7

Parábola

Sumário

7.1 Introdução

Figura 7.1: Trajetória parabólica

Como dissemos na introdução do capítulo 5, a origem da teoria das seções cônicas está intimamente ligada ao problema de duplicação do cubo que consiste em, dada a aresta de um cubo, construir, com uso de régua e compasso, a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do primeiro. **Hipócrates de Chios** (470 – 410 a.C.) provou que o problema se reduz ao seguinte: dados segmentos de comprimentos a e b, determinar segmentos de comprimentos x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Segundo Hipócrates, a solução do problema se obtém tomando $b = 2a$ pois, isolando e eliminando y nas identidades, se tem $x^3 = 2a^3$. Na notação atual isso se traduz em resolver duas das equações: $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ ou $xy = 2a^2$. Como veremos adiante, as duas primeiras representam parábolas e a terceira uma hipérbole. **Menaechmus** fez a descoberta dessas curvas por volta de 360 a.C. e mostrou que a interseção delas daria as médias requeridas no problema, ainda que não construídas com régua e compasso.

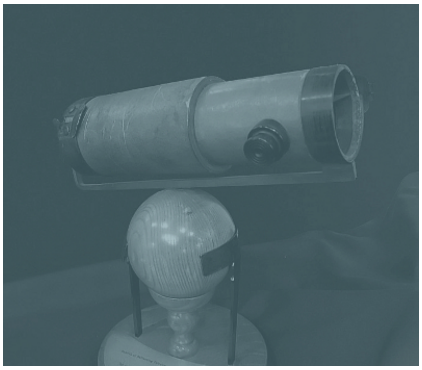

Figura 7.2: Telescópio refletor de Newton

Muitos matemáticos estudaram as propriedades da parábola, como **Arquimedes** (287 – 212 a.C.) que calculou a área delimitada por uma reta e uma parábola, e **Galileu Galilei** (1564 – 1642) que provou que a trajetória de um projétil é uma parábola. A propriedade refletora da parábola, da qual trataremos mais adiante, é a mais explorada nas aplicações práticas, como na modelagem de espelhos para telescópios, antenas parabólicas ou faróis refletores. **Isaac Newton** desenhou e construiu o primeiro telescópio refletor parabólico.

O objetivo deste capítulo é estudar a equação

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

nos casos em que exatamente um dos coeficientes A ou C é nulo.

7.2 Parábola

Definição 1

Sejam $\mathcal{L}$ uma reta e F um ponto do plano não pertencente a $\mathcal{L}$. A **parábola** $\mathcal{P}$ de **foco** F e **diretriz** $\mathcal{L}$ é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a $\mathcal{L}$.

$$\boxed{\mathcal{P} = \{\, P \mid d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \,\}\,.}$$

Terminologia

• Como já dissemos, o ponto F é o **foco** e a reta $\mathcal{L}$ é a **diretriz** da parábola $\mathcal{P}$.

• A **reta focal** ℓ da parábola $\mathcal{P}$ é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz.

• O ponto V da parábola $\mathcal{P}$ que pertence à reta focal é o **vértice** de $\mathcal{P}$.

Em particular, se A é o ponto onde $\mathcal{L}$ intersecta ℓ, então V é o ponto médio do segmento AF.

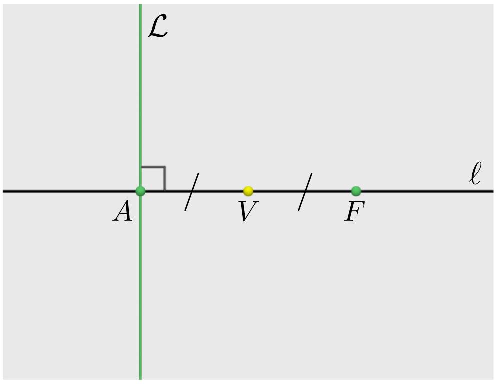

Figura 7.3: Posição do vértice em relação a F e a $\mathcal{L}$

• O número $2p = d(F,\mathcal{L})$ é o **parâmetro** da parábola $\mathcal{P}$. Note que $d(V,F) = d(V,\mathcal{L}) = p$.

Observação 2

Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

De fato, seja $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F, vértice V, diretriz $\mathcal{L}$ e reta focal ℓ (Figura 7.4).

Seja $P \in \mathcal{P}$ e seja P' o ponto simétrico de P em relação à reta ℓ.

O segmento $PP' \perp \ell$ intersecta a reta focal ℓ num ponto Q que é o ponto médio do segmento PP'.

Os triângulos $\triangle PQF$ e $\triangle P'QF$ são congruentes (LAL). Em particular, $d(P,F) = d(P',F)$.

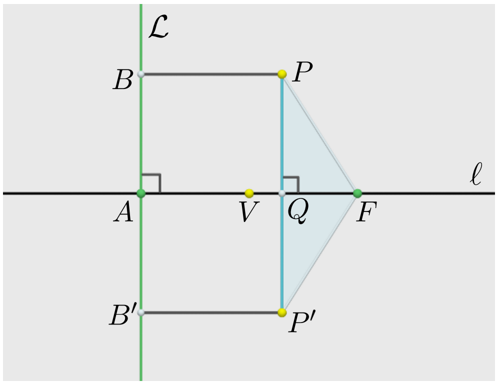

Figura 7.4: Simetria de $\mathcal{P}$ em relação à reta focal

Além disso, $d(P,\mathcal{L}) = d(Q,\mathcal{L}) = d(P',\mathcal{L})$, pois $BPQA$ e $AQP'B'$ são retângulos.

Como $P \in \mathcal{P}$, temos $d(P,F) = d(P,\mathcal{L})$. Portanto, $d(P',F) = d(P',\mathcal{L})$, isto é, $P' \in \mathcal{P}$.

7.3 Formas canônicas da parábola

Vamos obter as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de coordenadas OXY. Começamos com os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados. Depois trataremos dos casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

7.3.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Caso I. O foco F está **à direita** da diretriz $\mathcal{L}$ (Figura 7.5).

Como o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é a origem $V = (0,0)$, temos que o foco é o ponto $F = (p,0)$ e a diretriz é a reta $\mathcal{L} : x = -p$, onde $2p = d(F,\mathcal{L})$.

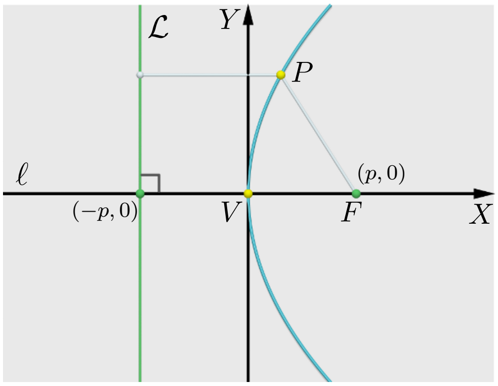

Figura 7.5: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& P = (x,y) \in \mathcal{P} \\
\iff\ & d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \\
\iff\ & \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \\
\iff\ & (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\
\iff\ & x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \\
\iff\ & -2px + y^2 = 2px \\
\iff\ & \boxed{y^2 = 4px}
\end{aligned}
$$

Caso II. O foco F está **à esquerda** da diretriz $\mathcal{L}$ (Figura 7.6).
Neste caso, $F = (-p,0)$ e $\mathcal{L} : x = p$, onde $2p = d(F,\mathcal{L})$.

Então,

$$
\begin{aligned}
& P=(x,y)\in\mathcal{P} \\
\iff\ & d(P,F)=d(P,\mathcal{L}) \\
\iff\ & \sqrt{(x+p)^2+y^2}=|x-p| \\
\iff\ & (x+p)^2+y^2=(x-p)^2 \\
\iff\ & x^2+2px+p^2+y^2 \\
& =x^2-2px+p^2 \\
\iff\ & 2px+y^2=-2px \\
\iff\ & \boxed{y^2=-4px}
\end{aligned}
$$

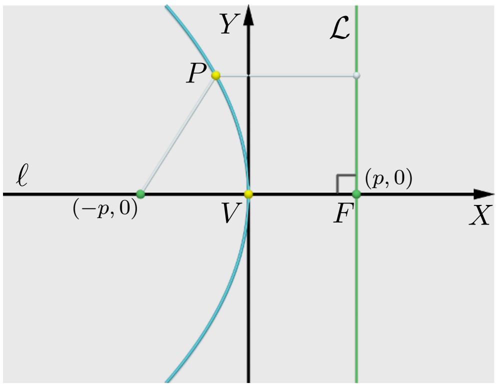

Figura 7.6: Parábola $\mathcal{P}: y^2=-4px$

7.3.2 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Caso I. O foco F está **acima** da diretriz $\mathcal{L}$ (Figura 7.7).

Neste caso, $F=(0,p)$ e $\mathcal{L}: y=-p$, onde $2p=d(F,\mathcal{L})$. Logo,

$$P=(x,y)\in\mathcal{P}\iff\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|\iff\boxed{x^2=4py}$$

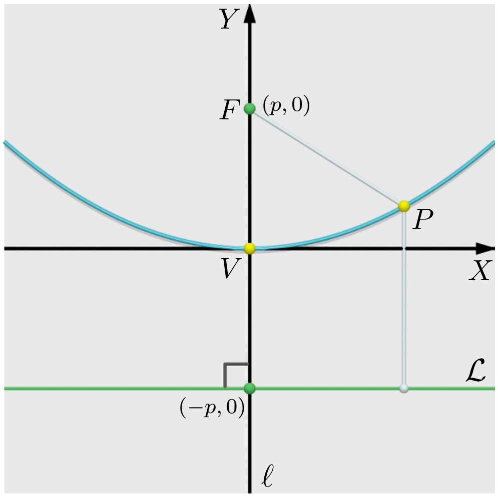

Figura 7.7: Parábola $\mathcal{P}: x^2=4py$

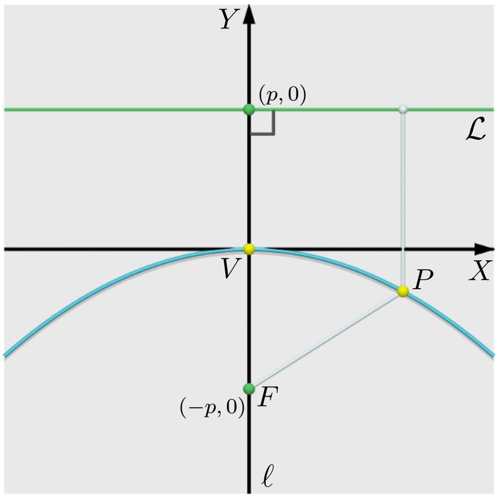

Figura 7.8: Parábola $\mathcal{P}: x^2=-4py$

Caso II. O foco F está **abaixo** da diretriz $\mathcal{L}$ (Figura 7.8).

Neste caso, $F=(0,-p)$ e $\mathcal{L}: y=p$, onde $2p=d(F,\mathcal{L})$. Logo, $P=(x,y)\in\mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2+(y+p)^2}=|y-p|\iff\boxed{x^2=-4py}$$

EXEMPLO 1

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo foco é o ponto:

(a) $F = (3, 0)$.

Solução. Temos $p = d(V, F) = 3$ e reta focal $=$ eixo OX. Como o foco F está à direita do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : x = -3$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : y^2 = 12x$.

(b) $F = (0, -2)$.

Solução. Temos $p = d(V, F) = 2$ e reta focal $=$ eixo OY. Como o foco F está abaixo do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : y = 2$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = -8y$.

EXEMPLO 2

Uma parábola $\mathcal{P}$ passa pelo ponto $(4, -2)$, tem vértice V na origem e o eixo OY como reta focal. Encontre sua equação, seu foco F e a equação da sua diretriz $\mathcal{L}$.

Solução. Temos

$$\mathcal{P} : x^2 = \pm 4py,$$

com $p = d(V, F) > 0$.

Como $(4, -2) \in \mathcal{P}$, vemos que $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ e $16 = 8p$. Logo, $p = 2$, $F = (0, -2)$, $\mathcal{L} : y = 2$ e $\mathcal{P} : x^2 = -8y$ é a equação da parábola.

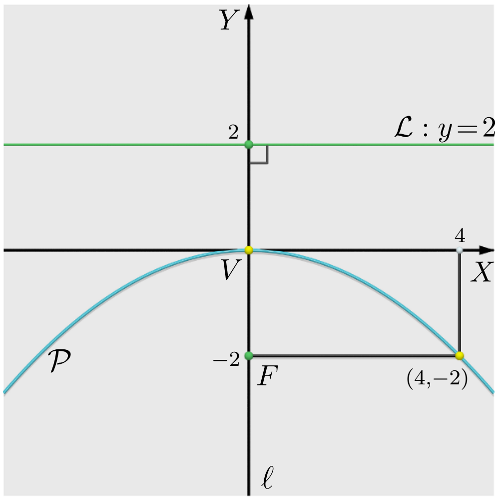

Figura 7.9: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -8y$

EXEMPLO 3

Um círculo $\mathcal{C}$, centrado no ponto $C = (4, -1)$, passa pelo foco F da parábola $\mathcal{P} : x^2 = -16y$. Mostre que a diretriz $\mathcal{L}$ da parábola é tangente ao círculo $\mathcal{C}$.

Solução. A reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é o eixo OY, o vértice é a origem, o foco está abaixo da diretriz e $4p = 16$. Então, $F = (0, -4)$ e $\mathcal{L} : y = 4$.

A equação do círculo é:

$$\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2.$$

Como $F = (0, -4) \in \mathcal{C}$, temos $16 + 9 = r^2$, ou seja, $r = 5$. Então,

$$(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L} \iff (x-4)^2 + (4+1)^2 = 5^2$$
$$\iff (x-4)^2 = 0 \iff x = 4 \iff (x,y) = (4,4).$$

Logo, $\mathcal{L}$ tangencia $\mathcal{C}$ no ponto $(4,4)$ (Figura 7.10).

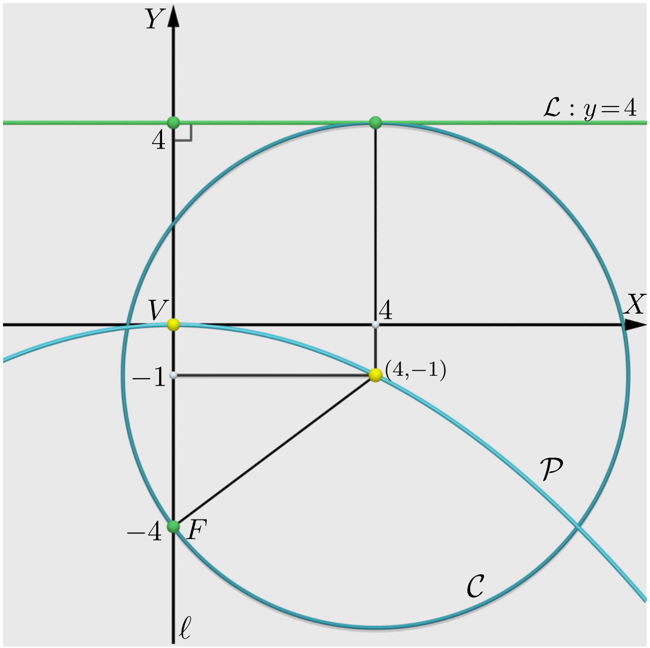

Figura 7.10: Parábola $\mathcal{P}$ e círculo $\mathcal{C}$ tangenciando a diretriz $\mathcal{L}$

7.3.3 Parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo OX

Da mesma forma como fizemos para a elipse e a hipérbole nos capítulos anteriores, para obtermos a forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ de vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo OX, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = V = (x_o, y_o)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ que têm a mesma direção e mesmo sentido dos eixos OX e OY, respectivamente.

Caso I. O foco F está **à direita** da diretriz $\mathcal{L}$.

Sabemos que, no sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, a equação da parábola é $\mathcal{P} : \overline{y}^2 = 4p\overline{x}$; o foco é $\overline{F} = (p, 0)$; o vértice é $\overline{V} = (0,0)$; a diretriz é $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = -p$ e a reta focal é $\overline{\ell} : \overline{y} = 0$.

Como

$$x = \overline{x} + x_o \text{ e } y = \overline{y} + y_o,$$

a equação da parábola $\mathcal{P}$ é:

$$\boxed{\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)}$$

e seus elementos são:

- **foco:** $F = (x_o + p, y_o)$;
- **vértice:** $V = (x_o, y_o)$;
- **diretriz:** $\mathcal{L} : x - x_o = -p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_o - p$;
- **reta focal:** $\ell : y - y_o = 0$, ou seja, $\ell : y = y_o$.

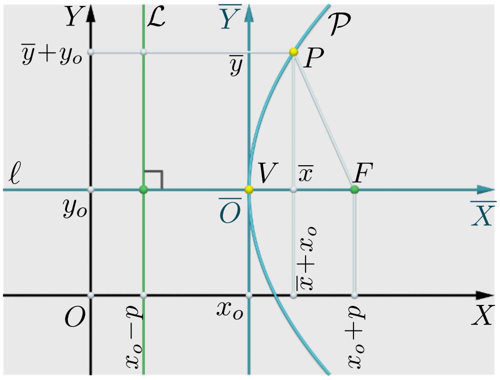

Figura 7.11: $\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)$

Caso II. O foco F está **à esquerda** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, a equação da parábola no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é $\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$, e seus elementos são: foco $\overline{F} = (-p, 0)$; vértice $\overline{V} = (0, 0)$; diretriz $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = p$ e reta focal $\overline{\ell} : \overline{y} = 0$. Passando para as coordenadas x, y do sistema OXY, a equação da parábola fica na forma:

$$\boxed{\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = -4p(x - x_o)}$$

e seus elementos são:

- **foco:** $F = (x_o - p, y_o)$;
- **vértice:** $V = (x_o, y_o)$;
- **diretriz:** $\mathcal{L} : x - x_o = p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_o + p$;
- **reta focal:** $\ell : y - y_o = 0$, ou seja, $\ell : y = y_o$.

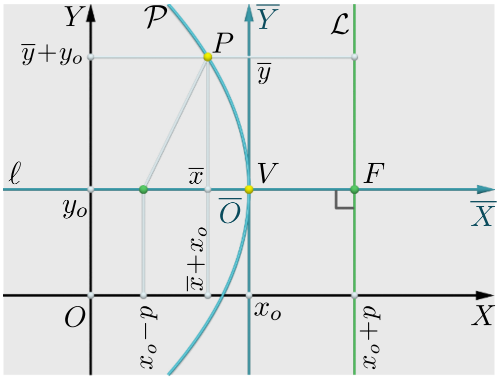

Figura 7.12: $\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = -4p(x - x_o)$

7.3.4 Parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo OY

Como no caso anterior, considerando o sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = V = (x_o, y_o)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ que têm a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos OX e OY, respectivamente, podemos obter as equações e os elementos das parábolas com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo OY.

Caso I. O foco F está **acima** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, o foco é $F = (x_o, y_o + p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_o - p$; a reta focal é $\ell : x = x_o$ e a equação da parábola é:

$$\boxed{(x - x_o)^2 = 4p(y - y_o)}$$

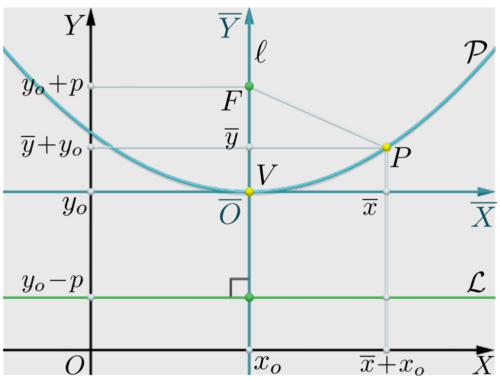

Figura 7.13: $\mathcal{P} : (x - x_o)^2 = 4p(y - y_o)$

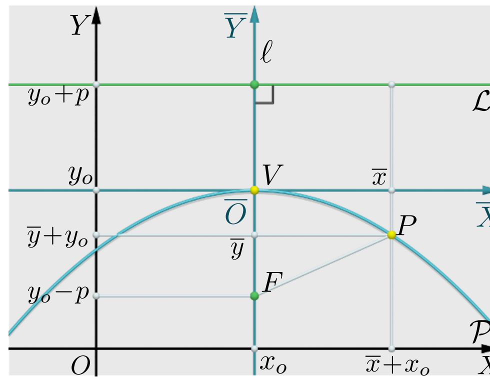

Figura 7.14: $\mathcal{P} : (x - x_o)^2 = -4p(y - y_o)$

Caso II. O foco F está **abaixo** da diretriz $\mathcal{L}$ (Figura 7.14).

Neste caso, o foco é $F = (x_o, y_o - p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_o + p$; a reta focal é $\ell : x = x_o$ e a equação da parábola é:

$$\boxed{(x - x_o)^2 = -4p(y - y_o)}$$

Exemplo 4

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3, 4)$ e foco $F = (3, 2)$. Encontre também a equação de sua diretriz.

Solução. Como $V = (3, 4)$ e $F = (3, 2)$, $\ell : x = 3$ é a reta focal e F está abaixo de V, ou seja, abaixo da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma:

$\mathcal{P} : (x - 3)^2 = -4p(y - 4)$.

Sendo $p = d(V, F) = 2$, temos que $\mathcal{L} : y = 6$ é a diretriz e $\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$ é a equação da parábola.

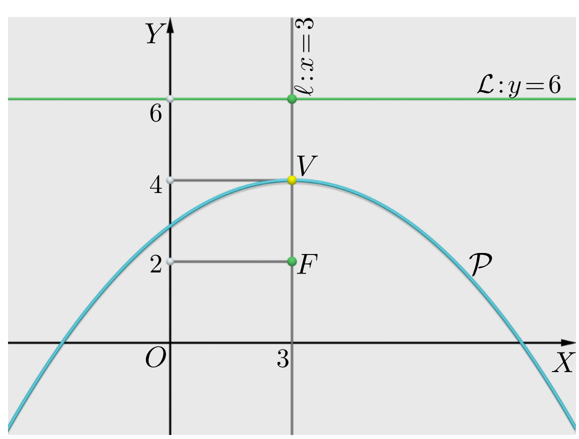

Figura 7.15: $\mathcal{P} : (x - 3)^2 = -8(y - 4)$

EXEMPLO 5 Encontre a equação da parábola $\mathcal{P}$ com reta focal paralela ao eixo OX, que passa pelos pontos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0,5)$ e $(-6,-7)$.

Solução. Como a reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é paralela ao eixo OX, sua equação deve ser da forma $\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = \pm 4p(x - x_o)$, que se escreve também na forma:

$$\mathcal{P} : y^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Substituindo as coordenadas dos pontos dados nessa equação, temos:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D - E + F &= -1 \\ 5E + F &= -25 \\ -6D - 7E + F &= -49\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $D = 8$, $E = -2$ e $F = -15$.

Portanto, a equação da parábola é

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0\,,$$

isto é,

$$y^2 - 2y + 1 = 15 - 8x + 1\,,$$

ou, ainda,

$$\mathcal{P} : (y - 1)^2 = -8(x - 2).$$

Assim, a parábola $\mathcal{P}$ tem vértice $V = (2,1)$ e reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo OX. Como $4p = 8$, isto é, $p = 2$, e o foco F está à esquerda da diretriz, segue que $F = (0,1)$ e $\mathcal{L} : x = 4$ é a diretriz de $\mathcal{P}$.

7.4 A equação geral do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Consideremos a equação canônica da parábola de vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo OX:

$$(y - y_o)^2 = \pm 4p(x - x_o)\,.$$

Desenvolvendo e agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_o y + y_o^2 \pm 4px_o = 0\,.$$

Esta equação é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 4p$, $E = -2y_o$ e $F = y_o^2 \pm 4px_o$.

Analogamente, desenvolvendo a equação da parábola de vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo OY

$$(x - x_o)^2 = \pm 4p(y - y_o)\,,$$

obtemos a equação

$$x^2 - 2x_o x \mp 4py + x_o^2 \pm 4py_o = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_o$, $E = \mp 4p$ e $F = x_o^2 \pm 4py_o$.

No primeiro caso, $A = 0$, $B = 0$ e $C \neq 0$ e, no segundo caso, $A \neq 0$, $B = 0$ e $C = 0$. Portanto, em qualquer caso, $B = 0$ e $AC = 0$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 3

Seja a equação do segundo grau com $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{7.1}$$

Se $A = 0$ e $C \neq 0$, esta equação representa um dos seguintes conjuntos:

- **uma parábola** cuja reta focal é paralela ao eixo OX, se $D \neq 0$;
- **um par de retas paralelas** ao eixo OX, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF > 0$;
- **uma reta** paralela ao eixo OX, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF = 0$;
- **o conjunto vazio**, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF < 0$.

O mesmo vale para o caso em que $C = 0$ e $A \neq 0$, trocando "paralelo ao eixo OX" por "paralelo ao eixo OY".

Demonstração

Se $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$, então a equação (7.1) se escreve na forma:

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0\,.$$

Como $D \neq 0$, podemos escrever a equação na forma

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right)\,,$$

que é a equação de uma parábola com reta focal paralela ao eixo OX e vértice

$$V = \left(-\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right).$$

Se $D = 0$, a equação $Cy^2 + Ey + F = 0$ representa:

- duas retas paralelas ao eixo OX,

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \quad \text{e} \quad y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C},$$

se $E^2 - 4CF > 0$;

- uma reta paralela ao eixo OX,

$$y = -\frac{E}{2C},$$

se $E^2 - 4CF = 0$;

- o conjunto vazio, se $E^2 - 4CF < 0$.

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, com $AC = 0$, representa duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio são chamados **casos degenerados da parábola**.

Exemplo 6

Verifique se as equações abaixo representam uma parábola ou uma parábola degenerada. Caso seja uma parábola, determine seus elementos principais .

(a) $x^2 - 8y = 0$.

Solução. Como $x^2 = 8y$, a equação representa uma parábola com:

- vértice: $V = (0, 0)$;
- reta focal = eixo $OY : x = 0$;
- parâmetro: $2p = 4$ ($\Longrightarrow p = 2$);
- foco: $F = (0, 2)$, acima da diretriz;
- diretriz: $\mathcal{L} : y = -2$.

(b) $2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0$.

Solução. Completando o quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} 2(y^2 + 4y) = -5x + 7 &\iff 2(y^2 + 4y + 4) = -5x + 7 + 8 \\ &\iff 2(y + 2)^2 = -5x + 15 \\ &\iff 2(y + 2)^2 = -5(x - 3) \\ &\iff (y + 2)^2 = -\frac{5}{2}(x - 3), \end{aligned}$$

que representa uma parábola com:

- vértice: $V = (3, -2)$;
- reta focal: $\ell : y = -2$, paralela ao eixo OX;
- parâmetro: $2p = \frac{5}{4}$ $(\Longrightarrow p = \frac{5}{8})$;
- foco: $F = \left(3 - \frac{5}{8}, -2\right) = \left(\frac{19}{8}, -2\right)$, à esquerda da diretriz;
- diretriz: $\mathcal{L} : x = 3 + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$.

(c) $3y^2 + 7y - 6 = 0$.

Solução. Como $A = B = D = 0$ e seu discriminante é $49 + 4 \times 3 \times 6 = 121 > 0$, a equação (c) representa o par de retas $y = \frac{-7 \pm 11}{6}$, ou seja, $y = -3$ e $y = \frac{2}{3}$, paralelas ao eixo OX.

(d) $9x^2 + 42x + 49 = 0$

Solução. Como $B = C = E = 0$ e seu discriminante é $42^2 - 4 \times 9 \times 49 = 1764 - 1764 = 0$, a equação (d) representa a reta $x = -\frac{42}{18} = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$, paralela ao eixo OY.

(e) $3y^2 - 2y + 1 = 0$

Solução. Como $A = B = D = 0$ e seu discriminante é $4 - 12 = -8 < 0$, a equação (e) representa o conjunto vazio.

O Exemplo 7 a seguir, mostra como determinar a equação de uma parábola usando sua definição e conhecendo alguns de seus elementos.

Exemplo 7

Sejam $V = (-2, -1)$ o vértice de uma parábola $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L} : x + 2y = 1$ a equação de sua diretriz. Encontre a equação da parábola e seu foco.

Solução. A reta focal ℓ é a reta perpendicular à diretriz que passa pelo vértice.

Como $(1, 2) \perp \mathcal{L}$, temos $(2, -1) \perp \ell$ e, portanto, $\ell : 2x - y = -4 + 1 = -3$. Seja $A = (x, y)$ o ponto de interseção das retas ℓ e $\mathcal{L}$. Então, as coordenadas x e y satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x - 4y = -2\,. \end{cases}$$

Logo, $-5y = -5$, isto é, $y = 1$ e $x = 1 - 2y = -1$.

Sendo V o ponto médio do segmento AF, temos $F = 2V - A$, ou seja,

$$F = 2(-2, -1) - (-1, 1) = (-3, -3)\,.$$

Então, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, isto é, se, e só se,

$$
\begin{aligned}
& \left(\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}\right)^2 = \left(\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
\iff\ & (x+3)^2+(y+3)^2 = \frac{(x+2y-1)^2}{5} \\
\iff\ & x^2+6x+9+y^2+6y+9 = \frac{x^2+4xy+4y^2-2x-4y+1}{5} \\
\iff\ & 5x^2+30x+5y^2+30y+90 = x^2+4xy+4y^2-2x-4y+1 \\
\iff\ & \boxed{\mathcal{P} : 4x^2-4xy+y^2+32x+34y+89=0\,,}
\end{aligned}
$$

que é a equação da parábola (Figura 7.16).

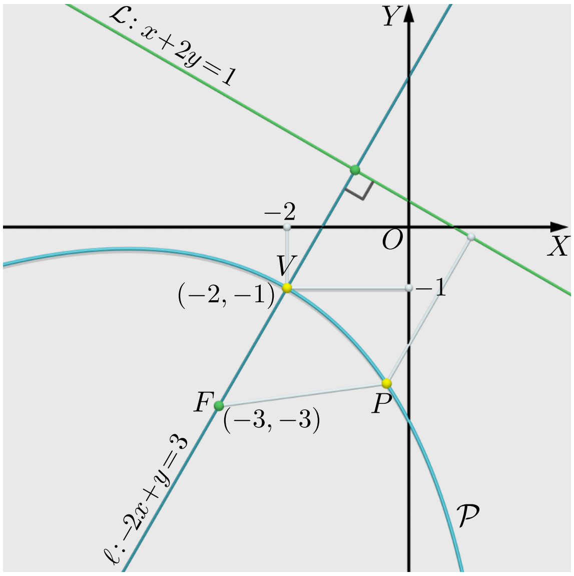

Figura 7.16: $\mathcal{P} : 4x^2-4xy+y^2+32x+34y+89=0$

Exemplo 8

A **reta tangente** a uma parábola $\mathcal{P}$ num ponto $P \in \mathcal{P}$ é a única reta, não paralela à reta focal ℓ, que intersecta a parábola apenas no ponto P.

Mostre que a reta tangente à parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$, $p \neq 0$, no ponto $P = (x_o, y_o) \in \mathcal{P}$ é a reta $r : y_o x - 2x_o y = -y_o x_o$, se $x_o \neq 0$, e é a reta $r : x = 0$, se $x_o = 0$.

Solução. Seja $r : \begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, a reta tangente à parábola $\mathcal{P}$ no ponto $P = (x_o, y_o)$.

Como r não é paralela à reta focal (eixo OX), temos que $n \neq 0$. Além disso, $r \cap \mathcal{P}$ consiste apenas do ponto P, ou seja, a equação do segundo grau

$$\begin{aligned} & (y_o + nt)^2 = 4p(x_o + mt) \\ \iff & n^2t^2 + 2y_ont + y_o^2 = 4px_o + 4pmt \\ \iff & n^2t^2 + (2y_on - 4pm)t + (y_o^2 - 4px_o) = 0 \\ \iff & n^2t^2 + (2y_on - 4pm)t = 0 \\ \iff & t\,[n^2t + (2y_on - 4pm)] = 0\,, \end{aligned}$$

possui apenas a solução $t = 0$, que corresponde a $P = (x_o, y_o)$.

Portanto, $2y_on - 4pm = 0$, ou seja, $(m, n) \perp (2p, -y_o)$.

- Se $x_o = 0$, então $y_o = 0$, pois $y_o^2 = 4px_o$.

Neste caso, $(m, n) \perp (2p, 0)$, isto é, a reta r passa pela origem e é perpendicular ao eixo OX. Logo, $r : x = 0$.

- Se $x_o \neq 0$, temos $y_o \neq 0$ e $2p = \dfrac{y_o^2}{2x_o}$.

Neste caso, $(m, n) \perp \left(\dfrac{y_o^2}{2x_o}, -y_o\right)$, ou seja, $(m, n) \perp (y_o, -2x_o)$.

Logo, como $P = (x_o, y_o) \in r$, temos:

$$r : y_ox - 2x_oy = -x_oy_o\,.$$

Exemplo 9

(Propriedade refletora da parábola) Sejam as seguintes retas passando por um ponto P da parábola $\mathcal{P}$:

- r, paralela à reta focal ℓ,
- η, normal a $\mathcal{P}$ (isto é, perpendicular à reta tangente a $\mathcal{P}$ no ponto P),
- s, que passa pelo foco F de $\mathcal{P}$.

Mostre que os ângulos entre r e η e entre s e η são iguais.

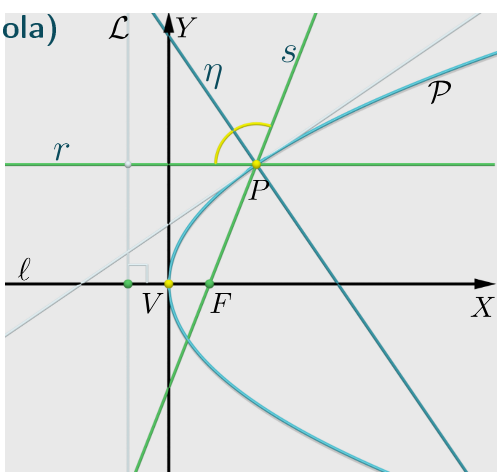

Figura 7.17: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$

Solução. Suponhamos, sem perda de generalidade (escolhendo os eixos coordenados de forma apropriada), que $\mathcal{P} : y^2 = 4px$, com $p > 0$.

Temos que: $F = (p, 0)$ é o foco de $\mathcal{P}$ e $\overrightarrow{PF} = (p - x_o, -y_o)$ é um vetor paralelo à reta s; o vetor $(1, 0)$ é paralelo à reta r e, pelo exemplo anterior, $\overrightarrow{n} = (y_o, -2x_o)$ é um vetor paralelo à reta η, normal a $\mathcal{P}$ no ponto $P = (x_o, y_o)$.

Sejam θ_1 o ângulo entre $\overrightarrow{PF}$ e $\overrightarrow{n}$, e θ_2 o ângulo entre $\overrightarrow{n}$ e o vetor $(1, 0)$. Então,

$$\cos\theta_1 = \frac{x_o y_o + p y_o}{\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}\,\sqrt{(p - x_o)^2 + y_o^2}} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta_2 = \frac{y_o}{\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}}\,.$$

Como $x_o + p > 0$ e

$$\begin{aligned}(p - x_o)^2 + y_o^2 &= p^2 - 2x_o p + x_o^2 + y_o^2\\ &= p^2 - 2x_o p + x_o^2 + 4px_o\\ &= p^2 + 2x_o p + x_o^2\\ &= (x_o + p)^2\,,\end{aligned}$$

temos que $x_o + p = \sqrt{(p - x_o)^2 + y_o^2}$.

Logo,

$$\begin{aligned}\cos\theta_1 &= \frac{x_o y_o + p y_o}{\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}\,\sqrt{(p - x_o)^2 + y_o^2}}\\ &= \frac{(x_o + p) y_o}{(x_o + p)\,\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}} = \frac{y_o}{\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}} = \cos\theta_2\,.\end{aligned}$$

Portanto, $\theta_1 = \theta_2$.

Exemplo 10

Ache a equação da reta tangente à parábola $\mathcal{P} : x^2 = y + 1$ paralela à reta $r : 2x - y = 0$, e o ponto de tangência.

Solução. Seja $r_m : 2x - y = m$ uma reta paralela à reta r.

Como r_m não é paralela ao eixo OY (reta focal), segue que r_m é tangente a $\mathcal{P}$ se, e só se, $r_m \cap \mathcal{P}$ consiste de um único ponto, ou seja, a equação $x^2 = 2x - m + 1$ possui uma única solução. Logo, o discriminante da equação $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ é igual a zero, ou seja, $\Delta = 4 - 4(m - 1) = 0$.

Então, $m = 2$ e $2x - y = 2$ é a reta tangente a $\mathcal{P}$ paralela à reta $2x - y = 0$.

Como o ponto de tangência $P = (x, y)$ é o ponto de interseção da reta $2x - y = 2$ com a parábola $x^2 = y + 1$, temos $x^2 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$, ou seja, $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Portanto, $x = 1$ e $y = 2x - 2 = 0$, isto é, $(1, 0)$ é o ponto onde a reta $2x - y = 2$ tangencia a parábola $\mathcal{P} : x^2 = y + 1$.

7.5 Exercícios

1. Determine a equação da parábola e seus principais elementos, sabendo que ela tem vértice na origem,

   (a) passa pelo ponto $(9, 6)$ e tem reta focal paralela ao eixo OX;

   (b) passa pelo ponto $(4, -8)$ e tem reta focal paralela ao eixo OY;

   (c) e foco no ponto $(0, -3)$;

   (d) e diretriz $\mathcal{L} : x - 7 = 0$.

2. O **raio focal** de um ponto P da parábola $\mathcal{P}$ é a distância de P ao foco F de $\mathcal{P}$.

   (a) Mostre que o raio focal do ponto $P = (p_1, p_2)$ da parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$ é $p_1 + p$.

   (b) Calcule o raio focal do ponto M de ordenada 6 da parábola $\mathcal{P} : y^2 = 12x$.

3. Encontre as equações das parábolas cuja reta focal é paralela a um dos eixos coordenados, têm vértice no ponto $V = (2, 1)$ e parâmetro $2p = 3$. Mostre que o outro ponto onde as parábolas se intersectam pertence à reta $x - y - 1 = 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, uma função quadrática de uma variável, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Mostre que o gráfico de f, $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = ax^2 + bx + c \text{ e } x \in \mathbb{R}\}$, é uma parábola e determine seus principais elementos.

5. Ache os elementos principais das parábolas

   (a) $x^2 = 6y + 2$;

   (b) $y^2 = 4 - 6x$;

   (c) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$;

   (d) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

6. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ que tem:

   (a) foco $F = (7, 2)$ e diretriz $\mathcal{L} : x - 5 = 0$.

(b) vértice $V = (6, -3)$ e diretriz $\mathcal{L} : 3x - 5y + 1 = 0$;

(c) vértice $V = (2, 3)$, reta focal paralela ao eixo OY e passa pelo ponto $P = (4, 5)$;

(d) reta focal paralela ao eixo OX e passa pelos pontos $(-2, 1)$, $(1, 2)$ e $(-1, 3)$.

7. Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de cônicas:

$$\mathcal{C}_\lambda : x^2 + (\lambda - 2)y^2 + 2\lambda x + 2(\lambda - 2)y + 3\lambda - 3 = 0,$$

encontrando, nos casos não degenerados, a equação da reta focal de $\mathcal{C}_\lambda$.

8. Seja a parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4x$. Determine o valor do coeficiente angular k da reta $r_k : y - xk = 2$ de modo que:

(a) $\mathcal{P} \cap r_k$ tenha dois pontos distintos;

(b) $\mathcal{P} \cap r_k$ tenha exatamente um ponto; nesse caso r_k é tangente a $\mathcal{P}$;

(c) $\mathcal{P} \cap r_k = \varnothing$.

9. Determine a reta tangente à parábola

(a) $y^2 = 8x$ que é paralela à reta $2x + 2y = 3$, indicando o ponto de tangência;

(b) $x^2 = 16x$ que é perpendicular à reta $2x + 4y = 7$, indicando o ponto de tangência.

10. Seja $\mathcal{P}$ uma parábola de diretriz $\mathcal{L}$ e vértice V. Prove que $d(P, \mathcal{L}) \leq p$, para todo $P \in \mathcal{P}$, e que a igualdade ocorre se, e só se, $P = V$, onde $2p$ é o parâmetro de $\mathcal{P}$. Isto é, o vértice V é o ponto da parábola mais próximo da diretriz $\mathcal{L}$

7.6 Exercícios Suplementares

1. O **latus rectum** de uma parábola $\mathcal{P}$ é o comprimento da corda de $\mathcal{P}$ perpendicular à reta focal que passa pelo foco da parábola. Calcule o latus rectum das parábolas do Exercício 1.

2. Seja $\mathcal{C}$ um arco parabólico que tem 18 metros de altura e 24 metros de base. Encontre a altura de um ponto de $\mathcal{C}$ situado a 8 metros da reta focal de $\mathcal{C}$.

3. Determine a equação da parábola cujo latus rectum (corda perpendicular à reta focal que passa pelo foco) é o segmento AB, onde $A = (3, 5)$ e $B = (3, -3)$.

4. Encontre a equação da parábola de vértice sobre a reta $7x + 3y - 4 = 0$ e de reta focal paralela ao eixo OX, que passa pelos pontos $(3, -5)$ e $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

5. Encontre o ponto da parábola $\mathcal{P} : y^2 = 64x$ mais próximo da reta $4x+3y = 14$.

6. Obtenha as retas tangentes à parábola $\mathcal{P} : y^2 = 36x$ que passam pelo ponto $(-2, 1)$. Determine também a reta que contém a corda que passa pelos pontos de tangência.

7. **(a)** Determine, caso existam, os pontos de interseção da parábola $\mathcal{P} : y^2 = 24x$ com a elipse $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{225} = 1$.

   (b) O complementar de uma parábola no plano consiste de duas regiões: a **região focal**, que contém o foco, e a **região não focal**, que contém a diretriz. Faça um esboço da interseção da região focal da parábola $\mathcal{P}$ com a região focal da elipse $\mathcal{E}$ do item anterior.

8. Mostre que se duas parábolas, com retas focais perpendiculares entre si, se intersectam em quatro pontos, então estes pontos pertencem a um círculo.

9. Prove que duas parábolas que têm a mesma reta focal e o mesmo foco localizado entre os vértices das parábolas, se intersectam perpendicularmente (isto é, as tangentes nos pontos de interseção são perpendiculares).

10. Vamos descrever um procedimento para efetuar a construção da parábola usando o GeoGebra:

- numa janela do GeoGebra, trace a reta a por dois pontos A e B (diretriz da parábola).
- escolha um ponto C, para ser o foco da parábola, fora da reta a;
- escolha um ponto D na reta a;
- trace a reta mediatriz b do segmento CD;
- trace a reta c perpendicular à diretriz a que passa pelo ponto D;
- determine a interseção E da mediatriz b com a reta c;
- habilite o rastro no ponto E;
- descreva a parábola de foco C e diretriz a, movendo o ponto D na diretriz.

◇