# 6

# Hipérbole

## Sumário

## 6.1 Introdução

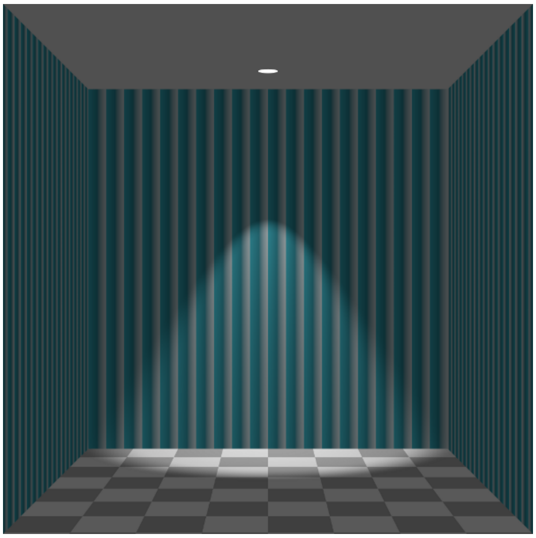

Figura 6.1: Um ramo da hipérbole

Neste capítulo realizaremos um estudo similar ao feito no capítulo anterior com a cônica **hipérbole**. Definiremos o lugar geométrico e seus elementos, estudaremos a sua simetria e obteremos a forma canônica da sua equação. No exercício 7, são descritas duas maneiras de construir, cinematicamente, a hipérbole, usando o GeoGebra.

A hipérbole, usada por Apolônio para resolver o problema de trissecção de um ângulo, aparece também no dia-a-dia, sem percebermos a sua presença, como podemos ver na Figura 6.1, onde um cone de luz intersecta uma parede paralela ao seu eixo, ou na tecnologia dos modernos sistemas de GPS (Global Positioning System).

## 6.2 Hipérbole

Definição 1

Uma **hipérbole** $\mathcal{H}$ de **focos** $F_1$ e $F_2$ é o conjunto de todos os pontos $P$ do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a $F_1$ e $F_2$ é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.

$$\mathcal{H} = \{\, P \mid |\, d(P, F_1) - d(P, F_2)\,| = 2a \,\}\,, \quad 0 < a < c\,, \quad d(F_1, F_2) = 2c.$$

### Terminologia

- Os pontos $F_1$ e $F_2$ são os **focos** da hipérbole e a reta que os contêm é a **reta focal**.
- A interseção da hipérbole $\mathcal{H}$ com a reta focal $\ell$ consiste de exatamente dois pontos, $A_1$ e $A_2$, chamados **vértices** da hipérbole.

Note que, se

$$P \in \ell - F_1F_2,$$

então $P \notin \mathcal{H}$:

De fato, se o ponto $P$ pertence à semirreta de origem $F_1$ que não contém $F_2$ e $d(P, F_1) = x$ (Figura 6.2 (a)), então $P \notin \mathcal{H}$, pois:

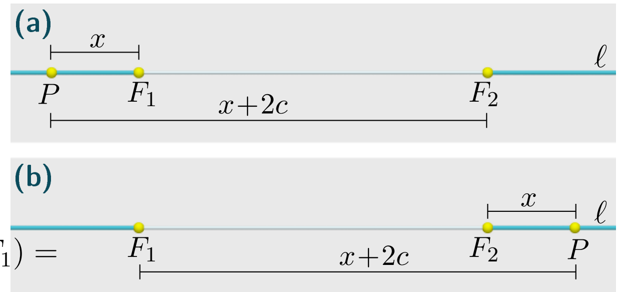

Figura 6.2: Necessariamente $\mathcal{H} \cap \ell \subset F_1F_2$

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |x - (x + 2c)| = 2c > 2a.$$

E se $P$ pertence à semirreta de origem $F_2$ que não contém $F_1$ e $d(P, F_1) = x$ (Figura 6.2 (b)), então $P \notin \mathcal{H}$, pois:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |(x + 2c) - x| = 2c > 2a.$$

Seja, então, $A_1 \in F_1F_2 \cap \mathcal{H}$ tal que $d(A_1, F_1) = x$ e $0 < x < c$.

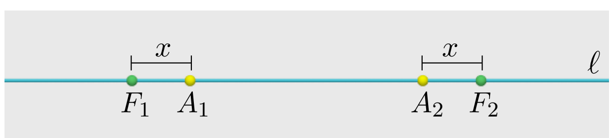

Figura 6.3: Posicionamento dos vértices em relação aos focos

Como $d(F_1, F_2) = 2c$, temos:

$$\begin{aligned} |d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a &\iff |x - (2c - x)| = 2a \\ &\iff |2x - 2c| = 2a \\ &\iff 2c - 2x = 2a \\ &\iff x = c - a\,. \end{aligned}$$

Logo, o ponto $A_1$ de $F_1F_2$, distante $c - a$ de $F_1$, pertence à hipérbole $\mathcal{H}$.

Analogamente, o ponto $A_2$ de $F_1F_2$, distante $c - a$ de $F_2$, pertence à hipérbole $\mathcal{H}$.

- O segmento $A_1A_2$ é denominado **eixo focal** da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$ (Figura 6.4).

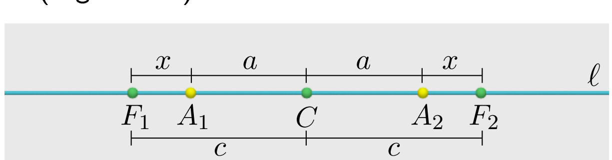

Figura 6.4: Posicionamento dos vértices e do centro em relação aos focos

- O ponto médio $C$ do eixo focal $A_1A_2$ é o **centro** da hipérbole (Figura 6.4).

O centro $C$ é também o ponto médio do segmento $F_1F_2$ delimitado pelos focos:

$$C = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

Observe que $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ e $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$.

- A reta $\ell'$ que passa pelo centro $C$ e é perpendicular à reta focal $\ell$ é a **reta não focal** da hipérbole. Como $\ell'$ é a mediatriz do segmento $F_1F_2$, a hipérbole não intersecta a reta não focal $\ell'$, pois, se $P \in \ell'$, temos (Figura 6.5):

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a.$$

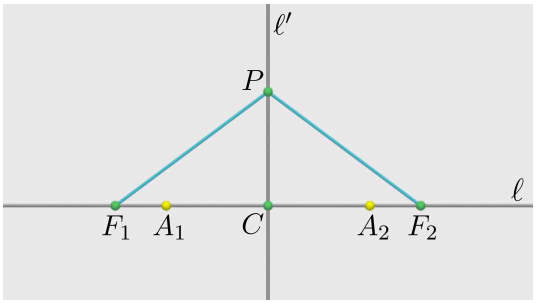


Figura 6.5: Pontos da reta não focal não pertencem a $\mathcal{H}$

- O segmento $B_1B_2$, perpendicular ao eixo focal que tem ponto médio $C$ e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado **eixo não focal** da hipérbole, e $B_1$ e $B_2$ são os vértices imaginários da hipérbole (Figura 6.6).

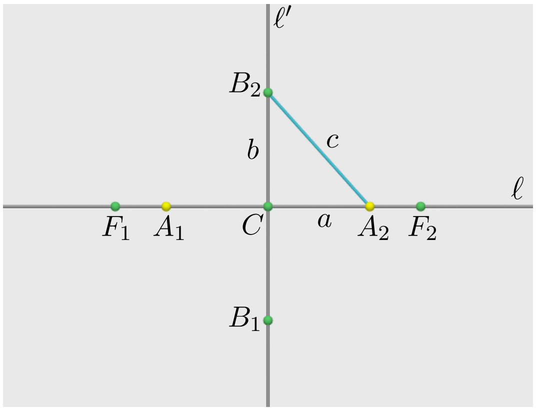


Figura 6.6: Relação dos comprimentos $a$, $b$ e $c$

- A **excentricidade** da hipérbole $\mathcal{H}$ é $e = \dfrac{c}{a}$. Note que $e > 1$, pois $c > a$.

- O **retângulo de base** da hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo cujos lados têm $A_1$, $A_2$, $B_1$ e $B_2$ como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as **assíntotas** de $\mathcal{H}$ (Figura 6.7). Portanto, as assíntotas de $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação à reta focal. Assim, $\ell$ e $\ell'$ são as bissetrizes das assíntotas.

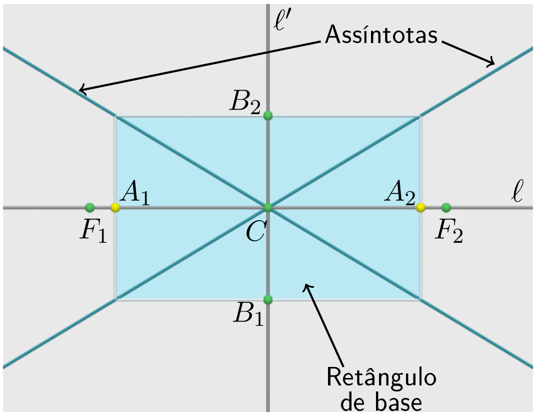


Figura 6.7: Retângulo de base e assíntotas da hipérbole

Pelo teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ têm comprimento $2c$, pois a distância do centro $C$ de $\mathcal{H}$ a qualquer vértice do retângulo de base é igual a $c$.

• Uma hipérbole é **equilátera**, se o comprimento do eixo focal for igual ao comprimento do eixo não focal, isto é, $a = b$.

O retângulo de base de uma hipérbole equilátera é um quadrado e as assíntotas se intersectam perpendicularmente.

• Duas hipérboles são **conjugadas** se o eixo focal de cada uma é o eixo não focal da outra.

Duas hipérboles conjugadas possuem o mesmo retângulo de base, o mesmo centro, as mesmas assíntotas e os focos estão a uma mesma distância do centro.

A hipérbole é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

OBSERVAÇÃO 2

**(a) Simetria de $\mathcal{H}$ em relação à reta focal.** Se $P \in \mathcal{H}$ e $P'$ é o simétrico de $P$ em relação à reta focal, então (Figura 6.8):

$$\triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q \qquad \text{e} \qquad \triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q\,.$$

Em particular,

$$|F_2P| = |F_2P'| \qquad \text{e} \qquad |F_1P| = |F_1P'|.$$

Logo,

$$|d(P', F_1) - d(P', F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Longrightarrow P' \in \mathcal{H}\,.$$

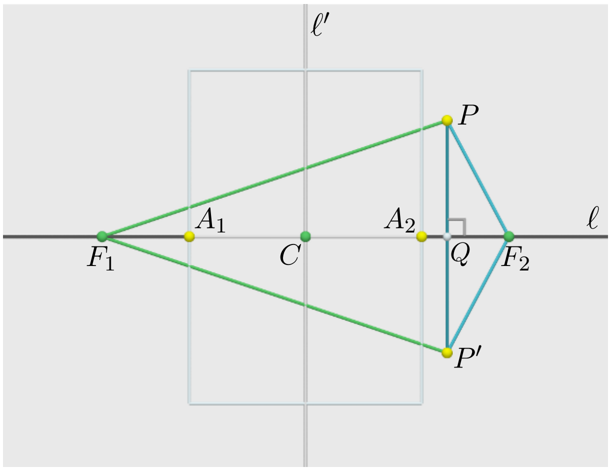


Figura 6.8: Simetria da hipérbole em relação à reta focal

A simetria em relação à reta não focal se verifica de maneira análoga.

**(b) Simetria de $\mathcal{H}$ em relação ao centro.**

Se $P \in \mathcal{H}$ e $P''$ é o simétrico de $P$ em relação ao centro (Figura 6.9), então:

$$\triangle F_1CP \equiv \triangle F_2CP'' \qquad \text{e} \qquad \triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1 \,.$$

Em particular,

$$|F_2P| = |F_1P''| \text{ e } |F_1P| = |F_2P''|.$$

Logo,

$$|d(P'', F_2) - d(P'', F_1)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Longrightarrow P'' \in \mathcal{H} \,.$$

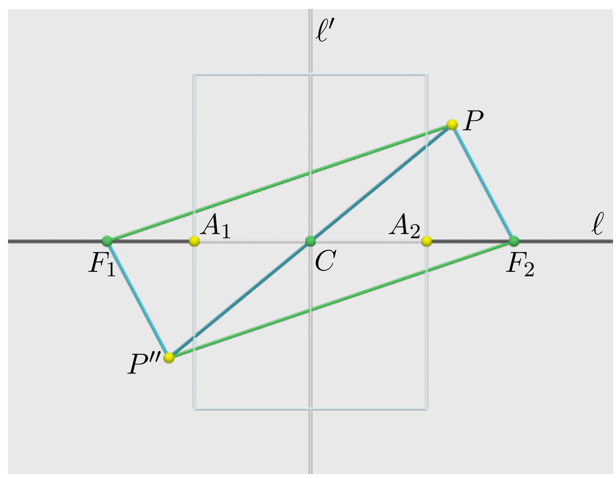


Figura 6.9: Simetria da hipérbole em relação ao centro

## 6.3 Forma canônica da hipérbole

Como fizemos para a elipse, vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXY$ nos casos em que o eixo focal é o eixo $OX$ ou o eixo $OY$.

### 6.3.1 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

Neste caso,

$$\begin{array}{lll} F_1 = (-c, 0); & A_1 = (-a, 0); & B_1 = (0, -b) \\ F_2 = (c, 0); & A_2 = (a, 0); & B_2 = (0, b). \end{array}$$

Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\iff \begin{cases} d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ d(P,F_1) - d(P,F_2) = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}). \end{cases}$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chegamos à conclusão que

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in \mathcal{H} &\iff (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \\ &\iff b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\ &\iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Esta última equação é a **forma canônica da equação da hipérbole $\mathcal{H}$ de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OX$**. Como as assíntotas de $\mathcal{H}$ são as retas que passam pela origem (centro) e têm inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação ao eixo$-OX$ (reta focal), suas equações são $y = \pm\frac{b}{a}x$, ou seja, $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$.

## 6.3.2 Esboço da Hipérbole

Sejam $\mathcal{H}$ uma hipérbole e $OXY$ um sistema de eixos ortogonais no qual $O$ é o centro e o eixo $OX$ é a reta focal de $\mathcal{H}$. Nesse sistema, a equação de $\mathcal{H}$ é a equação (6.1). Dessa equação, obtemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

com $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

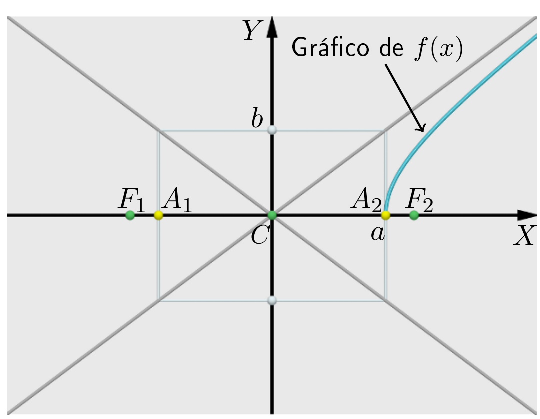


Figura 6.10: Gráfico da função $f(x)$

Considere a função

$$\begin{aligned} f : [a + \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \end{aligned}$$

cujo gráfico é a parte de $\mathcal{H}$ situada no primeiro quadrante (Figura 6.10).

Temos que $f(a) = 0$ e $f(x)$ é crescente e côncava, pois

$$f'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}} > 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{-ab}{(x^2-a^2)^{3/2}} < 0,$$

para todo $x \in (a, +\infty)$.

Pela simetria da hipérbole em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e ao eixo$-OY$ (reta não focal), o gráfico de $\mathcal{H}$ é como se mostra na Figura 6.11.

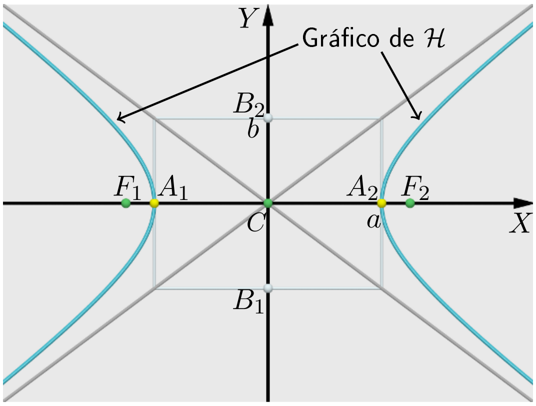


Figura 6.11: Gráfico de $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vamos explicar o nome **assíntota** dado às retas que contêm as diagonais do retângulo de base. Para isso, seja $\mathcal{H}$ a hipérbole dada pela equação canônica (6.1).

Se $P = (x, y) \in \mathcal{H}$, isto é, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, e $r_+ : bx - ay = 0$ é uma assíntota de $\mathcal{H}$, então,

$$\begin{aligned} d(P, r_+) &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \\ &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} \\ &= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{1}{|bx + ay|} \\ &= \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{1}{|bx + ay|}. \end{aligned}$$

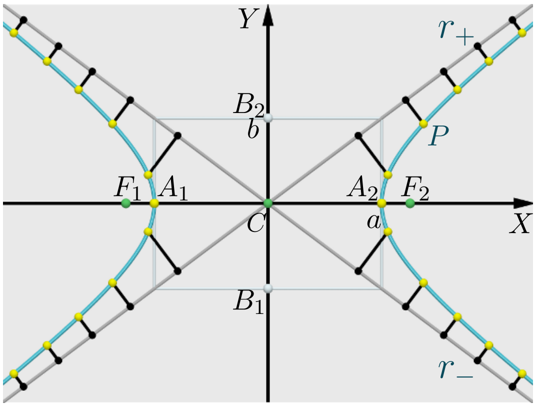


Figura 6.12: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \pm\infty$ e $d(P, r_-) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \mp\infty$

Logo, $d(P, r_+) \longrightarrow 0$, quando $x \longrightarrow \pm\infty$ e $y \longrightarrow \pm\infty$.

De modo análogo, verificamos que $d(P, r_-) \longrightarrow 0$, quando $x \longrightarrow \pm\infty$ e $y \longrightarrow \mp\infty$, onde $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ e $r_- : bx + ay = 0$ é a outra assíntota da hipérbole.

### 6.3.3 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

Neste caso, temos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$, onde $b^2 = c^2 - a^2$. Procedendo como no caso anterior, obtemos que a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ é:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad \textbf{Forma canônica da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo}-OY. \tag{6.2}$$

As assíntotas são as retas $x = \pm\frac{b}{a}y$, ou seja, $ax - by = 0$ e $ax + by = 0$.

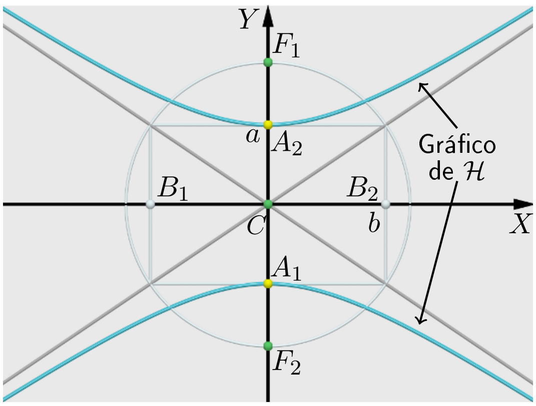


Figura 6.13: Gráfico de $\mathcal{H} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

**Exemplo 1**

Determine a equação da hipérbole equilátera com focos nos pontos $(-\sqrt{8}, 0)$ e $(\sqrt{8}, 0)$.

**Solução.** Como $F_1 = (-\sqrt{8}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{8}, 0)$, o centro da hipérbole é $C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (0, 0)$ e a reta focal é o eixo$-OX$.

Sendo a hipérbole equilátera ($a = b$), $c = \sqrt{8}$ e $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos que $8 = a^2 + a^2 = 2a^2$, isto é, $a^2 = 4$. Logo, $a = b = 2$ e

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

é a equação da hipérbole. Além disso, $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$ são os vértices, $B_1 = (0, -2)$ e $B_2 = (0, 2)$ são os vértices imaginários e $y = \pm x$ são as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$.

**Exemplo 2**

Mostre que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$.

**Solução.** Como $a = b$ e $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$. Logo, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$.

Exemplo 3

Os vértices de uma hipérbole são os pontos $(0,3)$ e $(0,-3)$ e um de seus focos é o ponto $(0,5)$. Obtenha a equação da hipérbole, o comprimento do seu eixo focal e suas assíntotas.

**Solução.** A hipérbole tem centro $C = \dfrac{(0,3)+(0,-3)}{2} = (0,0)$, reta focal $=$ eixo$-OY$, $c = d((0,0),(0,5)) = 5$, $a = d((0,0),(0,3)) = 3$ e $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$.

Então, $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ é a equação da hipérbole, $x = \pm\dfrac{4}{3}y$ são as suas assíntotas e $2a = 6$ o comprimento do seu eixo focal.

Exemplo 4

O centro de uma hipérbole é a origem, sua reta focal é um dos eixos coordenados e uma de suas assíntotas é a reta $2x - 5y = 0$. Determine a equação da hipérbole $\mathcal{H}$, supondo que o ponto $(4,6) \in \mathcal{H}$.

**Solução.** Como o centro é a origem e a reta focal (eixo$-OX$ ou eixo$-OY$) é uma bissetriz das assíntotas, a reta $2x + 5y = 0$ é a outra assíntota. Vamos analisar os dois casos possíveis.

- Reta focal $=$ eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{5}$, isto é, $b = \dfrac{2}{5}a$. Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{16}{a^2} - \dfrac{36}{\frac{4a^2}{25}} = 1$, ou seja, $16 \times 4 - 25 \times 36 = 4a^2$, o que é um absurdo, pois $4a^2 > 0$ e $16 \times 4 - 25 \times 36 < 0$.

- Reta focal $=$ eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{2}$, isto é, $a = \dfrac{2}{5}b$. Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{36}{\frac{4b^2}{25}} - \dfrac{16}{b^2} = 1$, ou seja, $36 \times 25 - 16 \times 4 = 4b^2$.

Logo, $b^2 = 9 \times 25 - 16 = 209$, $a^2 = \dfrac{836}{25}$ e

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{\frac{856}{25}} - \frac{x^2}{209} = 1$$

é a equação da hipérbole.

Exemplo 5

Determine a equação, os vértices, os focos e a excentricidade da hipérbole conjugada da hipérbole

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

**Solução.** A hipérbole $\mathcal{H} : 9x^2 - 4y^2 = 36$, que também pode ser escrita na forma $\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, tem centro na origem, reta focal = eixo$-OX$, $a = 2$, $b = 3$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

Então, a hipérbole $\mathcal{H}'$, conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, tem centro na origem, $a' = b = 3$, $b' = a = 2$, $c' = c = \sqrt{13}$ e reta focal = eixo$-OY$.

Logo, $\mathcal{H}' : \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ é a equação da hipérbole conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, $F_1 = (0, -\sqrt{13})$ e $F_2 = (0, \sqrt{13})$ são seus focos, $A_1 = (0, -3)$ e $A_2 = (0, 3)$ são seus vértices e $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ é a sua excentricidade.

## 6.4 Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_o, y_o)$

### Caso I. Reta focal paralela ao eixo$-OX$

Como o centro $\overline{O} = (x_o, y_o)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_o$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como

$$d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c,$$

onde $F_1$ e $F_2$ são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_o - c, y_o)$ e $F_2 = (x_o + c, y_o)$.

Seja $P = (\overline{x} + x_o, \overline{y} + y_o)$ um ponto pertencente à hipérbole, onde

$$x = \overline{x} + x_o \text{ e } y = \overline{y} + y_o$$

são suas coordenadas no sistema $OXY$, e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido transladando o sistema $OXY$ para a origem $\overline{O} = (x_o, y_o)$.

Então, $P$ pertence à hipérbole se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\
\iff & |d((\overline{x} + x_o, \overline{y} + y_o), (x_o - c, y_o)) - d((\overline{x} + x_o, \overline{y} + y_o), (x_o + c, y_o))| = 2a \\
\iff & |d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) - d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0))| = 2a \\
\iff & \frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo, **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto $(x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$ é:**

$$\boxed{\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2}$$

Os elementos de $\mathcal{H}$ são:

- **focos:** $F_1 = (x_o - c, y_o)$ e $F_2 = (x_o + c, y_o)$;
- **reta focal:** $\ell : y = y_o$;
- **vértices:** $A_1 = (x_o - a, y_o)$ e $A_2 = (x_o + a, y_o)$;
- **reta não focal:** $\ell' : x = x_o$;
- **vértices imaginários:** $B_1 = (x_o, y_o - b)$ e $B_2 = (x_o, y_o + b)$;

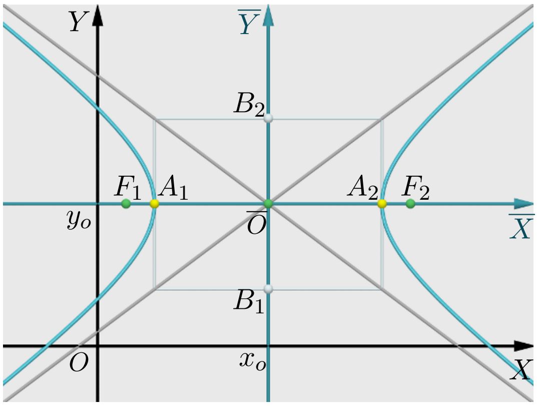


Figura 6.14: Gráfico de $\mathcal{H} : \frac{(x-x_o)^2}{a^2} - \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$

- **assíntotas:** $y - y_o = \pm\dfrac{b}{a}(x - x_o)$, ou seja, $b(x - x_o) - a(y - y_o) = 0$ e $b(x - x_o) + a(y - y_o) = 0$.

### Caso II. Reta focal paralela ao eixo$-OY$

Procedendo como no caso anterior, verifica-se que **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto $(x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$ é:**

$$\boxed{\frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1\,, \qquad \text{onde} \qquad b^2 = c^2 - a^2}$$

Os elementos de $\mathcal{H}$ são:

- **focos:** $F_1 = (x_o, y_o - c)$ e $F_2 = (x_o, y_o + c)$;
- **reta focal:** $\ell : x = x_o$;
- **vértices:** $A_1 = (x_o, y_o - a)$ e $A_2 = (x_o, y_o + a)$;
- **reta não focal:** $\ell' : y = y_o$;
- **vértices imaginários:** $B_1 = (x_o - b, y_o)$ e $B_2 = (x_o + b, y_o)$;

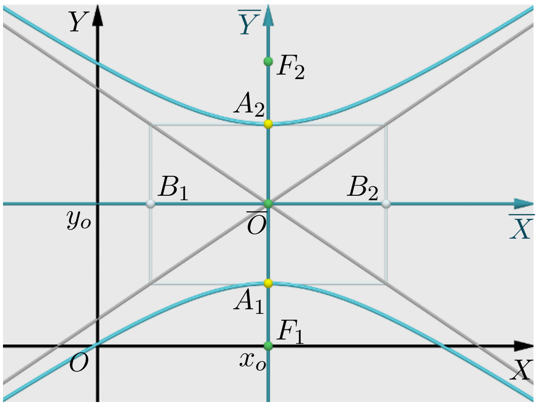


Figura 6.15: Gráfico de $\mathcal{H} : \frac{(y-y_o)^2}{a^2} - \frac{(x-x_o)^2}{b^2} = 1$

- **assíntotas:** $x - x_o = \pm b/a(y - y_o)$, ou seja, $a(x - x_o) - b(y - y_o) = 0$ e $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$.

Exemplo 6

Determine o ângulo agudo de interseção das assíntotas da hipérbole
$$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0.$$

**Solução.** A equação da hipérbole se escreve na forma:
$$\begin{aligned} &9(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = -44 \\ &9(x-2)^2 - (y+1)^2 = -44 + 36 - 1 = -9 \\ &\frac{(y+1)^2}{9} - (x-2)^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, $C = (2, -1)$ é o centro, a reta focal é $\ell : x = 2$, paralela ao eixo$-OY$, $a = 3$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$ e as assíntotas são $x - 2 = \pm\frac{1}{3}(y+1)$, ou seja, $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$.

Assim, $\operatorname{tg}\beta = 3$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$, $\theta = \alpha - \beta$ e
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{-6}{1-9} = \frac{3}{4}\,,$$
onde $\beta$ e $\alpha$ são os ângulos que as retas $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$ fazem, respectivamente, com o semieixo $OX$ positivo, e $\theta$ é o ângulo agudo entre as assíntotas.

Exemplo 7

Encontre a equação da hipérbole que passa pelo ponto $(6, 2)$ e tem as retas $r : 2x + y = 3$ e $s : 2x - y = 1$ por assíntotas.

**Solução.** O centro $C = (x, y)$ da hipérbole é o ponto de interseção das assíntotas, isto é, $(x, y)$ é a solução do sistema:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = 1\,. \end{cases}$$

Logo, $C = (1, 1)$ é o centro. A reta focal $\ell$ e a reta não focal $\ell'$ são as bissetrizes das assíntotas, ou seja,
$$\begin{aligned} (x,y) \in \ell \cup \ell' \quad &\Longleftrightarrow \quad d((x,y),\ell) = d((x,y),\ell') \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{5}} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x + y - 3 = \pm(2x - y - 1) \\ &\Longleftrightarrow \quad y = 1 \ \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a reta focal é a reta $x = 1$ ou a reta $y = 1$. Vamos analisar os dois casos possíveis.

- **Caso I:** Reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$ e $\frac{b}{a} = 2$, ou seja, $b = 2a$.

Como $b^2 = 4a^2$ e $(6,2) \in \mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 4a^2$ e $4 \times 25 - 1 = 99 = 4a^2$.

Portanto, $\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 99$, ou seja, $\mathcal{H} : \dfrac{(x-1)^2}{99/4} - \dfrac{(y-1)^2}{99} = 1$.

• **Caso II:** Reta focal $\ell : x = 1$, paralela ao eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{(y-1)^2}{a^2} - \dfrac{(x-1)^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $a = 2b$. Como $a^2 = 4b^2$ e $(6,2) \in \mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} : (y-1)^2 - 4(x-1)^2 = 4b^2$ e $4b^2 = 1 - 4 \times 25 = -99 < 0$, o que é um absurdo.

Assim, a equação procurada corresponde ao primeiro caso:

$$\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 99.$$

## 6.5 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$.

Desenvolvendo a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ com centro no ponto $(x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$\mathcal{H} : \frac{(x-x_o)^2}{a^2} - \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1\,,$$

obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2x_ob^2x + 2y_oa^2y + x_o^2b^2 - a^2y_o^2 - a^2b^2 = 0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,, \text{ com}$$

$A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2x_ob^2$, $E = 2y_oa^2$, $F = x_o^2b^2 - a^2y_o^2 - a^2b^2$.

Em particular, **$B = 0$ e os coeficientes $A$ e $C$ têm sinais opostos**.

Podemos verificar que o mesmo ocorre quando desenvolvemos a equação da hipérbole de reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

**Proposição 3**

Se os coeficientes $A$ e $C$ da equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{6.3}$$

têm sinais opostos, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:

- uma hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados;
- um par de retas concorrentes.

Demonstração

Suponhamos que $A > 0$ e $C < 0$. Então,

$$Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) = -F\,,$$
$$\frac{\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right)}{-C} - \frac{\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right)}{A} = \frac{F}{AC}\,,$$
$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2}\,,$$
$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}\,.$$

Logo, a equação (6.3) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados, se $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$, e representa o par de retas concorrentes
$$y + \frac{E}{2C} = \pm\sqrt{\frac{-A}{C}}\,\left(x + \frac{D}{2A}\right)\,,$$
se $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$

O caso em que a equação do segundo grau (6.3), com $AC < 0$, representa um par de retas concorrentes é chamado **caso degenerado da hipérbole**.

Exemplo 8

Verifique se as equações abaixo representam uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada. Caso seja uma hipérbole, determine seus principais elementos.

**(a)** $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$.

**Solução.** Como $9x^2 - 25y^2 = 225$, obtemos, dividindo por $225$, a equação
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1\,,$$
que representa uma hipérbole com:

- $a = 5$, $b = 3$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$;
- centro: $C = (0, 0)$;
- reta focal: $\ell =$eixo$-OX$ : $y = 0$;
- reta não focal: $\ell' =$eixo$-OY$ : $x = 0$;
- vértices: $A_1 = (-5, 0)$ e $A_2 = (5, 0)$;
- vértices imaginários: $B_1 = (0, -3)$ e $B_2 = (0, 3)$;
- focos: $F_1 = (-\sqrt{34}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{34}, 0)$;
- assíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{5}\,x$, ou seja $3x \pm 5y = 0$.

**(b)** $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 9 = 0.$

**Solução.** Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x - 2(y^2 - 2y) = -9 \\ \Longleftrightarrow\ & (x^2 + 6x + 9) - 2(y^2 - 2y + 1) = -9 + 9 - 2 \\ \Longleftrightarrow\ & (x+3)^2 - 2(y-1)^2 = -2 \\ \Longleftrightarrow\ & (y-1)^2 - \frac{(x+3)^2}{2} = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma hipérbole com:

- $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$;
- centro: $C = (-3, 1)$;
- reta focal: $\ell : x = -3$, paralela ao eixo$-OY$;
- reta não focal: $\ell' : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$;
- vértices: $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (-3, 2)$;
- vértices imaginários: $B_1 = (-3 - \sqrt{2}, 1)$ e $B_2 = (-3 + \sqrt{2}, 1)$;
- focos: $F_1 = (-3, 1 - \sqrt{3})$ e $F_2 = (-3, 1 + \sqrt{3})$;
- assíntotas $(x + 3) = \pm\sqrt{2}(y - 1)$, ou seja, $x + \sqrt{2}y = -3 + \sqrt{2}$ e $x - \sqrt{2}y = -3 - \sqrt{2}$.

**(c)** $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0.$

**Solução.** Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 9(x^2 + 10x) - 16(y^2 + 8y) = 31 \\ \Longleftrightarrow\ & 9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 + 8y + 16) = 31 + 9 \times 25 - 16 \times 16 \\ \Longleftrightarrow\ & 9(x+5)^2 - 16(y+4)^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 9(x+5)^2 = 16(y+4)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 3(x+5) = \pm 4(y+4) \\ \Longleftrightarrow\ & 3(x+5) \pm 4(y+4) = 0\,. \end{aligned}$$

Logo, a equação representa o par de retas, $3x + 4y = -31$ e $3x - 4y = 1$, que se cortam no ponto $(-5, -4)$.

Para Saber Mais

Quando duas frentes de onda circulares se encontram, o fazem formando hipérboles como vemos na Figura 6.16.

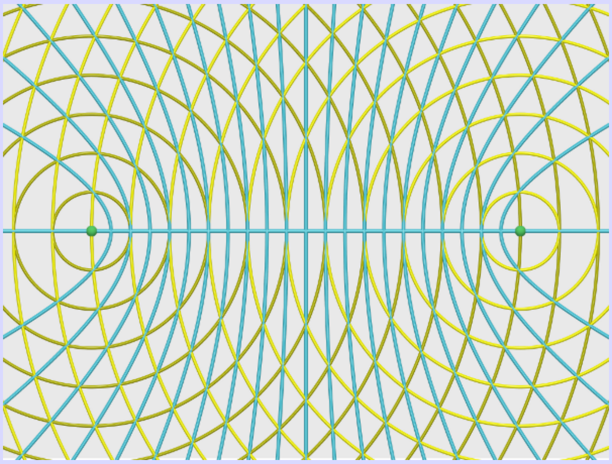

Figura 6.16: Interseção de frentes de onda circulares

É nesse fato que se baseia o sistema de localização LORAN (LOng RAnge Navigation) onde os círculos concêntricos são sinais de rádio.

## 6.6 Exercícios

**1.** Determine a equação da hipérbole que passa pelos pontos $(1, -3)$ e $(4, 6)$, com centro na origem e reta focal igual ao eixo $OX$.

**2.** Considere a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**(a)** Determine os pontos $P_1$ e $P_2$ onde $\mathcal{H}$ intersecta a perpendicular à reta focal que passa por um dos focos.

**(b)** Verifique que $d(P_1, P_2) = |P_1P_2| = \dfrac{2b^2}{a}$. Esse número é o **latus rectum** de $\mathcal{H}$. O **semi latus rectum** é o número $\dfrac{b^2}{a}$.

**3.** Determine a equação na forma canônica, os vértices, o centro, os focos, a reta focal, a reta não focal, os vértices imaginários, a excentricidade, as assíntotas, o latus rectum e o esboço da hipérbole $\mathcal{H}$.

**(a)** $\mathcal{H} : 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$;

**(b)** $\mathcal{H} : 4x^2 - 45y^2 = 180$;

(c) $\mathcal{H} : 49y^2 - 16x^2 = 784$;

(d) $\mathcal{H} : 9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$;

(e) $\mathcal{H} : 3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$;

(f) $\mathcal{H} : x^2 - y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$.

4. Obtenha o lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias aos pontos $(0, 3)$ e $(0, -3)$ é igual a $5$.

5. Encontre o lugar geométrico dos pontos cujo produto das distâncias às retas $3x - 4y + 1 = 0$ e $3x + 4y - 7 = 0$ é $\dfrac{144}{25}$.

6. Ache a equação da hipérbole conjugada à hipérbole de centro na origem com um vértice em $(3, 0)$ e uma assíntota $2x - 3y = 0$.

7. Determine, caso existam, os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a equação dada representa uma hipérbole, incluindo o caso degenerado.

(a) $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 3)y^2 = \lambda - 2$;

(b) $(\lambda - 1)(\lambda - 2)x^2 + (\lambda - 2)y^2 - 2\lambda(\lambda - 2)y = 3\lambda^2 - \lambda^3$;

(c) $(\lambda - 2)x^2 + 2(\lambda - 2)x + (\lambda + 2)y^2 = \lambda^2 - 3\lambda + 3$;

(d) $(\lambda^2 - 1)x^2 + 2(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)x + (\lambda^2 - 4)y^2 = (\lambda - 1)^2$.

8. (a) Uma hipérbole divide o plano em três subconjuntos disjuntos: a própria hipérbole, a região que contém seus focos, denominada **região focal**, e a região que contém seu centro, a **região não focal**. Descreva a região focal e a região não focal mediante desigualdades, no caso em que a hipérbole tem centro no ponto $(x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo $OX$.

(b) Verifique se os pontos $(5, 3)$, $(-1, -2)$ e $(-8, 4)$ pertencem à hipérbole $\mathcal{H} : 4x^2 - 9y^2 + 20x - 11 = 0$, à região focal ou à região não focal de $\mathcal{H}$.

9. Sejam $\mathcal{C}_1 : 4x^2 + y^2 - 24x + 32 = 0$ e $\mathcal{C}_2 : x^2 - 4y^2 - 6x + 5 = 0$.

(a) Determine as equações canônicas de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e seus elementos.

(b) Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R} : \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 24x + 32 \geq 0 \\ x^2 - 4y^2 - 6x + 5 \leq 0 \\ |y| \leq 2. \end{cases}$

10. A **reta tangente** a uma hipérbole $\mathcal{H}$ num ponto $P \in \mathcal{H}$ é a única reta não paralela às assíntotas que intersecta $\mathcal{H}$ só nesse ponto.

    Mostre que a reta tangente à hipérbole $\mathcal{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, em um ponto $P = (x_o, y_o)$ sobre a curva, tem por equação
    $$b^2x_ox - a^2y_oy = a^2b^2\,.$$

11. Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais as retas da família $r_m : y = mx - 1$ são tangentes à hipérbole $\mathcal{H} : 4x^2 - 9y^2 = 36$.

## 6.7 Exercícios Suplementares

1. Encontre o lugar geométrico dos pontos cuja distância ao ponto $(0, 6)$ é igual a $3/2$ da distância à reta $y - 8/3 = 0$.

2. Determine a equação da hipérbole $\mathcal{H}$

   **(a)** de latus rectum $18$ e distância entre seus focos igual a $12$.

   **(b)** centrada na origem, de excentricidade $2\sqrt{3}$, latus rectum $18$ e eixo focal sobre o eixo $OY$.

   **(c)** centrada na origem e eixos sobre os eixos coordenados, que passa pelos pontos $(3, 1)$ e $(9, 5)$.

   **(d)** de vértices $(\pm 6, 0)$ e assíntotas $7x \pm 6y = 0$.

3. Encontre a equação e os elementos principais da hipérbole que passa pelo ponto $Q = (-1, -5)$ e tem os eixos coordenados como assíntotas.

4. Sejam $F_1$ e $F_2$ dois pontos do plano tais que $d(F_1, F_2) = 2c > 0$ e $a > 0$ um número real positivo. Considere o conjunto $\mathcal{C} = \{P\,;\, |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$. Como foi visto no texto, $\mathcal{C}$ é uma hipérbole se $a < c$. Determine o conjunto $\mathcal{C}$ nos casos $a = c$ e $a > c$.

5. Mostre que uma hipérbole não intersecta suas assíntotas e que qualquer reta paralela a uma assíntota intersecta a hipérbole em exatamente um ponto.

6. **(Princípio de reflexão das hipérbole)**
   Seja $P$ um ponto de uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos $F_1$ e $F_2$. Mostre que a reta

tangente a $\mathcal{H}$ em $P$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$. Assim, todo raio que parte de um ponto $Q$, pertence à reta que passa por $F_1$ e $P$ e situado na região não focal de $\mathcal{H}$, será refletido no ponto $P$ pela hipérbole num raio que intersecta o outro ramo da hipérbole no ponto de interseção, diferente de $P$, de $\mathcal{H}$ com a reta $r_2$ que passa por $F_2$ e $P$.

**7.** Neste exercício apresentamos duas construções da hipérbole, usando o GeoGebra.

**(a)** Numa janela do GeoGebra:

- escolha pontos $F_1$ e $F_2$ e trace a semirreta $r$ de origem $F_1$ passando por $F_2$;
- escolha um ponto $A$ na semirreta $r$ entre $F_1$ e $F_2$;
- trace o círculo $\mathcal{C}$ de centro $F_1$ que passa pelo ponto $A$;
- escolha um ponto $B$ no círculo $\mathcal{C}$ diferente de $A$;
- trace a reta $s$ que passa por $F_1$ e $B$;
- trace a mediatriz $m$ do segmento $BF_2$;
- determine o ponto $P$ dado pela interseção da reta $s$ com a mediatriz $m$;
- prove que o ponto $P$ descreve uma hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$, quando o ponto $B$ se move ao longo do círculo $\mathcal{C}$. Habilite o rastro no ponto $P$ e mova o ponto $B$ para desenhar a hipérbole.

**(b)** Numa janela do GeoGebra:

- trace a reta $r$ passando por dois pontos $A$ e $B$;
- escolha um ponto $C$ entre $A$ e $B$ na reta $r$;
- trace os círculos $\mathcal{C}_B$ e $\mathcal{C}_C$ de centro $A$ passando por $B$ e $C$, respectivamente;
- escolha um ponto $D$ no círculo $\mathcal{C}_B$ não pertencente à reta $r$;
- trace a semirreta $s$ de origem $A$ passando por $D$;
- determine as interseções $E_B$ e $E_C$ de $s$ com as perpendiculares a $r$ passando por $B$ e $C$ respectivamente;

- determine as interseções $P_1$ e $P_2$ da reta $r$ com o círculo $\mathcal{C}$ de centro $A$ que passa por $E_B$;
- trace as retas $r_1$ e $r_2$, perpendiculares a $r$ que passam pelos pontos $P_1$ e $P_2$, respectivamente.
- trace a reta $r_3$ paralela a $r$ que passa pelo ponto $E_C$;
- determine e habilite o rastro nos pontos $Q_1$ e $Q_2$ obtidos pela interseção de $r_3$ com $r_1$ e $r_2$, respectivamente;
- quando o ponto $D$ se move ao longo do círculo $\mathcal{C}_B$, os pontos $Q_1$ e $Q_2$ descrevem os ramos de uma hipérbole de centro no ponto $A$, cujos vértices são os pontos de interseção de $r$ com o círculo $\mathcal{C}_B$.

**Para Saber Mais**

O princípio de reflexão das cônicas, conhecido desde a época dos gregos, tem sido muito explorado desde o século XVII na construção de telescópios. Em particular, o *telescópio refletor de Cassegrain*, inventado pelo francês **Guillaume Cassegrain** no ano de 1672, se utiliza de um espelho refletor primário parabólico e de um espelho secundário hiperbólico. Esse é o modelo usado no telescópio espacial **Hubble** que orbita a Terra desde 1990.

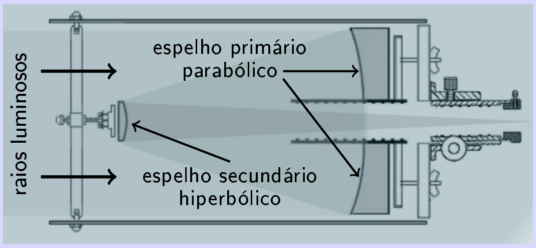


Figura 6.17: Telescópio de Cassegrain

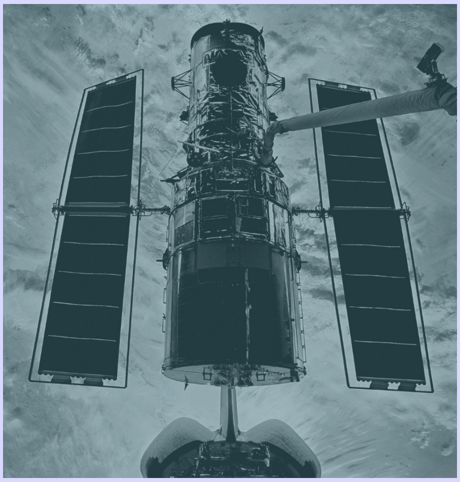

Figura 6.18: Telescópio espacial Hubble

## 6.8 Solução de Exercícios

**Solução do Exercício 10:**

Seja

$$r : \begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

a reta tangente à hipérbole $\mathcal{H}$ no ponto $P = (x_o, y_o) \in \mathcal{H}$. Então,

$$\begin{aligned}
& Q = (x_o + mt, y_o + nt) \in \mathcal{H} \cap r \\
\iff & b^2(x_o + mt)^2 - a^2(y_o + nt)^2 = a^2b^2 \\
\iff & b^2(x_o^2 + 2mx_ot + m^2t^2) - a^2(y_o^2 + 2ny_ot + n^2t^2) = a^2b^2 \\
\iff & (b^2m^2 - a^2n^2)t^2 + (2x_omb^2 - 2y_ona^2)t + b^2x_o^2 - a^2y_o^2 - a^2b^2 = 0 \\
\iff & (b^2m^2 - a^2n^2)t^2 + (2x_omb^2 - 2y_ona^2)t = 0\,, \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

pois $b^2x_o^2 - a^2y_o^2 = a^2b^2$.

Como $b^2m^2 - a^2n^2 = (bm - an)(bm + an)$, temos que $b^2m^2 - a^2n^2 = 0$ $\iff bm - an = 0$ ou $bm + an = 0 \iff \begin{vmatrix} m & n \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ ou $\begin{vmatrix} m & n \\ -a & b \end{vmatrix} = 0 \iff$ $(m, n) \parallel (a, b)$ ou $(m, n) \parallel (-a, b)$.

Além disso, como as assíntotas $r_+ : bx - ay = 0$ e $r_- : bx + ay = 0$ são perpendiculares, respectivamente, aos vetores $(b, -a)$ e $(b, a)$, temos que $(a, b)$ e $(-a, b)$ são vetores paralelos às retas $r_+$ e $r_-$, respectivamente.

Logo, $b^2m^2 - a^2n^2 = 0$ se, e somente se, $r$ é paralela à assíntota $r_+$ ou à assíntota $r_-$ da hipérbole. Então, $b^2m^2 - a^2n^2 \neq 0$, pois, por definição, $r$ não é paralela às assíntotas.

Como $b^2m^2 - a^2n^2 \neq 0$ e $r \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto, temos, por (6.4), que:

$$2x_ob^2m - 2y_oa^2n = 0\,,$$

ou seja, $(m, n) \perp (2x_ob^2, -2y_oa^2)$.

Sendo o vetor $(x_ob^2, -y_oa^2)$ perpendicular à reta $r$, $P = (x_o, y_o) \in r$ e $b^2x_o^2 - a^2y_o^2 = a^2b^2$, a equação de $r$ é dada por:

$$r : b^2x_ox - a^2y_oy = b^2x_o^2 - a^2y_o^2 = a^2b^2.$$

**Solução do Exercício 11:**

A reta $r_m$ é tangente a $\mathcal{H}$ se, e somente se, $r_m \cap \mathcal{H}$ consiste apenas de um ponto e $r_m$ não é paralela às assíntotas.

Como a hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ tem centro na origem, reta focal $=$ eixo$-OX$, $a = 3$ e $b = 2$, suas assíntotas, $y = \pm\frac{2}{3}x$, têm inclinação $\pm\frac{2}{3}$ em relação ao eixo$-OX$. Logo, $m \neq \pm\frac{2}{3}$, ou seja, $9m^2 - 4 \neq 0$.

Além disso, $r_m \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto. Isto é, a equação

$$4x^2 - 9(mx-1)^2 = 36 \iff (4 - 9m^2)x^2 + 18mx - 45 = 0$$

tem apenas uma solução. Assim, o discriminante da equação de grau $2$ $(4 - 9m^2 \neq 0)$ acima é igual a zero, ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta = \;& (18m)^2 + 4 \times 45(4 - 9m^2) = 0 \\ \iff \;& 18m^2 + 10(4 - 9m^2) = 0 \\ \iff \;& -72m^2 + 40 = 0 \\ \iff \;& m^2 = \tfrac{40}{72} \iff m^2 = \tfrac{5}{9} \iff m = \pm\tfrac{\sqrt{5}}{3}\,. \end{aligned}$$

Portanto, $y = \frac{\sqrt{5}}{3}x - 1$ e $y = -\frac{\sqrt{5}}{3}x - 1$ são as retas da família $r_m$ que são tangentes à hipérbole $\mathcal{H}$.

**Solução do Exercício Suplementar 7:**

Seja $\rho < d(F_1, F_2)$ o raio do círculo de centro $F_1$ que passa pelo ponto $A$ (e pelo ponto $B$).

Afirmamos que, se a mediatriz $m$ do segmento $BF_2$ intersecta a reta $s$, então o ponto de interseção pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ de focos $F_1$ e $F_2$, e cujos vértices distam $2a = \rho$ um do outro.

Se a mediatriz $m$ do segmento $BF_2$ intersecta a reta $s$ no ponto $P$, temos $d(P,B) = d(P,F_2)$ e vale uma das seguintes alternativas:

- $B$ está entre $F_1$ e $P$: nesse caso,

$$\begin{aligned} |d(P,F_1) - d(P,F_2)| &= |(d(P,B) + d(B,F_1)) - d(P,F_2)| \\ &= |(d(P,B) + d(B,F_1)) - d(P,B)| = d(B,F_1) = \rho. \end{aligned}$$

- $F_1$ está entre $B$ e $P$: nesse caso,

$$\begin{aligned} |d(P,F_1) - d(P,F_2)| &= |(d(P,B) - d(B,F_1)) - d(P,F_2)| \\ &= |(d(P,B) - d(B,F_1)) - d(P,B)| = |-d(B,F_1)| = \rho. \end{aligned}$$

Note que o ponto $P$ não pode estar entre $F_1$ e $B$, pois , nesse caso, teríamos

$$d(P,B) = d(B,F_1) - d(F_1,P) < d(F_2,F_2) - d(F_1,P) < d(P,F_2).$$

Assim, o ponto $P$ pertence à hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$, cujos vértices distam $2a = \rho$ um do outro.