra *Astronomia Nova* (1609). Posteriormente, Kepler confirmou que as mesmas propriedades eram válidas para as órbitas dos outros planetas. A *terceira lei de Kepler* (para quaisquer dois planetas, a razão dos quadrados dos seus períodos é igual à razão dos cubos dos raios médios das suas órbitas) foi publicada no seu segundo, e mais elaborado, tratado astronômico, *Harmonices mundi livri* (1619).

A terceira lei de Kepler foi um elemento de fundamental importância para **Isaac Newton** (1643 – 1727) concluir, em 1666, a *lei do quadrado inverso* (dois corpos são atraídos por uma força proporcional ao inverso do quadrado da distância entre eles). Newton confirmou as outras duas leis de Kepler como consequência da ação das forças centrípetas atuantes sobre os corpos no movimento, como aparece na que é considerada a maior publicação científica de todos os tempos, o *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de Newton, publicado em 1687.

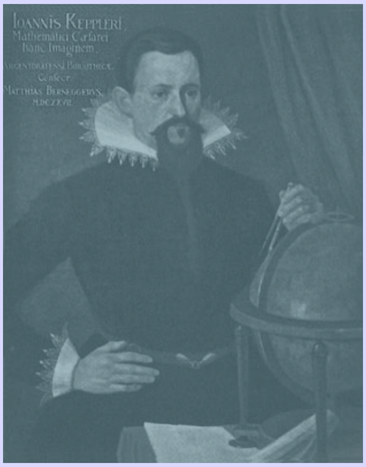

Figura 5.16: Kepler

3. A Terra se movimenta seguindo uma órbita elíptica que tem o Sol num dos focos. Em relação ao Exercício 6, se F_1 é o foco correspondente ao Sol, a posição que a Terra ocupa quando está no vértice A_1 é a mais próxima do Sol e a posição que ocupa quando está no vértice A_2 é a mais afastada do Sol. Essas posições correspondem ao **Periélio** (A_1) e **Afélio** (A_2) da órbita da Terra. É importante observar que as estações não são determinadas pela posição da terra ao longo da órbita e sim pela inclinação do seu eixo de rotação em relação ao plano que contém a órbita.

5.9 Solução de Exercícios

Solução do Exercício 8:

Sejam $r : ax + by = c$ e $r' : ax + by = c'$ duas retas paralelas. Considere a reta $\ell = \{\, t(a, b) \,;\, t \in \mathbb{R}\}$ perpendicular às retas r e r' que passa pela origem.

Então, $c < c'$ se, e somente se, $\overrightarrow{PP'}$ é um múltiplo positivo do vetor (a, b), onde $\{P\} = r \cap \ell$ e $\{P'\} = r' \cap \ell$.

Com efeito, sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ tais que $P = t(a, b)$ e $P' = t'(a, b)$. Então, $c = t(a^2 + b^2)$ e $c' = t'(a^2 + b^2)$, pois $P \in r$ e $P' \in r'$. Logo,

$$c < c' \iff t < t' \iff t - t' > 0$$
$$\iff \overrightarrow{PP'} = (t' - t)(a, b) \text{ é um múltiplo positivo de } (a, b).$$

Provamos, assim, que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, ax + by > c\}$ é o semiplano determinado pela reta r para o qual o vetor (a, b), normal a r, aponta.

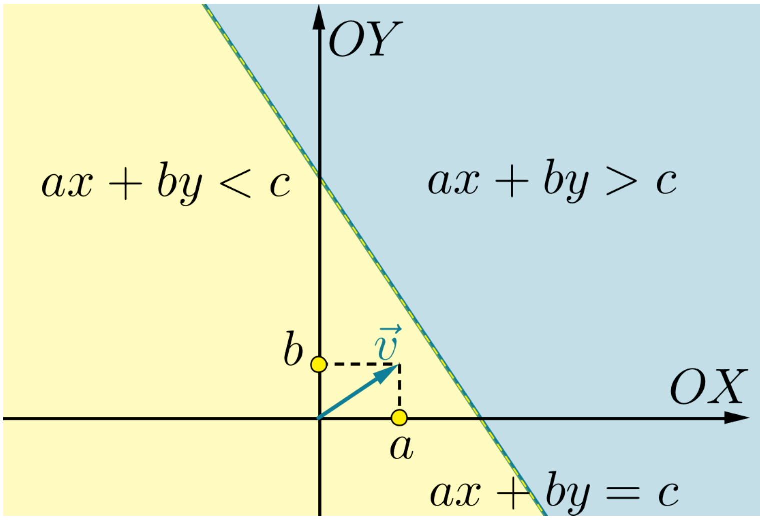

Figura 5.17: Semiplanos determinados por r.

◇