8

Equação Geral do Segundo Grau em $\mathbb{R}^2$

Sumário

8.1 Introdução

Dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, o conjunto

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ f(x, y) = c\}$$

é a **linha de nível** c da função f, onde $c \in \mathbb{R}$.

Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função linear $f(x, y) = ax+by$, onde $(a, b) \neq (0, 0)$, as linhas de nível de f são as retas do plano perpendiculares ao vetor $\overrightarrow{v} = (a, b)$, pois

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ ax + by = c\}, \ \text{para todo } c \in \mathbb{R}.$$

Provaremos, neste capítulo, que as curvas de nível de uma **função quadrática** de duas variáveis, ou seja, de uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

onde $A \neq 0$, $B \neq 0$ ou $C \neq 0$, são as cônicas ou as cônicas degeneradas.

Para isso, baseado no estudo das linhas de nível de f, feito nos três capítulos anteriores, quando $B = 0$, basta mostrar que existe um sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido por uma rotação positiva dos eixos OX e OY, para o qual a função f, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, se escreve na forma

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + F.$$

No caso particular em que se tem $D = E = F = 0$, a função quadrática

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

é um polinômio homogêneo de segundo grau (todos os termos têm grau 2). Estes polinômios são chamados **formas quadráticas** de duas variáveis.

8.2 Autovalores e autovetores de uma matriz real 2×2

Sejam $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ uma matriz real do tipo 2×2 e $\overrightarrow{u} = (x, y)$ um vetor em $\mathbb{R}^2$. Definimos $\mathcal{A}\overrightarrow{u}$ como sendo o vetor $(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$, ou seja,

$$\mathcal{A}\overrightarrow{u} = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)\,.$$

Observação 1

A operação definida acima satisfaz à seguinte propriedade:

$$\mathcal{A}(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda\mathcal{A}\overrightarrow{u} + \mu\mathcal{A}\overrightarrow{v}\,,$$

para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^2$ e números reais λ e μ.

A prova desta propriedade pode ser feita como exercício.

Um número real λ é um **autovalor da matriz $\mathcal{A}$** se existir um vetor $\overrightarrow{u}$ não nulo tal que $\mathcal{A}\overrightarrow{u} = \lambda u$.

Seja λ um autovalor da matriz $\mathcal{A}$. Um vetor $\overrightarrow{u} = (x, y)$ é um **autovetor de $\mathcal{A}$ relativo ao autovalor λ** se $\mathcal{A}\overrightarrow{u} = \lambda u$, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda - a_{11})x - a_{12}y = 0 \\ -a_{21}x + (\lambda - a_{22})y = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

Observação 2

O vetor nulo é um autovetor relativo a qualquer autovalor, mas um número real só é um autovalor se ele possuir um autovetor não nulo.

Observação 3

Se $\overrightarrow{u}$ é um autovetor relativo ao autovalor λ da matriz $\mathcal{A}$, então $\mu\overrightarrow{u}$ é um autovetor relativo ao autovalor λ, para todo $\mu \in \mathbb{R}$. E se $\overrightarrow{v}$ é outro autovetor relativo ao autovalor λ, então $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é um autovetor relativo ao autovalor λ.

Com efeito, como $\mathcal{A}(\mu\overrightarrow{u}) = \mu\mathcal{A}\overrightarrow{u}$ e $\mathcal{A}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \mathcal{A}\overrightarrow{u} + \mathcal{A}\overrightarrow{v}$ (pela Observação 1), temos que:

- $\mathcal{A}(\mu\overrightarrow{u}) = \mu\mathcal{A}(\overrightarrow{u}) = \mu(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda(\mu\overrightarrow{u})$,
- $\mathcal{A}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \mathcal{A}(\overrightarrow{u}) + \mathcal{A}(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.

Na linguagem de Álgebra Linear, isso significa que o conjunto

$$\{\overrightarrow{u}\,;\, \mathcal{A}\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u}\}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Então, um real λ é um autovalor da matriz $\mathcal{A}$ se, e somente se, o sistema 8.1 tem uma solução não trivial (x, y) ($(x, y) \neq (0, 0)$). Mas, pela Proposição 29 do Capítulo 1, o sistema tem uma solução não trivial se, e só se,

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Com efeito, $(\lambda - a_{11}, -a_{21})x + (-a_{12}, \lambda - a_{22})y = 0$ possui uma solução $(x, y) \neq (0, 0)$ se, e só se, um dos vetores $(\lambda - a_{11}, -a_{21})$ e $(-a_{12}, \lambda - a_{22})$ é múltiplo do outro.

O polinômio $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21},$$

é denominado **polinômio característico da matriz $\mathcal{A}$**.

Obtemos, assim, o seguinte resultado.

Proposição 4 Os autovalores de uma matriz $\mathcal{A}$ são as raízes reais do polinômio característico da matriz $\mathcal{A}$.

Exemplo 1 Determine, caso existam, os autovalores e os autovetores correspondente da matriz:

(a) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solução. O polinômio característico da matriz $\mathcal{A}$ é

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ 3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 4)^2 + 6 = \lambda^2 - 8\lambda + 22.$$

Como o discriminante $\Delta = 64 - 88 = -24$ da equação $p(\lambda) = 0$ é negativo, a equação não possui raízes reais. Logo, a matriz $\mathcal{A}$ não tem autovalores.

(b) $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solução. Seja

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -6 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

o polinômio característico da matriz $\mathcal{B}$. Sendo

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 16}}{2} = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{9 + 16}}{2} = -1$$

as raízes (reais) da equação $p(\lambda) = 0$, temos que $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz $\mathcal{B}$.

Os autovetores $\overrightarrow{u_1} = (x, y)$ relativos ao autovalor $\lambda_1 = 4$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 1)x - 6y = 0 \\ -x + (\lambda_1 - 2)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = 2y.$$

Logo, todo autovetor relativo ao autovalor $\lambda_1 = 4$ é da forma $\overrightarrow{u_1} = y(2,1)$, $y \in \mathbb{R}$. Assim, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ são os autovetores unitários relativos ao autovalor $\lambda_1 = 4$.

E os autovetores $\overrightarrow{u_2} = (x,y)$ relativos ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_2 - 1)x - 6y = 0 \\ -x + (\lambda_2 - 2)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 6y = 0 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = -3y,$$

isto é, $\overrightarrow{u_2} = (-3y, y) = y(-3,1)$, $y \in \mathbb{R}$. Portanto, $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ e $\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ são os autovetores unitários relativos ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

8.3 Rotação dos Eixos Coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Dado $\theta \in [0, 2\pi)$, seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema obtido girando os eixos OX e OY do ângulo θ no sentido positivo (que vai de OX para $O\overline{X}$). Então,

$$\overrightarrow{v_1} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v_2} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

são os vetores unitários na direção e no sentido dos eixos $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$, respectivamente.

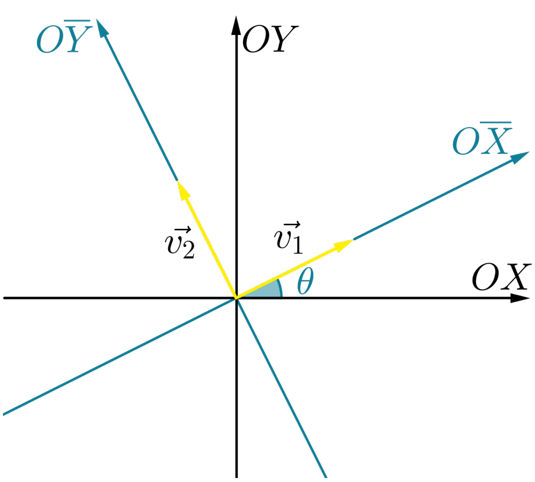

Figura 8.1: Ângulo θ entre os eixos OX e $O\overline{X}$.

Considere um ponto P do plano. Como os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são ortonormais ($\Longrightarrow \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não são múltiplos), existem números reais $\overline{x}$ e $\overline{y}$ de modo que

$$\overrightarrow{OP} = \overline{x}\overrightarrow{v_1} + \overline{y}\overrightarrow{v_2}.$$

Logo, $(\overline{x}, y)$ são as coordenadas do ponto P com respeito ao sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$, pois

$$\text{Proj}_{\overrightarrow{v_1}} \overrightarrow{OP} = \overline{x}\overrightarrow{v_1} \quad \text{e} \quad \text{Proj}_{\overrightarrow{v_2}} \overrightarrow{OP} = \overline{y}\overrightarrow{v_2}.$$

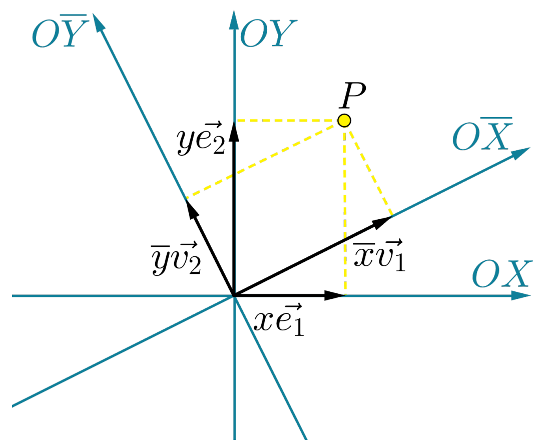

Figura 8.2: $P = (x, y)_{OXY} = (\overline{x}, \overline{y})_{O\overline{X}\,\overline{Y}}$.

Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P em relação ao sistema OXY, isto é, $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$, onde $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ são os vetores unitários na mesma direção e no mesmo sentido dos eixos OX e OY, respectivamente.

Então,

$$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = \overline{x}\overrightarrow{v_1} + \overline{y}\overrightarrow{v_2} \tag{8.2}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \overline{x} < \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_1} > + \overline{y} < \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{e_1} > \\ y = \overline{x} < \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_2} > + \overline{y} < \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{e_2} > \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} \overline{x} = x < \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v_1} > + y < \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v_1} > \\ \overline{y} = x < \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v_2} > + y < \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v_2} > \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \overline{x}\cos\theta - \overline{y}\,\text{sen}\,\theta \\ y = \overline{x}\,\text{sen}\,\theta + \overline{y}\cos\theta \end{cases} \tag{8.3}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} \overline{x} = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta \\ \overline{y} = -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{8.4}$$

$$\iff \quad (x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (\overline{x},\overline{y}) \tag{8.5}$$

$$\text{e} \quad (\overline{x},\overline{y}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (x,y). \tag{8.6}$$

A matriz $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é a **matriz de passagem** das coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$ para as coordenadas (x,y) e, por sua vez, $\mathcal{B}^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é a **matriz de passagem** das coordenadas (x,y) para as coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$, onde $\mathcal{B}^t$ é a **transposta** da matriz $\mathcal{B}$, ou seja, as colunas da matriz $\mathcal{B}^t$ são as linhas da matriz $\mathcal{B}$.

Observe que a primeira e a segunda colunas da matriz $\mathcal{B}$ são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ no sistema OXY, respectivamente, e a primeira e a segunda colunas da matriz $\mathcal{B}^t$ são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ no sistema $O\overline{XY}$, respectivamente.

Com efeito, pela identidade 8.2 e pelas equações 8.3 e 8.4, segue que

$$\overrightarrow{v_1} = \cos\theta\vec{e_1} + \operatorname{sen}\theta\vec{e_2} \quad , \quad \overrightarrow{v_2} = -\operatorname{sen}\theta\vec{e_1} + \cos\theta\vec{e_2} \tag{8.7}$$

$$\overrightarrow{e_1} = \cos\theta\vec{v_1} - \operatorname{sen}\theta\vec{v_2} \quad , \quad \overrightarrow{e_2} = \operatorname{sen}\theta\vec{v_1} + \cos\theta\vec{v_2} \tag{8.8}$$

Temos também que $\mathcal{B}^t\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{B}^t = \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade do tipo 2×2. Assim, a matriz de passagem do sistema OXY para o sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$ tem a propriedade de que sua transposta é também sua inversa. As matrizes com esta propriedade são chamadas **matrizes ortogonais**.

Exemplo 2

Dado um sistema de eixos ortogonais OXY, considere o sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}\,\overline{Y}$ obtido pela rotação positiva de 45^o dos eixos OX e OY em torno da origem. Uma hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem centro na origem, um de seus vértices no ponto $(\sqrt{2},0)$ e a reta $\overline{y} = 2\overline{x}$ como uma de suas assíntotas.

(a) Determine a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e nas coordenadas x e y.
(b) Obtenha o centro, os vértices, os vértices imaginários e as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.
(c) Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando todos os elementos encontrados no item **(b)**.

Solução. **(a)** Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal ℓ é o eixo$-O\overline{X}$, pois o centro $C = (0,0)$ e o vértice $V = (\sqrt{2}, 0)$ pertencem ao eixo$-O\overline{X}$. Além disso, $a = d(C,V) = \sqrt{2}$ e $\dfrac{b}{a} = 2$, pois $\overline{y} = 2\overline{x}$ é uma assíntota da hipérbole. Então, $b = 2a = 2\sqrt{2}$, e

$$\mathcal{H} : \frac{\overline{x}^2}{2} - \frac{\overline{y}^2}{8} = 1$$

é a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas (ver 8.4),

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos 45^o\, x + \operatorname{sen} 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = -\operatorname{sen} 45^o\, x + \cos 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \end{cases} \tag{8.9}$$

obtemos que a equação da hipérbole nas coordenadas x e y é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{2}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{8} \times \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & 4(x+y)^2 - (-x+y)^2 = 16 \\ \Longleftrightarrow\quad & 4(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) = 16 \\ \Longleftrightarrow\quad & 3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16 \\ \Longleftrightarrow\quad & 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0 \end{aligned}$$

(b) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a hipérbole tem: centro $C = (0,0)$; vértices: $A_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $A_2 = (\sqrt{2}, 0)$; vértices imaginários: $B_1 = (0, -2\sqrt{2})$ e $B_2 = (0, 2\sqrt{2})$;reta focal: $\ell : \overline{y} = 0$; reta não focal: $\ell' : \overline{x} = 0$; assíntotas: $\overline{y} = \pm 2\overline{x}$.

Por (8.9), obtemos que $\ell : -x + y = 0$ é a reta focal; $\ell' : x + y = 0$ é a reta não focal e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) = \pm 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$, isto é, $r_- : y = -3x$ e $r_+ : y = -\dfrac{1}{3}x$ são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.

E, pelas relações de mudança de coordenadas (ver 8.3),

$$\begin{cases} x = \cos 45^o\,\overline{x} - \operatorname{sen} 45^o\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \operatorname{sen} 45^o\,\overline{x} + \cos 45^o\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}), \end{cases}$$

obtemos que $C = (0,0)$ é o centro, $A_1 = (-1,-1)$ e $A_2 = (1,1)$ são os vértices, e $B_1 = (2,-2)$ e $B_2 = (-2,2)$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 8.3 mostramos o esboço da hipérbole $\mathcal{H}$.

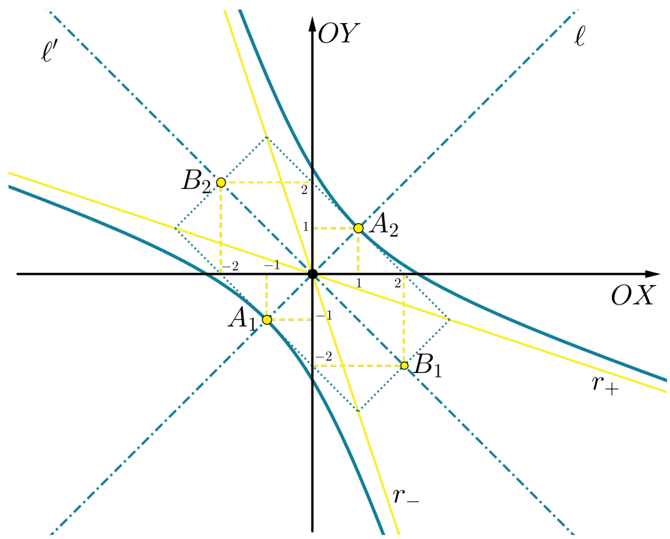

Figura 8.3: Hipérbole $\mathcal{H} : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0$.

Para Saber Mais

Consideremos agora o sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$ obtido por uma rotação positiva de ângulo θ do sistema OXY, seguida de uma translação dos eixos que leva o ponto $O = (0,0)$ no ponto $O' = (x_0, y_0)$, onde (x_0, y_0) são as coordenadas de O' no sistema OXY.

Seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema obtido apenas por uma rotação positiva de ângulo θ dos eixos OX e OY.

Se $P = (x, y)$ é um ponto no sistema OXY, então $(\overline{x}, \overline{y}) = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta, -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$ são as coordenadas de P no sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$. Em particular, $(\overline{x_0}, \overline{y_0}) = (x_0\cos\theta + y_0\operatorname{sen}\theta, -x_0\operatorname{sen}\theta + y_0\cos\theta)$ são as coordenadas de O' no sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$.

Logo, pela mudança de coordenadas dada por uma translação (vista do Capítulo 5), temos que

$$x' = \overline{x} - x_0 \quad \text{e} \quad y' = \overline{y} - y_0,$$

onde (x', y') são as coordenadas de P no sistema $O'X'Y'$.

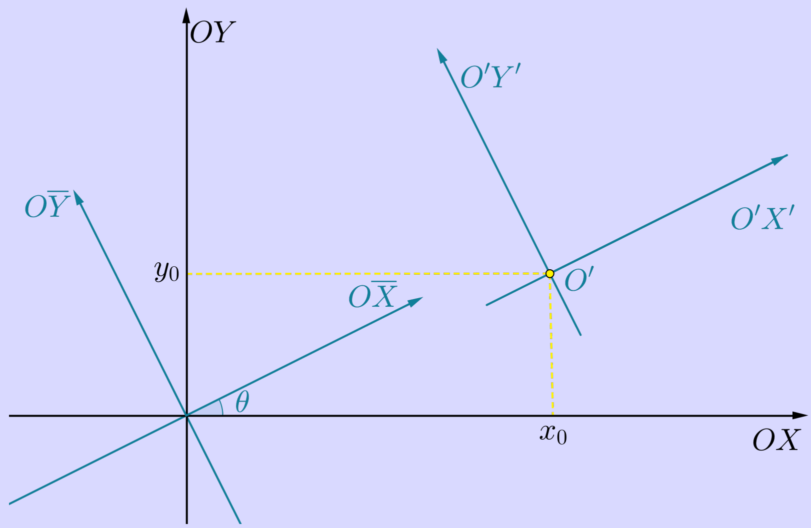

Figura 8.4: Sistemas OXY, $O\overline{X}\,\overline{Y}$ e $OX'Y'$.

Assim,

$$\begin{cases} x' = (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta) - (x_0\cos\theta + y_0\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ y' = (-x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta) - (-x_0\,\mathrm{sen}\,\theta + y_0\cos\theta) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' = -(x - x_0)\,\mathrm{sen}\,\theta + (y - y_0)\cos\theta \end{cases} \tag{8.10}$$

Multiplicando a primeira equação de 8.10 por $\cos\theta$, a segunda, por $-\,\mathrm{sen}\,\theta$, e somando as equações encontradas, obtemos que

$$\begin{aligned} & (x - x_0)\cos^2\theta + (y - y_0)\,\mathrm{sen}^2\,\theta = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \iff\ & (x - x_0)(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \iff\ & x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta + x_0. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos mostrar que

$$y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta + y_0.$$

Portanto, as equações

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta + x_0 \\ y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta + y_0 \end{cases} \tag{8.11}$$

nos dão (x, y) em função de (x', y').

EXEMPLO 3

Seja $r : \sqrt{3}x + y = 4$ a equação de uma reta no sistema OXY. Escreva a equação desta reta no sistema $O'X'Y'$ obtido da rotação positiva de ângulo $\theta = \pi/6$ do sistema OXY, seguida da translação que leva o ponto $= (0, 0)$ no ponto $O' = (\sqrt{3}, 1)$.

Solução. Pelas equações 8.11, temos que:

$$\begin{cases} x = x' \cos(\pi/6) - y' \operatorname{sen}(\pi/6) + \sqrt{3} \\ y = x' \operatorname{sen}(\pi/6) + y' \cos(\pi/6) + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{y'}{2} + \sqrt{3} \\ y = \dfrac{x'}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases}$$

Logo, a reta $r : \sqrt{3}x + y = 4$, nas coordenadas x' e y', é dada por:

$$r : \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{y'}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1\right) = 4$$
$$\iff r : \frac{3x'}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 3 + \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1 = 4$$
$$\iff r : 2x' + 4 = 4 \iff r : x' = 0.$$

Ou seja, a reta r, no sistema $O'X'Y'$, é o eixo $O'Y'$.

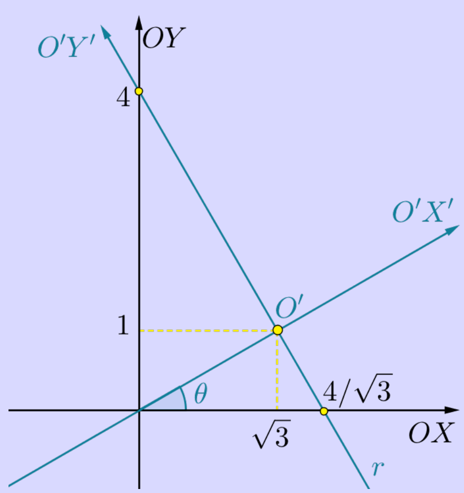

Figura 8.5: Sistemas OXY e $O'X'Y'$.

OBSERVAÇÃO 5

Seja $\vec{v}$ um vetor com coordenadas (α, β) no sistema OXY e (α', β') no sistema $O'X'Y'$. Então,

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha\cos\theta + \beta \operatorname{sen}\theta \\ \beta' = -\alpha \operatorname{sen}\theta + \beta\cos\theta \end{cases} \tag{8.12}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha'\cos\theta - \beta' \operatorname{sen}\theta \\ \beta = \alpha' \operatorname{sen}\theta + \beta\cos\theta \end{cases} \tag{8.13}$$

De fato, seja P o ponto tal que $\vec{v} = \overrightarrow{O'P}$. Se $P = (x, y)$ no sistema OXY e $P' = (x', y')$ no sistema $O'X'Y'$, temos que

$$\alpha = x - x_0, \quad \beta = y - y_0, \quad \alpha' = x' \quad \text{e} \quad \beta' = y'.$$

Logo, por 8.10 e 8.11, obtemos as fórmulas 8.12 e 8.13, respectivamente.

8.4 Formas Quadráticas

Dada uma forma quadrática $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, a matriz real do tipo 2×2,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

é a **matriz de f**.

Uma matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ real do tipo 2×2 é **simétrica** se $a_{12} = a_{21}$. Note que a matriz de qualquer forma quadrática é simétrica.

Assim, para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{f(x, y) = < \mathcal{A}(x, y), (x, y) >} \tag{8.14}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}(x, y), (x, y) > &= \left\langle \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} (x, y), (x, y) \right\rangle \\ &= < (Ax + (B/2)y, (B/2)x + Cy), (x, y) > \\ &= Ax^2 + (B/2)yx + (B/2)xy + Cy^2 \\ &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 = f(x, y). \end{aligned}$$

Para provarmos o resultado principal deste capítulo, precisamos da proposição seguinte .

Proposição 6

Sejam $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ um matriz real do tipo 2×2 e $\mathcal{B}^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ sua matriz transposta. Então,

$$< \mathcal{B}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >=< \overrightarrow{u}, \mathcal{B}^t\overrightarrow{v} >,$$

para quaisquer vetores $\overrightarrow{u} = (x, y)$ e $\overrightarrow{v} = (z, w)$ em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração

De fato,

$$\begin{aligned} < \mathcal{B}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > &= < (b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y), (z, w) > \\ &= b_{11}xz + b_{12}yz + b_{21}xw + b_{22}yw \\ &= x(b_{11}z + b_{21}w) + y(b_{12}z + b_{22}w) \\ &= < (x, y), (b_{11}z + b_{21}w, b_{12}z + b_{22}w) \\ &= < \overrightarrow{u}, B^t\overrightarrow{v} > . \end{aligned}$$

Precisamos também lembrar que o produto de duas matrizes do tipo 2×2, $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ e $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$, é a matriz $\mathcal{MN}$ do tipo 2×2, dada abaixo:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21} & m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22} \\ m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21} & m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22} \end{pmatrix}.$$

Assim, o $ij-$ésimo elemento da matriz produto $\mathcal{MN}$ é o produto interno do $i-$ésimo vetor linha, (m_{i1}, m_{i2}), da matriz $\mathcal{M}$ pelo $j-$ésimo vetor coluna, (n_{1j}, n_{2j}), da matriz $\mathcal{N}$.

É fácil verificar, embora trabalhoso, que o produto de matrizes é associativo, isto é, $(\mathcal{MN})\mathcal{Q} = \mathcal{M}(\mathcal{NQ})$, quaisquer que sejam as matrizes $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ e $\mathcal{Q}$ do tipo 2×2.

Teorema 7 Seja $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$ uma matriz simétrica real do tipo 2×2.

(a) As raízes λ_1 e λ_2 do polinômio característico de $\mathcal{A}$ são reais. Isto é, a matriz $\mathcal{A}$ tem dois autovalores λ_1 e λ_2, que têm **multiplicidade um se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e multiplicidade dois se $\lambda_1 = \lambda_2$**.

(b) Existe um par $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ de autovetores **ortonormais** relativos aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente.

(c) Se $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ é a matriz do tipo 2×2 cuja primeira coluna é formada pelas coordenadas do vetor $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1)$ e a segunda, pelas coordenadas do vetor $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2)$, então

$$\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

Demonstração **(a)** O polinômio característico da matriz $\mathcal{A}$ é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - A & -B/2 \\ -B/2 & \lambda - C \end{pmatrix} = (\lambda - A)(\lambda - C) - \frac{B^2}{4} \\ &= \lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4}. \end{aligned}$$

Como o discriminante da equação $p(\lambda) = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta &= (A+C)^2 - 4(AC - B^2/4) \\ &= A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + B^2 \\ &= (A-C)^2 + B^2, \end{aligned}$$

é não negativo, as suas raízes λ_1 e λ_2 são reais.

(b) Se $\Delta = 0$, temos que $A = C$ e $B = 0$ e, portanto, $\lambda = A = C$ é a única raiz de $p(\lambda) = 0$. Neste caso, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{e_1} = (1, 0), \overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ são autovetores ortonormais relativos ao autovalor λ de multiplicidade dois.

Se $\Delta > 0$, a equação $p(\lambda) = 0$ tem duas raízes reais λ_1 e λ_2 distintas.

Sejam $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ vetores não nulos tais que $\mathcal{A}\overrightarrow{u_1} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1}$ e $\mathcal{A}\overrightarrow{u_2} = \lambda_2 \overrightarrow{u_2}$, isto é, $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ são autovetores não nulos associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente. Podemos supor, pela Observação 3, que $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ são vetores unitários (isto é, $||\overrightarrow{u_1}|| = ||\overrightarrow{u_2}|| = 1$).

O vetor $\overrightarrow{u_1}$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u_2}$. De fato, pela Proposição 6 ,

$$\begin{aligned} & < \mathcal{A}\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} >=< \overrightarrow{u_1}, \mathcal{A}\overrightarrow{u_2} > \\ \Longrightarrow\ & < \lambda_1\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} >=< \overrightarrow{u_1}, \lambda_2\overrightarrow{u_2} > \\ \Longrightarrow\ & \lambda_1 < \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} >= \lambda_2 < \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} > \\ \Longrightarrow\ & (\lambda_1 - \lambda_2) < \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} >= 0 \\ \Longrightarrow\ & < \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} >= 0. \end{aligned}$$

(c) Como $\mathcal{A}\overrightarrow{u_1} = (Aa_1 + (B/2)b_1, (B/2)a_1 + Cb_1) = (\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1)$ e $\mathcal{A}\overrightarrow{u_2} = (Aa_2 + (B/2)b_2, (B/2)a_2 + Cb_2) = (\lambda_2 a_2, \lambda_2 b_2)$, segue que

$$\mathcal{AB} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Além disso, sendo $||\overrightarrow{u_1}||^2 = a_1^2 + b_1^2 = 1$, $||\overrightarrow{u_2}||^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$ e $< \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} >= a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^t\mathcal{AB} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1(a_1^2 + b_1^2) & \lambda_2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ \lambda_1(a_1 a_2 + b_1 b_2) & \lambda_2(a_2^2 + b_2^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observação 8

Note que $B = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{e_1} = (1,0)$ (ou $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$) é um autovetor da matriz $\mathcal{A}$.

Neste caso, A e C são os autovalores e $\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)$ são autovetores relativos aos autovalores A e C, respectivamente, da matriz $\mathcal{A}$.

Seja $\theta \in [0, 2\pi)$ o ângulo que o vetor $\overrightarrow{u_1}$ faz com o eixo OX no sentido positivo, isto é, $\overrightarrow{u_1} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Tomemos $\overrightarrow{u_2} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, obtido de $\overrightarrow{u_1}$ por uma rotação positiva de $\dfrac{\pi}{2}$.

Seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema cujos eixos $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$, respectivamente.

Assim, por 8.5, a forma quadrática $f(x,y) = < \mathcal{A}(x,y),(x,y) >$, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$, é dada por:

$$f(\overline{x},\overline{y}) = < \mathcal{A}(\mathcal{B}(\overline{x},\overline{y})), \mathcal{B}(\overline{x},\overline{y}) >.$$

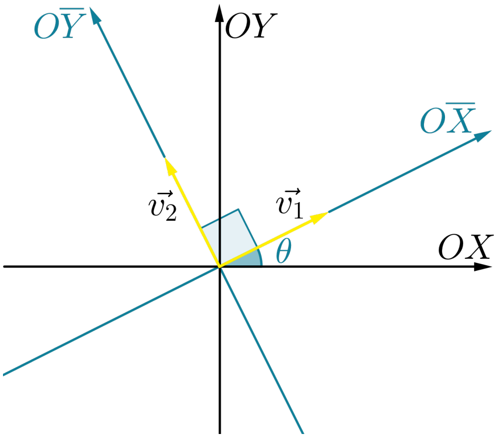

Figura 8.6: Sistemas de eixos ortogonais OXY e $O\overline{X}\,\overline{Y}$.

Daí, sabendo que

$$\mathcal{AB}(x,y) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x,y)) \quad \text{e} \quad (\mathcal{B}^t\mathcal{AB})(x,y) = \mathcal{B}^t(\mathcal{AB}(x,y)) = \mathcal{B}^t(\mathcal{A}(\mathcal{B}(x,y))),$$

concluímos, pela Proposição 6 e pelo Teorema 7, que

$$\begin{aligned} f(\overline{x},\overline{y}) &= < \mathcal{B}^t(\mathcal{A}(\mathcal{B}(\overline{x},\overline{y}))), (\overline{x},\overline{y}) > \\ &= < (\mathcal{B}^t\mathcal{AB})(\overline{x},\overline{y}), (\overline{x},\overline{y}) > \\ &= < (\lambda_1\overline{x}, \lambda_2\overline{y}), (\overline{x},\overline{y}) > \\ &= \lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Para Saber Mais

Se $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$ são duas matrizes do tipo 2×2 e $\overrightarrow{u} = (x,y)$ é um vetor, então

$$\mathcal{MN}(x,y) = \mathcal{M}(\mathcal{N}(x,y)).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{N}(x,y)) &= \mathcal{M}(n_{11}x + n_{12}y, n_{21}x + n_{22}y) \\ &= (m_{11}(n_{11}x + n_{12}y) + m_{12}(n_{21}x + n_{22}y), \\ &\quad\; m_{21}(n_{11}x + n_{12}y) + m_{22}(n_{21}x + n_{22}y)) \\ &= ((m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21})x + (m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22})y, \\ &\quad\; (m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21})x + (m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22})y) \\ &= (\mathcal{MN})(x,y). \end{aligned}$$

Exemplo 4

Seja a forma quadrática $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$, com $A = C = 3$ e $B = 2$.

Então $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz da forma quadrática e

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

é a sua equação característica, cujas raízes são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$. Isto é, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores da matriz $\mathcal{A}$.

Os autovetores (x, y) relativos ao autovalor $\lambda_1 = 4$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 3)x - y = 0 \\ -x + (\lambda_1 - 3)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff x = y.$$

Portanto, $\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ é um autovetor unitário relativo ao autovalor $\lambda_1 = 4$. Como o autovetor $\overrightarrow{u_2}$ relativo ao autovalor $\lambda_2 = 2$ é ortogonal ao autovetor $\overrightarrow{u_1}$, basta tomar $\overrightarrow{u_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}\right)$.

Seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido girando os eixos OX e OY, no sentido positivo, do ângulo $\theta = \pi/4$. Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ deste sistema de eixos, a forma quadrática é dada por

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda_1 \overline{x}^2 + \lambda_2 \overline{y}^2 = 4\overline{x}^2 + 2\overline{y}^2.$$

Portanto, a linha de nível m de f é o conjunto vazio, se $m < 0$; a origem, se $m = 0$, e a elipse $\frac{\overline{x}^2}{m/4} + \frac{\overline{y}^2}{m/2} = 1$, se $m > 0$.

No sistema de eixos $O\overline{X}\,\overline{Y}$, a origem é o centro, $a = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{m}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{m}}{2}$, a reta focal é o eixo$-O\overline{Y}$, a reta não focal é o eixo$-O\overline{X}$, $\left(0, -\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(0, \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\right)$ são os vértices sobre a reta focal, $\left(-\frac{\sqrt{m}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{m}}{2}, 0\right)$ são os vértices sobre a reta não focal, e $\left(0, -\frac{\sqrt{m}}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{\sqrt{m}}{2}\right)$ são os focos da elipse $\frac{\overline{x}^2}{m/4} + \frac{\overline{y}^2}{m/2} = 1$.

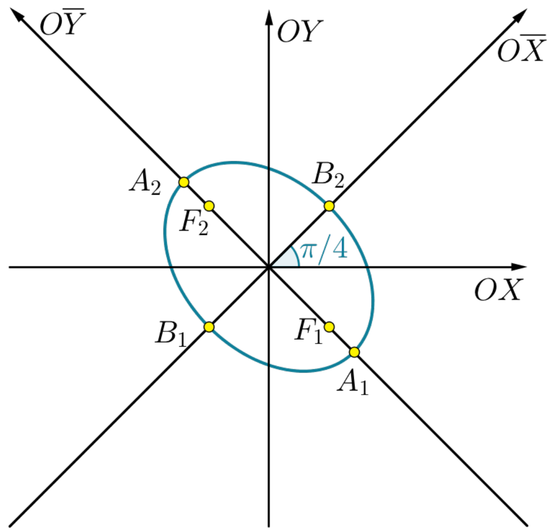

Figura 8.7: Linha de nível 4 de f.

Pela mudança de coordenadas (ver 8.5 e 8.6),

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (\overline{x},\overline{y}), \\
(\overline{x},\overline{y}) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (x,y),
\end{aligned}
$$

obtemos que $C=(0,0)$ é o centro, $\ell : x+y=0$ é a reta focal, $\ell' : -x+y=0$ é a reta não focal, $A_1 = \left(\frac{\sqrt{m}}{2}, -\frac{\sqrt{m}}{2}\right)$ e $A_2 = \left(-\frac{\sqrt{m}}{2}, \frac{\sqrt{m}}{2}\right)$ são os vértices na reta focal, $B_1 = \left(-\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\right)$ são os vértices na reta não focal, e $F_1 = \left(\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\right)$ e $F_2 = \left(-\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\right)$ são os focos da elipse nas coordenadas x e y.

8.5 Equação Geral do Segundo Grau em $\mathbb{R}^2$

Consideremos a equação geral do segundo grau nas variáveis x e y:

$$
Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{8.17}
$$

Esta equação é da linha de nível zero da função quadrática

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Seja, como na seção anterior, o sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$ de eixos ortogonais cujos eixos $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos autovetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$, relativos aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, da matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$.

Então, por 8.16, a função quadrática f, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & f(\overline{x},\overline{y}) = \lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + <(D,E),(\mathcal{B}(\overline{x},\overline{y}))> + F \\ \Longrightarrow\ & f(\overline{x},\overline{y}) = \lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + <\mathcal{B}^t(D,E),(\overline{x},\overline{y})> + F \\ \Longrightarrow\ & f(\overline{x},\overline{y}) = \lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + F, \end{aligned}$$

onde $\overline{D} = <(D,E),\overrightarrow{u_1}>$ e $\overline{E} = <(D,E),\overrightarrow{u_2}>$.

Nos capítulos anteriores, provamos que a equação

$$\lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + F = 0, \tag{8.18}$$

que é a equação 8.17 nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, representa uma elipse ou uma elipse degenerada se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada se $\lambda_1\lambda_2 < 0$, e uma parábola ou uma parábola degenerada se $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ($\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$).

Os eixos $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$ são os **eixos principais** da cônica $\mathcal{C}$ representada pela equação 8.17. Estes eixos são paralelos às retas focal e não focal da cônica, nos casos em que $\mathcal{C}$ é uma elipse ou um hipérbole, e são paralelas à reta focal e à diretriz quando $\mathcal{C}$ é uma parábola.

O número real $I = B^2 - 4AC$, chamado **indicador** da equação 8.17, estabelece se a equação representa uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola(degenerada ou não), antes de reduzirmos a equação a sua **forma canônica** 8.18.

De fato, como $\det\mathcal{A} = \det\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = AC - B^2/4$, então $I = -4\det\mathcal{A}$.

Além disso, como $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B}^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, segue que $\det\mathcal{B} = \det\mathcal{B}^t = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

Logo, $I = -4\lambda_1\lambda_2$, pois, pelo Teorema 7,

$$\begin{aligned} & \det \mathcal{A} = (\det \mathcal{B}^t)(\det \mathcal{A})(\det \mathcal{B}) = \det(\mathcal{B}^t \mathcal{A}\mathcal{B}) \\ \Longrightarrow\ & \det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

Para provar que $I = -4\lambda_1\lambda_2$, usamos que o determinante do produto de duas matrizes é o produto dos determinante dessas matrizes.

Para Saber Mais

Sejam $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ e $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$ duas matrizes reais do tipo 2×2. Então,

$$\det(\mathcal{M}\mathcal{N}) = (\det \mathcal{M})(\det \mathcal{N}).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{M}\mathcal{N}) &= (m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21})(m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22}) \\ &- (m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22})(m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}) \\ &= m_{11}m_{21}n_{11}n_{12} + m_{11}m_{22}n_{11}n_{22} + m_{12}m_{21}n_{21}n_{12} \\ &+ m_{12}m_{22}n_{21}n_{22} - m_{11}m_{21}n_{12}n_{11} - m_{11}m_{22}n_{12}n_{21} \\ &- m_{12}m_{21}n_{22}n_{11} - m_{12}m_{22}n_{22}n_{21} \\ &= m_{11}m_{22}n_{11}n_{22} - m_{11}m_{22}n_{12}n_{21} + m_{12}m_{21}n_{21}n_{12} \\ &- m_{12}m_{21}n_{22}n_{11} \\ &= m_{11}m_{22}(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}) - m_{12}m_{21}(n_{22}n_{11} - n_{12}n_{21}) \\ &= (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}) \\ &= (\det \mathcal{M})(\det \mathcal{N}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\det(\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{Q}) = (\det \mathcal{M})(\det \mathcal{N})(\det \mathcal{Q}),$$

quaisquer que sejam as matrizes M, N e Q, pois

$$\det(\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{Q}) = (\det \mathcal{M}\mathcal{N})(\det \mathcal{Q}) = (\det \mathcal{M})(\det \mathcal{N})(\det \mathcal{Q}).$$

Assim, a equação geral do segundo grau 8.17 representa:

- uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio se $I < 0$;
- uma hipérbole ou um par de retas concorrentes se $I > 0$;
- uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio se $I = 0$.

Reordenando, quando $B \neq 0$, os autovalores λ_1 e λ_2 (se necessário), podemos supor que $\theta \in (0, \pi/2)$. Vamos determinar agora o ângulo θ, em função dos coeficientes A, B e C da equação 8.17.

Temos que:

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \ & \begin{pmatrix} A\cos\theta + (B/2)\operatorname{sen}\theta & (B/2)\cos\theta + C\operatorname{sen}\theta \\ -A\operatorname{sen}\theta + (B/2)\cos\theta & -(B/2)\operatorname{sen}\theta + C\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \ & (A\cos\theta + (B/2)\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta) + ((B/2)\cos\theta + C\operatorname{sen}\theta)\cos\theta = 0 \\
\Longrightarrow \ & -A\cos\theta\operatorname{sen}\theta - (B/2)\operatorname{sen}^2\theta + (B/2)\cos^2\theta + C\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \\
\Longrightarrow \ & (B/2)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + (C - A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \\
\Longrightarrow \ & B\cos 2\theta + (C - A)\operatorname{sen} 2\theta = 0.
\end{aligned}
$$

Então, quando $B \neq 0$,

$$
\boxed{\begin{array}{c} \theta = \pi/4, \text{ se } A = C \\ \text{e} \\ \tan 2\theta = \dfrac{B}{A - C}, \text{ se } A \neq C \end{array}}
$$

Sendo $1 + \tan^2(2\theta) = \sec^2(2\theta)$, segue que

$$
\boxed{\begin{array}{c} \cos 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta)}}, \text{ se } \dfrac{B}{A - C} > 0 \\[2ex] \cos 2\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta)}}, \text{ se } \dfrac{B}{A - C} < 0 \end{array}}
$$

pois, como $2\theta \in (0, \pi)$, $\cos 2\theta$ e $\tan 2\theta$ têm o mesmo sinal.

Conhecendo $\cos 2\theta$, podemos determinar o ângulo $\theta \in (0, \pi/2)$, por meio das relações trigonométricas:

$$
\boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{1 + \cos 2\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\theta}}{2}}
$$

Exemplo 5

Considere a função quadrática $f(x,y) = x^2 + 2\sqrt{6}xy + 2y^2 - \sqrt{60}x + 2\sqrt{10}y + 1$, com $A = 1$, $B = 2\sqrt{6}$, $C = 2$, $D = -\sqrt{60}$, $E = 2\sqrt{10}$ e $F = 1$.

Seja $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ a matriz da função quadrática. Então, a equação característica da matriz $\mathcal{A}$ é

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$, isto é, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores de $\mathcal{A}$.

Os autovetores (x,y) relativos ao autovalor $\lambda_1 = 4$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 1)x - \sqrt{6}y = 0 \\ -\sqrt{6}x + (\lambda_1 - 2)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - \sqrt{6}y = 0 \\ -\sqrt{6}x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{\sqrt{6}}{3}y = \frac{2}{\sqrt{6}}y.$$

Tomemos $\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right)$, que é um autovetor unitário relativo ao autovalor $\lambda_1 = 4$. Como os autovetores relativos ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são ortogonais ao autovetor $\overrightarrow{u_1}$, basta tomar $\overrightarrow{u_2} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.

Seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais tal que $O\overline{X}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_1}$, e $O\overline{Y}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{u_2}$. Ou seja, o sistema $O\overline{XY}$ é obtido girando os eixos OX e OY, no sentido positivo, do ângulo $\theta \in (0, \pi/2)$, tal que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{10}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$ $\left(\iff \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = -2\sqrt{6} = \frac{B}{A-C}\right)$.

No sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$, a função f se escreve como

$$f(\overline{x},\overline{y}) = 4\overline{x}^2 - \overline{y}^2 + \left\langle \begin{pmatrix} 2/\sqrt{10} & \sqrt{6}/\sqrt{10} \\ -\sqrt{6}/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \end{pmatrix} (-\sqrt{60}, 2\sqrt{10}), (\overline{x},\overline{y}) \right\rangle + 1$$

$$\iff f(\overline{x},\overline{y}) = 4\overline{x}^2 - \overline{y}^2 + \left(-\frac{2\sqrt{60}}{\sqrt{10}} + \frac{2\sqrt{60}}{\sqrt{10}}\right)\overline{x} + \left(-\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{10}} + \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right)\overline{y} + 1$$

$$\iff f(\overline{x},\overline{y}) = 4\overline{x}^2 - \overline{y}^2 - 2\overline{y} + 1$$

$$\iff f(\overline{x},\overline{y}) = 4\overline{x}^2 - (\overline{y}+1)^2 + 2$$

Portanto, a curva de nível 2 da função f é dada pela equação

$$\begin{aligned} 4\overline{x}^2 - (\overline{y}+1)^2 + 2 = 2 &\iff 4\overline{x}^2 - (\overline{y}+1)^2 = 0 \\ &\iff \overline{y}+1 = 2\overline{x} \quad \text{ou} \quad \overline{y}+1 = -2\overline{x}, \end{aligned}$$

que representa duas retas concorrentes no ponto $(0,-1)$, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Como

$$(\overline{x},\overline{y}) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{10} & \sqrt{6}/\sqrt{10} \\ -\sqrt{6}/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \end{pmatrix}(x,y) = \left(\frac{2x+\sqrt{6}y}{\sqrt{10}}, \frac{-\sqrt{6}x+2y}{\sqrt{10}}\right),$$

temos que as retas, nas coordenadas x e y, são:

- $2\overline{x} - \overline{y} = 1 \iff 2(2x+\sqrt{6}y) - (-\sqrt{6}x+2y) = \sqrt{10} \iff (4+\sqrt{6})x + (2\sqrt{6}-2)y = \sqrt{10}$;

- $2\overline{x} + \overline{y} = -1 \iff 2(2x+\sqrt{6}y) + (-\sqrt{6}x+2y) = -\sqrt{10} \iff (4-\sqrt{6})x + (2\sqrt{6}+2)y = -\sqrt{10}$.

Estas retas se cortam no ponto

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{10} & -\sqrt{6}/\sqrt{10} \\ \sqrt{6}/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \end{pmatrix}(0,-1) = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right).$$

Para $m \neq 2$, a linha de nível m da função f é a hipérbole

$$4\overline{x}^2 - (\overline{y}+1)^2 = m-2 \iff \frac{\overline{x}^2}{\frac{m-2}{4}} - \frac{(\overline{y}+1)^2}{m-2} = 1.$$

Se $m > 2$, a reta focal da hipérbole é a reta $\overline{y} = -1$, paralela ao eixo$-O\overline{X}$, e se $m < 2$, a reta focal é o eixo$-O\overline{Y}$.

Para $m = -2$, a hipérbole é dada pela equação

$$-\overline{x}^2 + \frac{(\overline{y}+1)^2}{4} = 1.$$

Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, $(0,-1)$ é o centro, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{5}$, $\overline{x} = 0$ é a reta focal, $\overline{y} = -1$ é a reta não focal, $(0,-3)$ e $(0,1)$ são os vértices, $(-1,-1)$ e $(1,-1)$ são os vértices imaginários, $(0,-1-\sqrt{5})$ e $(0,-1+\sqrt{5})$ são os focos e $\overline{x} = \pm\frac{1}{2}(\overline{y}+1)$ são as assíntotas da hipérbole.

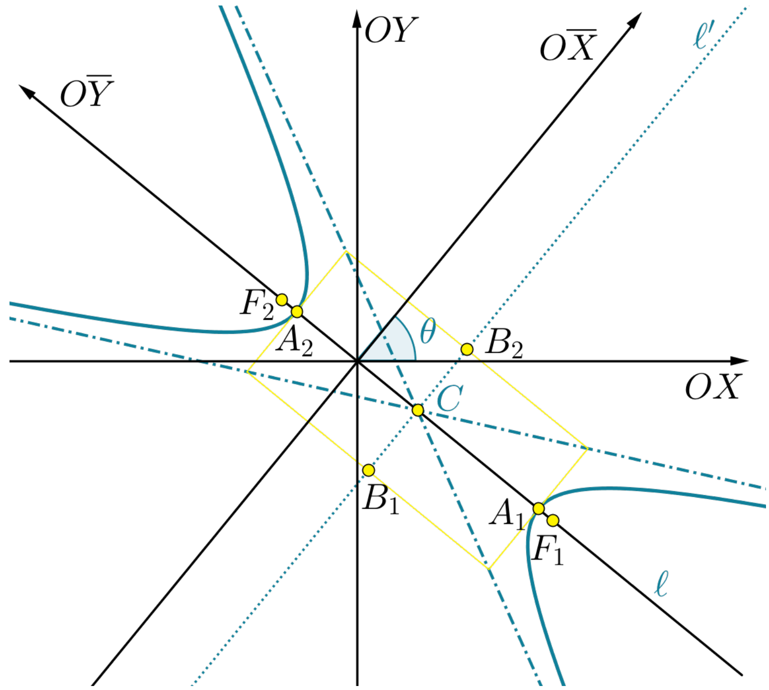

Figura 8.8: Linha de nível -2 de f.

Pela mudança de coordenadas,

$$(x,y) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{10} & -\sqrt{6}/\sqrt{10} \\ \sqrt{6}/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \end{pmatrix} (\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{2\overline{x}-\sqrt{6}\overline{y}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{6}\overline{x}+2\overline{y}}{\sqrt{10}} \right),$$

obtemos que $C = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ é o centro, $A_1 = \left(\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}}\right)$ e $A_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ são os vértices, $B_1 = \left(\frac{-2+\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, \frac{-\sqrt{6}-2}{\sqrt{10}}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{10}}\right)$ são os vértices imaginários, $F_1 = \left(\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, \frac{-2(1+\sqrt{5})}{\sqrt{10}}\right)$ e $F_2 = \left(\frac{(1-\sqrt{5})\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, \frac{-2(1-\sqrt{5})}{\sqrt{10}}\right)$ são os focos da hipérbole nas coordenadas x e y.

E, pela mudança de coordenadas,

$$(\overline{x},\overline{y}) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{10} & \sqrt{6}/\sqrt{10} \\ -\sqrt{6}/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \end{pmatrix} (x,y) = \left(\frac{2x+\sqrt{6}y}{\sqrt{10}}, \frac{-\sqrt{6}x+2y}{\sqrt{10}} \right),$$

segue que $\ell : 2x+\sqrt{6}y = 0$ é a reta focal, $\ell' : -\sqrt{6}x+2y = -\sqrt{10}$ é a reta não focal e $r^{\pm} : 2(2x+\sqrt{6}y) = \pm(-\sqrt{6}x+2y+\sqrt{10})$ ($\Longleftrightarrow r^{\pm} : (4\pm\sqrt{6})x + (2\sqrt{6}\mp 2)y = \pm\sqrt{10}$) são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.

Exemplo 6

Seja a função quadrática $f(x,y) = x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3$, com $A = 1$, $B = 2\sqrt{2}$, $C = 2$, $D = 6\sqrt{3}$, $E = 0$ e $F = 3$.

A matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ é a matriz de f. Portanto,

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda - \sqrt{2} \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = 0,$$

é sua equação característica, cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$. Ou seja, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$ são os autovalores da matriz $\mathcal{A}$.

Os autovetores (x,y) da matriz $\mathcal{A}$ relativos ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 1)x - \sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x + (\lambda_1 - 2)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - \sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x + y = 0 \end{cases} \iff y = \sqrt{2}x.$$

Logo, $\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ é um autovetor unitário relativo ao autovalor $\lambda_1 = 3$ e, portanto, $\overrightarrow{u_2} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ é um autovetor unitário relativo ao autovalor $\lambda_2 = 0$.

Seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido girando os eixos OX e OY, no sentido positivo, do ângulo $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ($\iff \tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = -2\sqrt{2}$.)

Nestas coordenadas, a função quadrática se escreve como

$$\begin{aligned} & f(\overline{x},\overline{y}) = 3\overline{x}^2 + < \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} (6\sqrt{3}, 0), (\overline{x},\overline{y}) > +3 \\ \iff & f(\overline{x},\overline{y}) = 3\overline{x}^2 + 6\overline{x} - 6\sqrt{2}\overline{y} + 3 \\ \iff & f(\overline{x},\overline{y}) = 3(\overline{x}^2 + 2\overline{x}) - 6\sqrt{2}\overline{y} + 3 \\ \iff & f(\overline{x},\overline{y}) = 3(\overline{x} + 1)^2 - 6\sqrt{2}\overline{y}. \end{aligned}$$

Então, a linha de nível $6\sqrt{2}m, m \in \mathbb{R}$, de f é a parábola

$$(\overline{x} + 1)^2 = 2\sqrt{2}(\overline{y} + m),$$

que tem vértice $\overline{V} = (-1, -m)$, $p = \sqrt{2}/2$, reta focal $\overline{\ell} : \overline{x} = -1$, foco $\overline{F} = (-1, -m + \sqrt{2}/2)$ e diretriz $\overline{\ell} : \overline{y} = -m - \sqrt{2}/2$, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Pela mudança de coordenadas,

$$\begin{aligned}
(x,y) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} (\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{\overline{x}-\sqrt{2}\overline{y}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}\overline{x}+\overline{y}}{\sqrt{3}} \right) \\
(\overline{x},\overline{y}) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} (x,y) = \left(\frac{x+\sqrt{2}y}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}x+y}{\sqrt{3}} \right),
\end{aligned}$$

temos que que $V = \left(\frac{-1+\sqrt{2}m}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}-m}{\sqrt{3}} \right)$ é o vértice, $\ell : x+\sqrt{2}y = -\sqrt{3}$ é a reta focal, $F = \left(\frac{\sqrt{2}(m-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}, \frac{-(2m+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} \right)$ é o foco e $\ell : -\sqrt{2}x + y = -m\sqrt{3} - \sqrt{6}/2$ é a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.

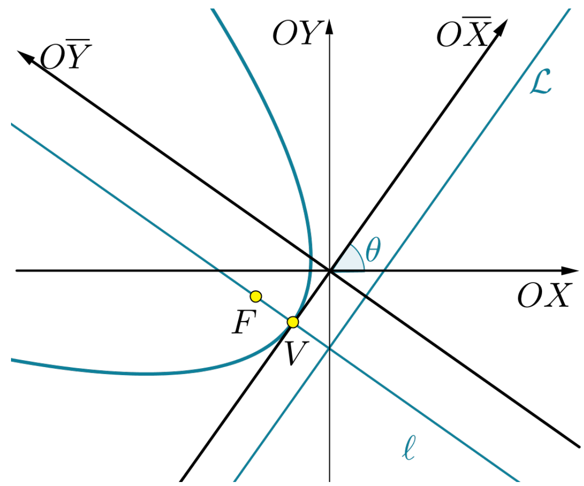

Figura 8.9: Linha de nível zero de f.

8.6 Exercícios

1. Obtenha os autovalores (caso existam) e os respectivos autovalores unitários da matriz:

(a) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$; **(b)** $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; **(c)** $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Descreva geometricamente a linha de nível zero da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^4 - y^4 - 2x^3 + 2xy^2 - 3x^2 + 3y^2$.

3. Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido pela rotação positiva de ângulo θ dos eixos OX e OY, onde $\cos\theta = 4/5$ e $\operatorname{sen}\theta = 3/5$.

Uma parábola, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, tem foco no ponto $F = (12/5, 16/5)$ e vértice no ponto $V = (12/5, -9/5)$.

(a) Determine a equação da parábola nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e nas coordenadas x e y.

(b) Obtenha o foco, o vértice, a reta focal e a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.

(c) O ponto $P = (1,7)$, nas coordenadas x e y, pertence à região focal ou à região não focal da parábola?

(d) Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando seus elementos e o ponto P.

4. Encontre os autovalores da matriz das formas quadráticas abaixo. Descreva suas linhas de nível e, caso seja uma cônica não degenerada, obtenha os seus principais elementos nas coordenadas x e y.

(a) $f(x,y) = xy$

(b) $f(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$

(c) $f(x,y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

(d) $f(x,y) = 21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2$

(e) $f(x,y) = -39x^2 + 50\sqrt{3}xy + 11y^2$

5. Para cada uma das equações abaixo, identifique a cônica que ela representa, encontrando, nos casos não degenerados, os seus principais elementos. Faça também um esboço da curva.

(a) $x^2 - 2xy + y^2 + 4y = 0$

(b) $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

(c) $7x^2 - 48xy - 7y^2 - 30x - 40y + 75 = 0$

(d) $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - (12\sqrt{3} + 8)x - (12 - 8\sqrt{3})y + 52 = 0$

(e) $13x^2 - 18xy + 37y^2 + 20\sqrt{10}x - 20\sqrt{10}y + 40 = 0$

(f) $-7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5}y = 0$

6. Mostre que uma equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa um círculo, se e somente se, $A = C(\neq 0)$, $B = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$. Lembre que um círculo é uma elipse com eixos focais e não focais de iguais comprimentos.

7. Considere a mudança de coordenadas (rotação dos eixos) dada por $x = \overline{x}\cos\theta - \overline{y}\operatorname{sen}\theta$, $y = \overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta$. Obtenha a equação do círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

8. Seja OXY um sistema de eixos ortogonais, e considere o sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$ obtido girando os eixos OX e OY de um ângulo θ, $\theta \in [0, \pi/2)$, no sentido positivo. Mostre que se

$$A_\theta\overline{x}^2 + B_\theta\overline{xy} + C_\theta\overline{y}^2 + D_\theta\overline{x} + E_\theta\overline{y} + F_\theta = 0$$

é a equação de segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, então $A_\theta + C_\theta = A + C$ e $B_\theta^2 - 4A_\theta C_\theta = B^2 - 4AC$, para todo $\theta \in [0, \pi/2)$. Conclua que o indicador e o polinômio característico de uma equação do segundo grau são invariantes por rotação dos eixos.

8.7 Exercícios Suplementares

1. Sejam $O' = (3, 2)$, $P = (4, 4)$ e $Q = (1, 3)$ pontos num sistema de eixos ortogonais OXY. Considere o sistema $O'X'Y'$ tal que o ponto P pertence ao semieixo positivo $O'X'$ e o ponto Q pertence ao semieixo positivo $O'Y'$. Obtenha as coordenadas x' e y' do ponto $R = (8, 2)$ e do vetor $\overrightarrow{v} = (-1, 3)$.

2. Seja $r : ax+by = c$ uma reta num sistema de eixos ortognais OXY. Mostre que, mediante uma rotação positiva seguida de uma translação, podemos obter um sistema de eixos ortogonais $O'X'Y'$ no qual a equação de r é $x' = 0$.

3. Sejam OXY e $O'X'Y'$ dois sistemas de eixos ortogonais quaisquer. Se θ é o ângulo que o eixo $O'X'$ faz com o eixo OX no sentido positivo, então o ângulo ϕ que o eixo $O'Y'$ faz com o eixo OY no sentido positivo pode ser $\phi = \theta$ ou $\phi = \theta + \pi$. No primeiro caso, $\phi = \theta$, estudado no texto, dizemos que os sistemas OXY e $O'X'Y'$ têm a **mesma orientação**. No segundo caso, $\phi = \theta + \pi$, mostre que as fórmulas de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta + y' \operatorname{sen}\theta + x_0 \\ y = x' \operatorname{sen}\theta - y' \cos\theta + y_0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\operatorname{sen}\theta \\ y' = (x - x_0)\operatorname{sen}\theta - (y - y_0)\cos\theta, \end{cases}$$

onde (x, y) e (x_0, y_0) são as coordenadas de um ponto P e do ponto O', respectivamente, no sistema OXY, e (x', y') são as coordenadas de P no sistema $O'X'Y'$.