9

Transformações geométricas planas

Sumário

9.1 Introdução

Nos Capítulos 5, 6, 7 e 8, vimos que dada uma equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{9.1}$$

existe um sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido após uma rotação e/ou uma translação do sistema OXY, tal que a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ fica na forma canônica.

Neste capítulo, estudaremos as transformações geométricas do plano. Dentre elas, a **translação** T_{P_0} que leva a origem no ponto P_0 e a **rotação** R_θ de ângulo θ em torno da origem. Embora haja uma analogia entre essas transformações e as mudanças de coordenadas estudadas anteriormente, há também uma diferença. Nas transformações de translação e rotação mantemos fixos os eixos e transladamos e rotacionamos os pontos, enquanto que na mudança de coordenadas mantemos fixos os pontos e movemos os eixos.

9.2 Transformações no plano

Definição 1

Uma **transformação no plano** π é uma função $T : \pi \longrightarrow \pi$ que a cada ponto $P \in \pi$ associa o ponto $T(P) \in \pi$ chamado **imagem de P por T**.

Ao longo deste capítulo, vamos fixar um sistema de eixos ortogonais OXY no plano π. Desta maneira, uma transformação T de π em π pode ser vista como uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que a cada ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ associa o ponto $P' = T(P) = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Ou, dependendo das propriedades de T, que queremos enfatizar, podemos interpretar T como uma transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que a cada vetor $\overrightarrow{v} = (x, y)$ associa o vetor $\overrightarrow{v}' = T(\overrightarrow{v}) = (x', y')$.

Definição 2

Dizemos que as transformações T e L **são iguais**, e escrevemos $T = L$, quando $T(P) = L(P)$ para todo ponto P.

Exemplo 1

(a) A **transformação identidade**, que designamos $\mathcal{I}$, é a transformação que a cada ponto P do plano associa ele próprio, isto é, $\mathcal{I}(P) = P$, para todo ponto P.

(b) Seja P_0 um ponto do plano. A transformação T que a todo ponto P do plano associa o ponto P_0, $T(P) = P_0$, é a **transformação constante de valor P_0**.

(c) Seja O a origem do sistema OXY. A **translação até o ponto P_0** é a transformação T_{P_0} do plano que a cada ponto P associa o ponto $P' = T_{P_0}(P)$ tal que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP_0}$.

Se $P_0 = (x_o, y_o)$ e $P = (x, y)$, então

$$P' = T_{P_0}(P) = (x', y'),$$

onde:

$$\begin{aligned}(x'-x, y'-y) &= (x_o-0, y_o-0)\\ &= (x_o, y_o).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}T_{P_0}(P) = P' &= (x', y')\\ &= (x_o + x, y_o + y).\end{aligned}$$

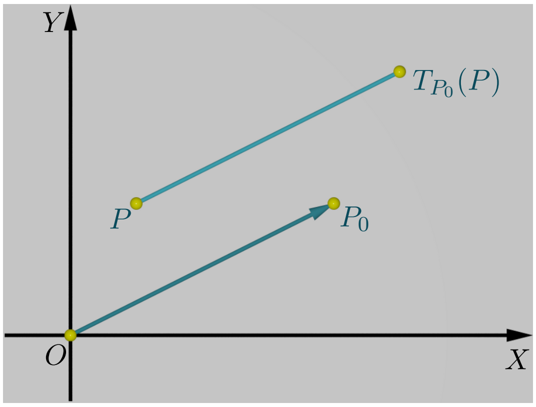

Figura 9.1: Translação T_{P_0}

Outra forma de descrever uma translação é dando seu **vetor de translação**: a **translação pelo vetor $\vec{v}$** é a transformação dada por $T_{\vec{v}}(P) = P'$, onde $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. Escrevemos a translação pelo vetor $\vec{v}$ como

$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}.$$

Então, se $\vec{v} = (a, b)$, $T_{\vec{v}}(x, y) = (x + a, y + b)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Dado um ponto P_0 do plano, a transformação R_{P_0} que a cada ponto P do plano associa o ponto $P' = R_{P_0}(P)$, pertencente à reta que passa por P_0 e P, tal que

$$\overrightarrow{P_0P'} = -\overrightarrow{P_0P}$$

é a **reflexão em relação ao ponto P_0**.

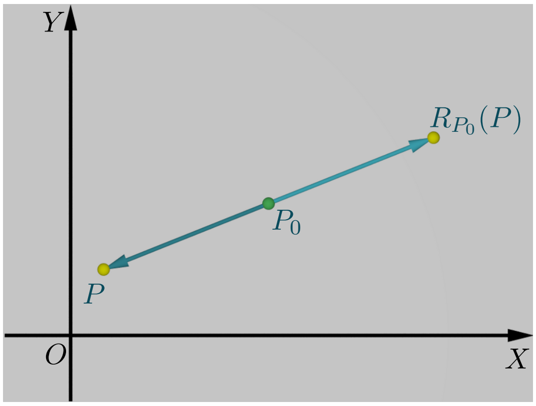

Figura 9.2: Reflexão R_{P_0}

Se $P_0 = (x_o, y_o)$ e $P = (x, y)$ é um ponto do plano, então $P' = R_{P_0}(P) = (x', y')$ é o ponto tal que

$$(x'-x_o, y'-y_o) = -(x-x_o, y-y_o),$$

isto é,

$$R_{P_0}(P) = (2x_o - x, 2y_o - y).$$

Note que, se $P_0 = (0,0)$, então $R_{(0,0)}(x,y) = (-x,-y)$, para todo (x,y).

(e) A **projeção ortogonal sobre uma reta** ℓ no plano é a transformação, designada Proj_ℓ, que a cada ponto P do plano associa o ponto P' onde a reta ℓ intersecta a reta perpendicular a ℓ que passa pelo ponto P.

Se ℓ é uma reta que faz um ângulo α, no sentido positivo, com o eixo OX, então $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ é um vetor paralelo a ℓ e

$\ell : -\operatorname{sen}\alpha\, x + \cos\alpha\, y = c$

é a sua equação cartesiana para algum $c \in \mathbb{R}$.

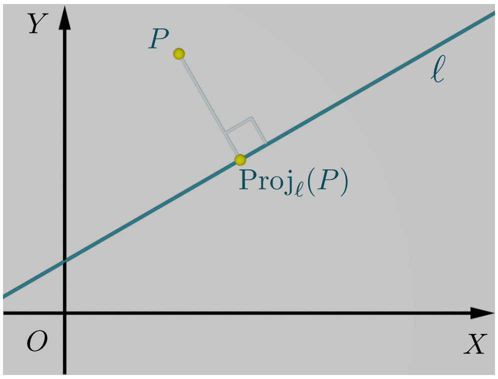

Figura 9.3: Projeção ortogonal Proj_ℓ

Se $P = (x_o, y_o)$ é um ponto do plano, então

$$\ell^\perp : \cos\alpha\, x + \operatorname{sen}\alpha\, y = \cos\alpha\, x_o + \operatorname{sen}\alpha\, y_o$$

é a reta perpendicular a ℓ que passa pelo ponto P_0.

Então, se $P' = \mathrm{Proj}_\ell(P) = (x', y')$, temos que (x', y') é a solução do sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{sen}\alpha\, x' + \cos\alpha\, y' = c \\ \cos\alpha\, x' + \operatorname{sen}\alpha\, y' = \cos\alpha\, x_o + \operatorname{sen}\alpha\, y_o. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$\begin{aligned} P' &= \mathrm{Proj}_\ell(P) \\ &= (\cos^2\alpha\, x_o + \cos\alpha\, \operatorname{sen}\alpha\, y_o - c\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha\, \operatorname{sen}\alpha\, x_o + \operatorname{sen}^2\alpha\, y_o + c\,\cos\alpha). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} P' = \mathrm{Proj}_\ell(P) &= (\cos^2\alpha\, x_o + \cos\alpha\, \operatorname{sen}\alpha\, y_o, \cos\alpha\, \operatorname{sen}\alpha\, x_o + \operatorname{sen}^2\alpha\, y_o) \\ &\quad + c(-\operatorname{sen}\alpha, +\cos\alpha). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Em particular, se ℓ é o eixo OX, então $\alpha = 0$ e $c = 0$. Assim, a projeção $P_x = \mathrm{Proj}_\ell$ é dada por $P_x(x_o, y_o) = (x_o, 0)$. De modo análogo, a projeção P_y sobre o eixo OY ($\alpha = \pi/2$ e $c = 0$) é a transformação $P_y(x_o, y_o) = (0, y_o)$.

(f) A **reflexão R_ℓ em relação à reta ℓ** é a transformação que a cada ponto P associa o ponto $P' = R_\ell(P)$ tal que ℓ é a mediatriz do segmento PP'. Ou seja, $P' = (x', y')$ é o ponto do plano tal que $\mathrm{Proj}_\ell(P)$ é o ponto médio do segmento PP'.

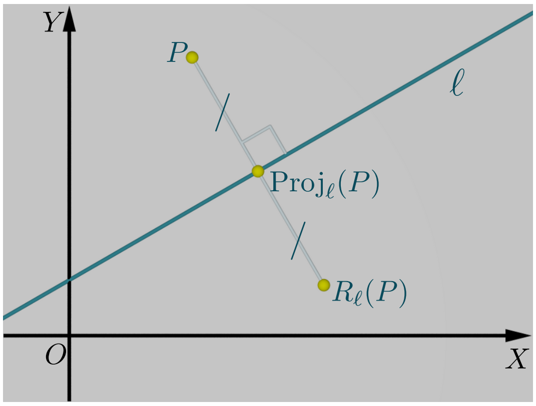

Figura 9.4: Reflexão R_ℓ

Logo, se $P = (x, y)$ e $\ell : -\operatorname{sen}\alpha\, x + \cos\alpha\, y = c$, temos, pelo item anterior, que:

$$
\begin{aligned}
& R_\ell(x,y) = (x',y') = 2\,\mathrm{Proj}_\ell(x,y) - (x,y) \\
\iff\ & R_\ell(x,y) = (2\cos^2\alpha\, x + 2\cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha\, y - 2c\operatorname{sen}\alpha - x, \\
& \qquad 2\cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha\, x + 2\operatorname{sen}^2\alpha\, y + 2c\cos\alpha - y) \\
\iff\ & R_\ell(x,y) = ((2\cos^2\alpha - 1)x + 2\cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha\, y - 2c\operatorname{sen}\alpha, \\
& \qquad 2\cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha\, x + (2\operatorname{sen}^2\alpha - 1)y + 2c\cos\alpha) \\
\iff\ & R_\ell(x,y) = (\cos 2\alpha\, x + \operatorname{sen} 2\alpha\, y, \operatorname{sen} 2\alpha\, x - \cos 2\alpha\, y) \\
& \qquad +2c(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha). \qquad (9.3)
\end{aligned}
$$

9.3 Transformações lineares

Definição 3

Uma transformação T é uma **transformação linear** se

- T transforma uma soma de vetores na soma de suas imagens:
$$T(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{v}),$$
para todos os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$;
- T transforma o múltiplo de um vetor no mesmo múltiplo da sua imagem:
$$T(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda T(\overrightarrow{u}),$$
para todo vetor $\overrightarrow{u}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 4

(a) Pela identificação entre pontos e vetores, num sistema de eixos OXY, toda transformação linear pode ser vista também como uma transformação de pontos do plano.

De fato, se T é uma transformação linear (de vetores) e P é um ponto no plano, definimos $T(P) = Q$, onde Q é o ponto tal que $T(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ}$.

(b) Uma transformação linear deixa sempre o vetor zero fixo: $T(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

Com efeito, sendo T linear: $T(-\overrightarrow{v}) = T(-1\,\overrightarrow{v}) = -1\,T(\overrightarrow{v}) = -T(\overrightarrow{v})$, e

$$T(\overrightarrow{0}) = T(-\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}) = T(-\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v}) = -T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}.$$

Portanto, *se uma transformação não deixa fixo o vetor nulo $\overrightarrow{0}$, ou seja, não deixa a origem fixa, então não é uma transformação linear.*

Exemplo 2

(a) A transformação que a cada vetor $\overrightarrow{v}$ associa o vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é linear e é chamada **transformação linear nula** ou **transformação zero**.

(b) A **transformação identidade** $\mathcal{I}$ que a cada vetor associa ele próprio (ou que a cada ponto associa ele próprio) é uma transformação linear.

(c) A reflexão com respeito à origem é uma transformação linear.

De fato, na linguagem vetorial, a reflexão é dada por $T(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$. Assim,

$$T(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{v}),$$

e

$$T(\lambda\overrightarrow{v}) = -\lambda\overrightarrow{v} = \lambda(-\overrightarrow{v}) = \lambda T(\overrightarrow{v}),$$

para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano.

(d) Se $k \in \mathbb{R}$, a transformação, $T(\overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{v}$ é linear.

Com efeito, para quaisquer $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{v}), \\ T(\lambda\overrightarrow{v}) &= k(\lambda\overrightarrow{v}) = k\lambda\overrightarrow{v} = \lambda(k\overrightarrow{v}) = \lambda T(\overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

Note que

$$\|T(\overrightarrow{v})\|^2 = \langle T(\overrightarrow{v}), T(\overrightarrow{v})\rangle = \langle k\overrightarrow{v}, k\overrightarrow{v}\rangle = k^2\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle = k^2\|\overrightarrow{v}\|^2.$$

Portanto, $\|T(\overrightarrow{v})\| = |k|\,\|\overrightarrow{v}\|$. Ou seja, T multiplica o tamanho dos vetores por $|k|$.

A transformação T é chamada **homotetia de razão** k. A homotetia de razão $k = 1$ é a transformação identidade e a homotetia de razão $k = -1$ é a reflexão com respeito à origem, pois leva cada vetor $\overrightarrow{v}$ no seu simétrico $-\overrightarrow{v}$.

Note que uma homotetia de razão k com $|k| < 1$ encurta o tamanho dos vetores não nulos (isto é, encurta a distância entre dois pontos), por isso é também chamada **contração linear uniforme**. Entretanto, quando $|k| > 1$, a homotetia aumenta o tamanho dos vetores não nulos, ou seja, aumenta a distância entre dois pontos e por isso é também chamada **expansão linear uniforme**.

(e) A projeção ortogonal sobre uma reta ℓ que passa pela origem é uma transformação linear.

Com efeito, se ℓ é a reta paralela ao vetor unitário $\overrightarrow{u}$ que passa pela origem, temos, na linguagem vetorial, que a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{v}$ sobre a reta ℓ é dada por

$$\operatorname{Proj}_\ell(\overrightarrow{v}) = \operatorname{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u}.$$

Então, para todos os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Proj}_\ell(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{u} \\ &= (\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle)\, \overrightarrow{u} \\ &= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{u} \\ &= \operatorname{Proj}_\ell(\overrightarrow{v}) + \operatorname{Proj}_\ell(\overrightarrow{w}), \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{Proj}_\ell(\lambda\overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} = \lambda \operatorname{Proj}_\ell(\overrightarrow{v}).$$

(f) A reflexão com respeito a uma reta que passa pela origem é uma transformação linear.

Se $\overrightarrow{u}$ é um vetor unitário na direção da reta ℓ que passa pela origem, então, na linguagem vetorial, a reflexão do vetor $\overrightarrow{v}$ em relação a ℓ é dada por:

$$R_\ell(\overrightarrow{v}) = 2\operatorname{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}.$$

Fica como exercício provar que R_ℓ é uma transformação linear.

(g) As translações por vetores não nulos não são transformações lineares pois não fixam o vetor nulo (não deixam a origem fixa).

(h) A transformação $T(x,y) = (x^2, 0)$ não é linear, pois $T(1,0) = (1^2, 0) = (1,0)$ e $T(2(1,0)) = T(2,0) = (2^2,0) = (4,0) \neq (2,0) = 2(1,0) = 2T(1,0)$.

Proposição 5

Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é linear se, e só se, existem números reais a, b, c e d tais que:

$$T(x,y) = (ax + cy, bx + dy), \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstração

Sejam a, b, c e d os números reais dados por $T(\overrightarrow{e_1}) = T(1,0) = (a,b)$ e $T(\overrightarrow{e_2}) = T(0,1) = (c,d)$.

Então, se T é linear,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}) = x\,T(\overrightarrow{e_1}) + y\,T(\overrightarrow{e_2}) \\ &= x\,(a,b) + y\,(c,d) = (ax+cy, bx+dy), \end{aligned}$$

para todo vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Reciprocamente, se existem números reais a, b, c e d de modo que $T(x,y) = (ax+cy, bx+dy)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, é fácil verificar que T é linear.

A matriz $M_T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ real do tipo 2x2, cuja primeira coluna é o vetor $T(\overrightarrow{e_1}) = (a,b)$ e cuja segunda coluna é o vetor $T(\overrightarrow{e_2}) = (c,d)$, é a **matriz da transformação linear T**.

Observe, pela definição dada no Capítulo 8, que $T(\overrightarrow{u}) = M_T\overrightarrow{u}$, para todo vetor $\overrightarrow{u}$.

Exemplo 3

(a) A transformação linear nula se representa pela matriz nula: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) A matriz associada à transformação identidade é a matriz identidade que designamos também por I. Com efeito, $I(1,0) = (1,0)$ e $I(0,1) = (0,1)$, logo:

$$M_I = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Se $T(x,y) = (-x,-y)$ é a reflexão com respeito à origem, então $T(1,0) = (-1,0)$ e $T(0,1) = (0,-1)$.

Assim, a matriz que representa T é
$$M_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Seja ℓ a reta paralela ao vetor unitário $\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ que passa pela origem.

Então, por (9.2), $\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix}$ é a matriz da transformação Proj_ℓ e, por (9.3), $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ é a matriz da transformaçao R_ℓ.

(e) Um **cissalhamento ao longo do eixo OX** no plano é uma transformação linear dada por uma matriz da forma $C_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Isto é, se $\overrightarrow{v} = (x,y)$, então:
$$C_k(\overrightarrow{v}) = (x+ky, y),$$
isto é, $C_k(x,y) = (x+ky,y)$.

Note que,
$$\begin{aligned} C_k(\overrightarrow{e_1}) &= C_k(1,0) = (1,0) = \overrightarrow{e_1} \\ C_k(\overrightarrow{e_2}) &= C_k(0,1) = (k,1) = k\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \end{aligned}$$
ou seja, C_k deixa os pontos do eixo OX fixos e desloca todos os outros pontos do plano paralelamente ao eixo OX por um fator de k.

O cissalhamento ao longo do eixo OY se define de forma análoga.

(f) A transformação linear $T(x,y) = (ax, by)$ é chamada **transformação diagonal**. Uma homotetia de razão k é uma transformação diagonal com $a = b = k$. A transformação T se representa pela matriz diagonal $M_T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e o seu efeito é de mudar a escala dos objetos do plano a razão a ao longo do eixo OX e b ao longo do eixo OY.

Uma transformação diagonal T de razões $a \neq 0$ e $b \neq 0$, com $a \neq b$, transforma o círculo unitário $\mathcal{C}$ na elipse $\mathcal{E}$ de semi-eixos de comprimentos $|a|$ (semi-eixo paralelo ao eixo OX) e $|b|$ (semi-eixo paralelo ao eixo OY).

Com efeito, se $(x, y) \in \mathcal{C}$, então $x^2 + y^2 = 1$ e, sendo
$$T(x, y) = (ax, by) = (x', y'),$$
temos:
$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = \frac{(ax)^2}{a^2} + \frac{(bx)^2}{b^2} = x^2 + y^2 = 1,$$
isto é, $(x', y') \in \mathcal{E}$.

Reciprocamente, se $(x', y') \in \mathcal{E}$, o ponto $(x, y) = \left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{b}\right)$ pertence ao círculo unitário e é levado por T no ponto (x', y').

DEFINIÇÃO 6

A **rotação de ângulo θ em torno do ponto P_0** é a transformação $\mathcal{R}_{\theta,P_0} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada ponto P do plano associa o ponto P' obtido pela rotação de ângulo θ, no sentido positivo, do ponto P em torno do ponto P_0.

Determinemos primeiro a rotação
$$R_{\theta,O} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
em torno da origem. Sejam $P = (x, y)$ um ponto e $(x', y') = R_{\theta,O}(x, y)$ sua imagem.

Se φ é o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP}$ faz com o eixo OX no sentido positivo, então $P = (x, y) = (|\overrightarrow{OP}| \cos\varphi, |\overrightarrow{OP}| \operatorname{sen}\varphi)$ e, portanto,

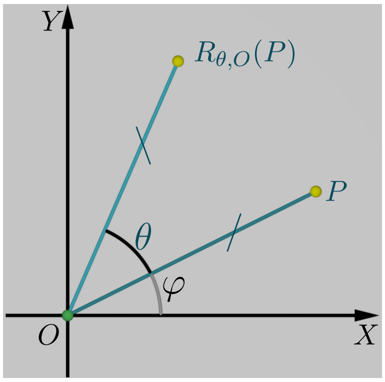

Figura 9.5: Rotação $R_{\theta,O}$

$$\begin{aligned}
& R_{\theta,O}(x, y) = (|\overrightarrow{OP}| \cos(\theta+\varphi), |\overrightarrow{OP}| \operatorname{sen}(\theta+\varphi)) \\
\iff\ & R_{\theta,O}(x, y) = (|\overrightarrow{OP}| (\cos\theta \cos\varphi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi), \\
& \qquad |\overrightarrow{OP}| (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)) \\
\iff\ & R_{\theta,O}(x, y) = (|\overrightarrow{OP}| \cos\varphi \cos\theta - |\overrightarrow{OP}| \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \\
& \qquad |\overrightarrow{OP}| \operatorname{sen}\varphi \cos\theta + |\overrightarrow{OP}| \cos\varphi \operatorname{sen}\theta) \\
\iff\ & R_{\theta,O}(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, y \cos\theta + x \operatorname{sen}\theta).
\end{aligned}$$

Logo,
$$R_{\theta,O}(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta) \qquad (9.4)$$

é uma transformação linear e $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é a matriz que a representa.

Seja agora a rotação R_{θ,P_0} de ângulo θ em torno do ponto $P_0 = (x_o, y_o)$.

Se $P = (x, y)$ é um ponto de $\mathbb{R}^2$, então $R_{\theta,P_0}(P)$ é o ponto P' tal que $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_0} + R_{\theta,O}(\overrightarrow{P_0P})$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} R_{\theta,P_0}(x,y) = ((x - x_o)\,\cos\theta - (y - y_o)\,\operatorname{sen}\theta + x_o,\\ (x - x_o)\,\operatorname{sen}\theta + (y - y_o)\,\cos\theta + y_o). \end{aligned} \tag{9.5}$$

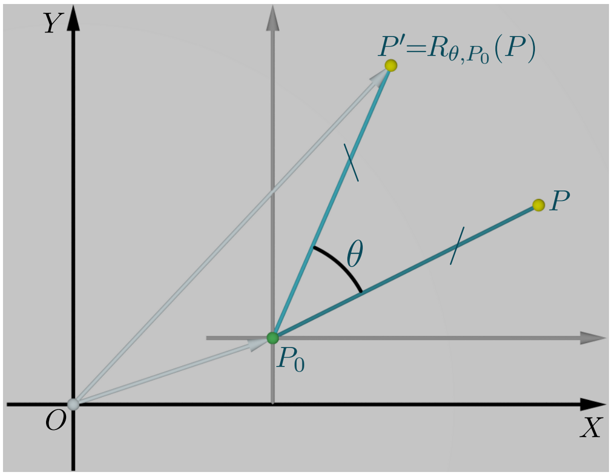

Figura 9.6: Rotação R_{θ,P_0}

Uma propriedade importante das transformações lineares é a seguinte.

Proposição 7

Toda transformação linear leva retas em retas.

Demonstração

Sejam T uma transformação linear, r a reta paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ que passa pelo ponto P, $\overrightarrow{v}' = T(\overrightarrow{v})$ e $P' = T(P)$, isto é, $\overrightarrow{OP'} = T(\overrightarrow{OP})$.

Afirmamos que T leva a reta r na reta r' que passa pelo ponto P' e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}'$.

Com efeito, um ponto Q pertence a r se, e só se, $\overrightarrow{PQ} = t\overrightarrow{v}$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{v}$.

Seja $Q \in r$ arbitrário e seja $Q' = T(Q)$. Então, pela linearidade de T, temos:

$\overrightarrow{OQ'} = T(\overrightarrow{OQ}) = T(\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{v}) = T(\overrightarrow{OP}) + tT(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OP'} + t\overrightarrow{v}'$.

Portanto, Q' pertence à reta r'.

9.4 Operações com transformações

As operações entre funções se aplicam também às transformações lineares, assim, podemos somar duas transformações lineares, multiplicar uma transformação linear por um escalar e compor duas transformações lineares para gerar novas transformações que também são lineares:

Definição 8

Sejam S e T transformações lineares do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos as transformações:

(a) Soma de S e T, designada $S+T$:

$$(S+T)(\overrightarrow{v}) = S(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v}).$$

(b) Produto de $\lambda \in \mathbb{R}$ por T, designado λT:

$$(\lambda T)(\overrightarrow{v}) = \lambda(T(\overrightarrow{v})).$$

(c) Composta de S e T, designada $S \circ T$:

$$(S \circ T)(\overrightarrow{v}) = S(T(\overrightarrow{v})).$$

É fácil verificar que as transformações $S+T$, λT e $S \circ T$ são lineares. Além disso, se verifica que a soma é associativa, comutativa, possui um elemento neutro aditivo (a transformação nula) e que toda transformação T possui um inverso aditivo $-T$, e que o produto de transformações por escalares é distributivo em relação à soma. Todas essas propriedades são consequência das correspondentes propriedades das operações de adição de vetores e de multiplicação de vetores por escalares (ver Exercícios).

Exemplo 4

(a) Se T é uma transformação linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, a transformação λT é a composta da homotetia H de razão λ com a transformação T.

Com efeito, $\lambda T(\overrightarrow{v}) = \lambda(T(\overrightarrow{v})) = H(T(\overrightarrow{v})) = H \circ T(\overrightarrow{v})$, para todo vetor $\overrightarrow{v}$.

(b) A composta $R_\theta \circ R_\varphi$ da rotação de ângulo θ em torno da origem com a rotação de ângulo φ em torno da origem é a rotação de ângulo $\theta + \varphi$ em torno da origem.

De fato, como $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e $M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ são as matrizes das rotações R_θ e R_φ, respectivamente, então:

$$\begin{aligned}
&(R_\theta \circ R_\varphi)(x,y) = R_\theta(R_\varphi(x,y))\\
&= R_\theta(x\,\cos\varphi - y\,\operatorname{sen}\varphi, x\,\operatorname{sen}\varphi + y\,\cos\varphi)\\
&= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}(x\,\cos\varphi - y\,\operatorname{sen}\varphi, x\,\operatorname{sen}\varphi + y\,\cos\varphi)\\
&= (\cos\theta\,(x\,\cos\varphi - y\,\operatorname{sen}\varphi) - \operatorname{sen}\theta\,(x\operatorname{sen}\varphi + y\,\cos\varphi),\\
&\qquad \operatorname{sen}\theta\,(x\,\cos\varphi - y\,\operatorname{sen}\varphi) + \cos\theta\,(x\operatorname{sen}\varphi + y\,\cos\varphi))\\
&= ((\cos\theta\,\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi)x - (\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi)y,\\
&\qquad (\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi + \cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi)x + (\cos\theta\,\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi)y)\\
&= (\cos(\theta+\varphi)x - \operatorname{sen}(\theta+\varphi)y, \operatorname{sen}(\theta+\varphi)x + \cos(\theta+\varphi)y).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$(R_\theta \circ R_\varphi)(x,y) = R_{\theta+\varphi}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A reflexão R_ℓ com respeito a uma reta ℓ que passa pela origem é dada por $R_\ell(\overrightarrow{v}) = 2\operatorname{Proj}_\ell(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$. Portanto, R_ℓ é a soma de duas transformações lineares. A primeira, $2\operatorname{Proj}_\ell$ é a composta $H \circ \operatorname{Proj}_\ell$ da homotetia H de razão 2 com a projeção ortogonal Proj_ℓ sobre a reta ℓ, e a segunda é a reflexão com respeito à origem $-\mathcal{I}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

(d) Uma transformação linear T é chamada **nilpotente** quando existe um inteiro positivo n tal que a composta de T com si própria n vezes é a transformação nula.

As transformações $T(x,y) = (y,0)$ e $S(x,y) = (0,x)$ são nilpotentes, pois,

$$T \circ T(x,y) = T(y,0) = (0,0) \text{ e } S \circ S(x,y) = S(0,x) = (0,0),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Note que $T = R \circ P_y$ e $S = R \circ P_x$, onde R é a reflexão com respeito à reta $y = x$ e P_x e P_y são as projeções ortogonais sobre os eixos OX e OY, respectivamente.

Observação 9

A operação de **composição de duas transformações** S e T do plano está definida também quando elas não são lineares por:

$$(S \circ T)(P) = S(T(P)),$$

para todo ponto P do plano.

A transformação identidade é o elemento neutro da operação de composição, pois, como

$$I \circ T(P) = T(P) \quad \text{e} \quad T \circ I(P) = T(P),$$

para toda transformação T e todo ponto P, temos $I \circ T = I$ e $T \circ I = T$.

A composição de transformações é associativa.

De fato, sejam $R, S, T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ três transformações. Então, para todo ponto P,

$$\begin{aligned}(R \circ (S \circ T))(P) &= R((S \circ T)(P)) = R(S(T(P))) \\ &= (R \circ S)(T(P)) = ((R \circ S) \circ T)(P).\end{aligned}$$

Isto é, $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

Exemplo 5

A **reflexão com deslizamento** é a transformação $R_{\ell,\overrightarrow{v}}$ que consiste na reflexão R_ℓ em torno de uma reta ℓ seguida de uma translação $T_{\overrightarrow{v}}$ ao longo de um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ paralelo a ℓ. Ou seja,

$$R_{\ell,\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_\ell.$$

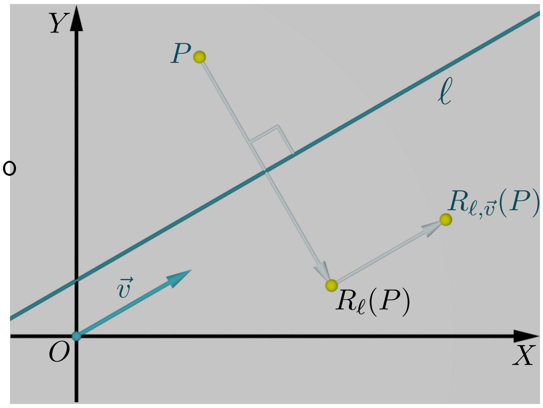

Figura 9.7: Reflexão com deslizamento $R_{\ell,\overrightarrow{v}}$

Se $\ell : -\operatorname{sen}\alpha\, x + \cos\alpha\, y = c$ e $\overrightarrow{v} = \lambda(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, com $\lambda \neq 0$, temos, por (9.2), que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}R_{\ell,\overrightarrow{v}}(x, y) &= (\cos 2\alpha\, x + \operatorname{sen} 2\alpha\, y, \operatorname{sen} 2\alpha\, x - \cos 2\alpha\, y) \\ &\quad +2c(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) + \lambda(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha).\end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 10

Uma transformação T é **invertível** quando existe uma transformação S tal que $S \circ T = I$ e $T \circ S = I$. A transformação S é chamada **inversa de** T e se designa T^{-1}.

OBSERVAÇÃO 11

Note que uma transformação T é invertível se, e só se, é injetora e sobrejetora, ou seja, T é bijetora.

Se T é uma transformação invertível, então T^{-1} é também uma transformação invertível e $(T^{-1})^{-1} = T$.

PROPOSIÇÃO 12

A inversa de uma transformação, quando existe, é única.

DEMONSTRAÇÃO

Seja T uma transformação linear invertível e sejam U e V transformações tais que:

$$U \circ T = T \circ U = I \quad \text{e} \quad V \circ T = T \circ V = I.$$

Logo, pela associatividade da composição,

$$(U \circ T) \circ V = I \circ V = V \iff U \circ (T \circ V) = V \iff U \circ I = V \iff U = V.$$

EXEMPLO 6

(a) A translação $T_{\overrightarrow{u}}$ pelo vetor $\overrightarrow{u} \neq 0$ não é uma transformação linear, mas é uma transformação invertível e sua inversa é a translação $T_{-\overrightarrow{u}}$ pelo vetor $-\overrightarrow{u}$.

Com efeito, para todo vetor $\overrightarrow{v}$, temos:

$$\begin{aligned}
T_{-\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) &= T_{-\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} \\
&= \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} = I(\overrightarrow{v}), \\
T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{-\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) &= T_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} \\
&= \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} = I(\overrightarrow{v}).
\end{aligned}$$

(b) Uma homotetia H de razão k não nula é invertível.

Com efeito, se S é a homotetia de razão $\frac{1}{k}$, temos:

$$\begin{aligned}
S \circ H(\overrightarrow{v}) &= S(k\overrightarrow{v}) = \frac{1}{k}(k\overrightarrow{v}) = \left(\frac{1}{k}k\right)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} = I(\overrightarrow{v}) \\
H \circ S(\overrightarrow{v}) &= H\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{v}\right) = k\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{v}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} = I(\overrightarrow{v}).
\end{aligned}$$

Logo, $H^{-1} = S$ é a homotetia de razão $\frac{1}{k}$.

(c) A reflexão R_ℓ em relação a uma reta ℓ é invertível e sua inversa é a própria R_ℓ. Isso segue diretamente da definição geométrica de R_ℓ.

Proposição 13

Sejam $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $M_T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ a matriz que a representa. Então, T é invertível se, e só se, $\det M_T \neq 0$.

Neste caso, T^{-1} é a transformação linear representada pela matriz $M_{T^{-1}} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, que é a matriz inversa da matriz M_T.

Demonstração

Sejam $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. Então, existe um único $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x', y')$ se, e só se, o sistema

$$\begin{cases} ax + cy = x' \\ bx + dy = y' \end{cases}$$

possui uma única solução. Mas isso ocorre se, e só se,

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Como a solução do sistema é

$$x = \frac{dx' - cy'}{ad - bc} \quad \text{e} \quad y = \frac{-bx' + ay'}{ad - bc},$$

temos que

$$T^{-1}(x', y') = \left(\frac{dx' - cy'}{ad - bc}, \frac{-bx' + ay'}{ad - bc}\right) \qquad \text{e} \qquad M_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-c}{ad-bc} \\ \dfrac{-b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

9.5 Isometrias no plano

Definição 14

Uma transformação T do plano é uma **isometria** quando

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q),$$

para quaisquer pontos P e Q. Isto é, T é uma isometria se preserva distâncias.

As isometrias são muito importantes pois nelas se traduz o conceito de congruência: *dois objetos geométricos são congruentes quando existe uma isometria que transforma um no outro*. As isometrias são os movimentos rígidos da Geometria Euclidiana.

Antes de classificarmos todas as isometrias do plano, vejamos algumas propriedades básicas desse tipo de transformações.

Proposição 15

1. Toda isometria leva pontos distintos em pontos distintos.
2. Toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares preservando a relação de um ponto estar entre outros dois e, consequentemente, leva retas em retas.
3. Toda isometria preserva a relação de paralelismo entre retas. Isto é, leva retas paralelas em retas paralelas.
4. Toda isometria preserva a relação de perpendicularidade entre retas. Isto é, leva retas perpendiculares em retas perpendiculares.
5. Toda isometria preserva ângulos. Isto é, se A, B e C são pontos não colineares, e $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ e $C' = T(C)$, então $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
6. A composta de duas isometrias é uma isometria.
7. Toda isometria é uma transformação invertível e a inversa é também uma isometria.

Demonstração

1. Equivalentemente, vamos mostrar que, se P e Q são pontos do plano tais que $T(P) = T(Q)$, então $P = Q$.

   Com efeito, se $T(P) = T(Q)$, temos $d(T(P), T(Q)) = 0$. Logo, $d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0$ e, portanto, $P = Q$.

2. Sejam P, Q e R pontos colineares distintos entre si tais que Q está entre P e R. Então,
$$\begin{aligned} d(T(P), T(R)) &= d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R) \\ &= d(T(P), T(Q)) + d(T(Q), T(R)). \end{aligned}$$

Logo, os pontos $T(P)$, $T(Q)$ e $T(R)$ são colineares e $T(Q)$ está entre $T(P)$ e $T(R)$. Segue daí que T leva a reta que passa por P e Q na reta que passa por $T(P)$ e $T(Q)$.

3. Sejam r_1 e r_2 retas paralelas. Suponhamos, por absurdo, que as retas $T(r_1)$ e $T(r_2)$ se intersectam e seja $\widetilde{P} \in T(r_1) \cap T(r_2)$. Então, existem pontos $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ tais que $T(P_1) = \widetilde{P} = T(P_2)$. Pelo item 1, temos que $P_1 = P_2$, o que é absurdo, pois $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

4. Sejam r e s retas perpendiculares se intersectando no ponto A. Sejam $r' = T(r)$ e $s' = T(s)$. Então, $A' = T(A) \in r' \cap s'$.

   Sejam $B \in r$ e $C \in s$ pontos diferentes de A e os pontos $B' = T(B) \in r'$ e $C' = T(C) \in s'$ diferentes de A'.

   Como T é uma isometria,

$$d(A', B') = d(A, B), \quad d(A', C') = d(A, C), \quad d(B', C') = d(B, C),$$

   e o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A, temos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$d(B', C')^2 = d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(A', B')^2 + d(A', C')^2.$$

   Logo, o triângulo $\triangle A'B'C'$ é retângulo em A'. Consequentemente, a reta $r' = T(r)$ que passa por A' e B' intersecta perpendicularmente a reta $s' = T(s)$ no ponto $A' = T(A)$.

5. Sejam A, B e C pontos do plano e sejam $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ e $C' = T(C)$. Como T é uma isometria, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, pelo critério **LLL**. Em particular, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

6. Sejam S e T isometrias. Dados pontos arbitrários P e Q no plano, temos:

$$d(S{\circ}T(P), S{\circ}T(Q)) = d(S(T(P)), S(T(Q))) = d(T(P), T(Q)) = d(P, Q).$$

   Isto é, $S \circ T$ é também uma isometria.

7. Seja T uma isometria no plano. Pelo item 1, T é uma transformação injetora (leva pontos distintos em pontos distintos). Para verificarmos que T é invertível, basta verificar que T é uma transformação sobrejetora. Isto é, que para todo ponto P', existe um ponto P tal que $T(P) = P'$.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano. Seja $O'{=}T(O)$ e sejam $O'X'{=}T(OX)$ e $O'Y'{=}T(OY)$ as imagens dos eixos OX e OY pela isometria T. Como T preserva perpendicularidade, $O'X'Y'$ é um sistema de eixos ortogonais. Além disso, como T preserva distâncias e a relação de ordem entre pontos colineares e leva retas paralelas em retas paralelas, temos que T leva um ponto $P=(x,y)$ num ponto P' cujas coordenadas no sistema $O'X'Y'$ são as mesmas que as coordenadas do ponto P no sistema OXY.

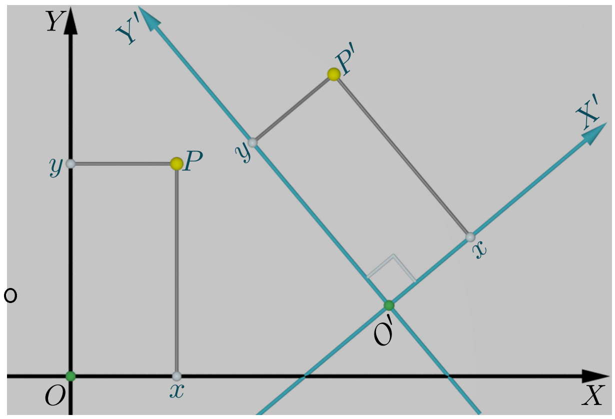

Figura 9.8: Ação da isometria T

Assim, dado um ponto P' no plano com coordenadas (x,y) em relação ao sistema $O'X'Y'$, o ponto P do plano com coordenadas (x,y) no sistema OXY é tal que $T(P)=P'$.

Portanto, T é uma transformação sobrejatora e, pelo item 1, T é bijetora. A inversa T^{-1} é definida da seguinte maneira: dado um ponto P' no plano, como T é sobrejetora, existe um ponto P no plano tal que $T(P)=P'$. Há apenas um ponto com essa propriedade porque T é injetora. Definimos, então, $T^{-1}(P')=P$.

A transformação T^{-1} assim definida é uma isometria, pois se $P'=T(P)$ e $Q'=T(Q)$, então

$$d(T^{-1}(P'),T^{-1}(Q'))=d(P,Q)=d(T(P),T(Q))=d(P',Q').$$

Portanto, T^{-1} é uma isometria.

Exemplo 7

(a) A transformação identidade $I(P)=P$ é uma isometria.

(b) Uma translação é uma isometria. De fato, se $P'=T_{\overrightarrow{v}}(P)$ e $Q'=T_{\overrightarrow{v}}(Q)$, então $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{v}=\overrightarrow{QQ'}$. Isto é, os segmentos PP' e QQ'

são equipolêntes e, portanto, $PP'Q'Q$ é um paralelogramo. Em particular, $d(P',Q') = d(P,Q)$.

PROPOSIÇÃO 16

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria tal que $T(O) = O$. Então,

$$\|T(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\| \quad \text{e} \quad \langle T(\overrightarrow{v}), T(\overrightarrow{w})\rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle$$

para quaisquer vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ em $\mathbb{R}^2$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OQ}$, $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$ temos que $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OP'}$ e $T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{OQ'}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|T(\overrightarrow{v}) - T(\overrightarrow{w})\| &= \|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'}\| = \|\overrightarrow{Q'P'}\| = d(Q', P') \\ &= d(T(Q), T(P)) = d(Q,P) = \|\overrightarrow{QP}\| \\ &= \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|. \end{aligned}$$

Ou seja, $\|T(\overrightarrow{v}) - T(\overrightarrow{w})\| = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|$ para quaisquer vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

Em particular, como $T(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, temos que $\|T(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\|$ para todo vetor $\overrightarrow{v}$. Então,

$$\begin{aligned} & \langle T(\overrightarrow{v}) - T(\overrightarrow{w}), T(\overrightarrow{v}) - T(\overrightarrow{w})\rangle = \|T(\overrightarrow{v}) - T(\overrightarrow{w})\|^2 = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|^2 \\ & \qquad = \langle \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\rangle \\ \iff & \langle T(\overrightarrow{v}), T(\overrightarrow{v})\rangle - 2\langle T(\overrightarrow{v}), T(\overrightarrow{w})\rangle + \langle T(\overrightarrow{w}), T(\overrightarrow{w})\rangle \\ & \qquad = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle - 2\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle \\ \iff & \|T(\overrightarrow{v})\|^2 - 2\langle T(\overrightarrow{v}), T(\overrightarrow{w})\rangle + \|T(\overrightarrow{w})\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle + \|\overrightarrow{w}\|^2 \\ \iff & \langle T(\overrightarrow{v}), T(\overrightarrow{w})\rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle. \end{aligned}$$

Isto é, $\langle T(\overrightarrow{v}), T(\overrightarrow{w})\rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle$ para todos os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

PROPOSIÇÃO 17

Se $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria tal que $T(O) = T(O)$, então T é linear.

Demonstração

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Então, pela Proposição 16,

$$\begin{aligned}
&\langle T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})-T(\overrightarrow{v})-T(\overrightarrow{w}),T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})-T(\overrightarrow{v})-T(\overrightarrow{w})\rangle\\
&=\langle T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}),T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})\rangle-2\langle T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}),T(\overrightarrow{v})\rangle\\
&\quad-2\langle T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}),T(\overrightarrow{w})\rangle+\langle T(\overrightarrow{v}),T(\overrightarrow{v})\rangle+2\langle T(\overrightarrow{v}),T(\overrightarrow{w})\rangle\\
&\quad+\langle T(\overrightarrow{w}),T(\overrightarrow{w})\rangle\\
&=\langle \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\rangle-2\langle \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}\rangle-2\langle \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\rangle+\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle\\
&\quad+2\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle+\langle \overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\rangle\\
&=\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle+2\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle+\langle \overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\rangle-2\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle-2\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle-2\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle\\
&\quad-2\langle \overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\rangle+\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle+2\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle+\langle \overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\rangle=0.
\end{aligned}$$

Assim, $\|T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})-T(\overrightarrow{v})-T(\overrightarrow{w})\|^2=0$, ou seja, $T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=T(\overrightarrow{v})+T(\overrightarrow{w})$.

De modo análogo, podemos mostrar que $\|T(\lambda\overrightarrow{v})-\lambda T(\overrightarrow{v})\|^2=0$ e, portanto, $T(\lambda\overrightarrow{v})=\lambda T(\overrightarrow{v})$ para todo vetor $\overrightarrow{v}$ e todo escalar λ.

Provamos, então, que T é linear.

Seja $L:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ uma isometria. Então a transformação $G:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, definida por $G(\overrightarrow{v})=L(\overrightarrow{v})-L(\overrightarrow{0})$, é uma aplicação tal que $G(\overrightarrow{0})=G(\overrightarrow{0})$. Além disso, G é uma isometria, pois $G=T_{\overrightarrow{w}}\circ L$ é a composta de duas isometrias, onde $T_{\overrightarrow{w}}$ é a translação pelo vetor $\overrightarrow{w}=-L(\overrightarrow{0})$. Logo, pela Proposição 17, G é uma isometria linear. Provamos, assim, o seguinte resultado:

Proposição 18

Toda isometria é a composta de uma isometria linear com uma translação.

Vamos analisar agora as isometrias lineares.

Seja $G:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ uma isometria linear e $M_G=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ a matriz que a representa, onde $G(\overrightarrow{e_1})=(a,b)$ e $G(\overrightarrow{e_2})=(c,d)$.

Como $\|\overrightarrow{e_1}\|=\|\overrightarrow{e_2}\|=1$ e $\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\rangle=0$ e, pela Proposição 16, $\|G(\overrightarrow{e_1})\|=\|\overrightarrow{e_1}\|=1$, $\|G(\overrightarrow{e_2})\|=\|\overrightarrow{e_2}\|=1$ e $\langle G(\overrightarrow{e_1}),G(\overrightarrow{e_2})\rangle=\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\rangle=0$, temos que os vetores $G(\overrightarrow{e_1})=(a,b)$ e $G(\overrightarrow{e_2})=(c,d)$ são ortonormais.

Seja θ o ângulo que o vetor (a,b) faz com o eixo OX no sentido positivo. Então, $(a,b)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$.

Sendo o vetor (c,d) unitário e ortogonal ao vetor (a,b), temos duas possibilidades:

$$(c,d) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \quad \text{ou} \quad (c,d) = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta).$$

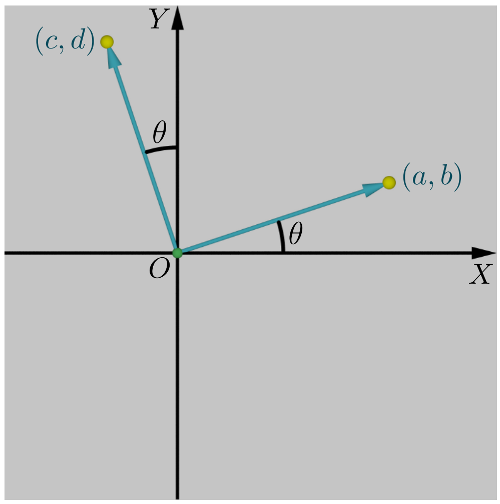

Figura 9.9: $(c,d) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

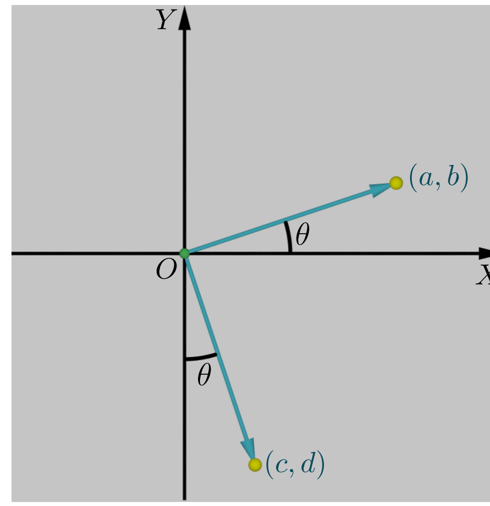

Figura 9.10: $(c,d) = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$

Se $(c,d) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, a isometria linear G é dada por:

$$G(x,y) = (\cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y, \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y),$$

e se $(c,d) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$,

$$G(x,y) = (\cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y, \operatorname{sen}\theta\, x - \cos\theta\, y).$$

No primeiro caso, $G(\overrightarrow{e_2}) = (c,d) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ faz ângulo θ, no sentido positivo, com o eixo OY e, no segundo caso, $G(\overrightarrow{e_2}) = (c,d) = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$ faz ângulo $\theta + \pi$, no sentido positivo, com o eixo OY.

Então, se $L(O) = (x_o, y_o)$, dizemos que a isometria

$$L(x,y) = (x\ \cos\theta - y\ \operatorname{sen}\theta + x_o, x\ \operatorname{sen}\theta + y\ \cos\theta + y_o) \tag{9.6}$$

preserva a orientação do plano, e que a isometria

$$L(x,y) = (x\ \cos\theta + y\ \operatorname{sen}\theta + x_o, x\ \operatorname{sen}\theta - y\ \cos\theta + y_o) \tag{9.7}$$

inverte a orientação do plano.

Note que o determinante da matriz $M_G = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ da parte linear G da isometria (9.6) que preserva orientação é $+1$, enquanto que o determinante da matriz $M_G = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ da parte linear G da isometria (9.7) que inverte orientação é -1.

Estamos agora em condições de classificar todas as isometrias do plano.

Teorema 19

As únicas isometrias do plano que preservam orientação são as translações ou as rotações em torno de um ponto.

Demonstração

Seja $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria que preserva a orientação do plano,

$$L(x, y) = (x\,\cos\theta - y\,\operatorname{sen}\theta + x_o, x\,\operatorname{sen}\theta + y\,\cos\theta + y_o).$$

Se $\theta = 0$, então $L(x, y) = (x + x_o, y + y_o)$ é uma translação.

Suponhamos que $\theta \in (0, 2\pi)$. Vamos mostrar que $L = R_{\theta,P_1}$ é a rotação de ângulo θ em torno de um ponto $P_1 = (x_1, y_1)$.

Por (9.5), a rotação de centro $P_1 = (x_1, y_1)$ e ângulo θ transforma o ponto (x, y) no ponto (x', y') tal que

$$\begin{cases} x' = (x - x_1)\cos\theta - (y - y_1)\operatorname{sen}\theta + x_1 \\ y' = (x - x_1)\operatorname{sen}\theta + (y - y_1)\cos\theta + y_1. \end{cases}$$

Então, para que L seja igual a R_{θ,P_1}, devemos ter

$$\begin{cases} (x - x_1)\cos\theta - (y - y_1)\operatorname{sen}\theta + x_1 = x\,\cos\theta - y\,\operatorname{sen}\theta + x_o \\ (x - x_1)\operatorname{sen}\theta + (y - y_1)\cos\theta + y_1 = x\,\operatorname{sen}\theta + y\,\cos\theta + y_o, \end{cases}$$

para todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Simplificando, obtemos:

$$\begin{cases} (1 - \cos\theta)\,x_1 + \operatorname{sen}\theta\,y_1 = x_o \\ -\operatorname{sen}\theta\,x_1 + (1 - \cos\theta)\,y_1 = y_o, \end{cases}$$

Como o determinante deste sistema

$$(1 - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta$$

é diferente de zero, pois $\theta \in (0, 2\pi)$, ele possui apenas uma solução (x_1, y_1).

Teorema 20 As únicas isometrias do plano que invertem orientação são as reflexões em torno de uma reta ou as reflexões com deslizamento.

Demonstração Seja $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria que inverte a orientação do plano,

$$L(x,y) = (x\,\cos\theta + y\,\operatorname{sen}\theta + x_o, x\,\operatorname{sen}\theta - y\,\cos\theta + y_o).$$

Se $(x_o, y_o) = (0,0)$, temos que:

$$L(x,y) = (x\,\cos\theta + y\,\operatorname{sen}\theta, x\,\operatorname{sen}\theta - y\,\cos\theta).$$

Então, se $\alpha = \frac{\theta}{2}$,

$$L(x,y) = (x\,\cos 2\alpha + y\,\operatorname{sen} 2\alpha, x\,\operatorname{sen} 2\alpha - y\,\cos 2\alpha).$$

Logo, por (9.3), L é a reflexão em torno da reta $\ell : -\operatorname{sen}\alpha\, x + \cos\alpha\, y = 0$ paralela ao vetor $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ que passa pela origem.

No caso geral, $L = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_\ell$, onde $T_{\overrightarrow{v}}$ é a translação ao longo do vetor $\overrightarrow{v} = (x_o, y_o)$.

Vamos mostrar que $L = R_{\ell', \overrightarrow{w}}$ é uma reflexão com deslizamento, onde ℓ' é uma reta paralela à reta ℓ e $\overrightarrow{w}$ é um vetor paralelo à reta ℓ'.

Sejam

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= \langle (x_o, y_o), (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)\rangle(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) \\ &= (-x_o \operatorname{sen}\alpha + y_o\cos\alpha)(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) \end{aligned}$$

a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{v} = (x_o, y_o)$ sobre o vetor $(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$ normal à reta ℓ e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} &= \langle (x_o, y_o), (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)\rangle(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \\ &= (x_o\cos\alpha + y_o \operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \end{aligned}$$

a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{v} = (x_o, y_o)$ sobre a reta ℓ.

Considere o ponto Q tal que $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$, ou seja,

$$Q = (-c\,\operatorname{sen}\alpha, c\,\cos\alpha),$$

onde $c = \frac{1}{2}(-x_o \operatorname{sen}\alpha + y_o\cos\alpha)$.

Então, a reta ℓ' paralela à reta ℓ que passa pelo ponto Q é dada por

$$\ell' : -\operatorname{sen}\alpha\, x + \cos\alpha\, y = c,$$

e a reflexão em torno dela é, por (9.3),

$$\begin{aligned} R_{\ell'}(x,y) &= (x\,\cos 2\alpha + y\,\operatorname{sen} 2\alpha, x\,\operatorname{sen} 2\alpha - y\,\cos 2\alpha) \\ &\quad +2c(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha). \end{aligned}$$

Observe que $2c(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$ é o vetor $\overrightarrow{u}$.

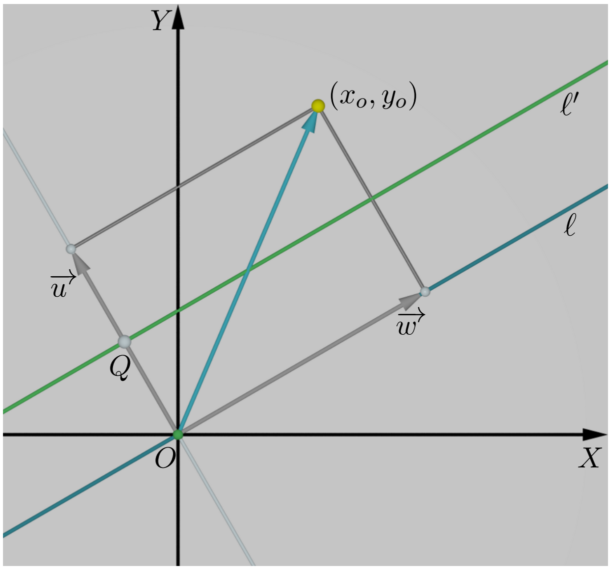

Figura 9.11: $L = T_{\overrightarrow{w}} \circ R_{\ell'}$

Como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} &= (x_o \operatorname{sen}^2\alpha - y_o \cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha, -x_o\cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha + y_o\cos^2\alpha) \\ &\quad +(x_o\cos^2\alpha + y_o\cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha, x_o\cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha + y_o\operatorname{sen}^2\alpha) \\ &= (x_o, y_o), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} L(x,y) &= (x\,\cos 2\alpha + y\,\operatorname{sen} 2\alpha, x\,\operatorname{sen} 2\alpha - y\,\cos 2\alpha) \\ &\quad +2c(-\,\operatorname{sen}\alpha,\,\cos\alpha) + (x_o\cos\alpha + y_o\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha), \end{aligned}$$

ou seja, $L = T_{\overrightarrow{w}} \circ R_{\ell'}$, como queriamos provar.

9.6 Exercícios

1. Ache a imagem da reta $r : 3x - 2y = 1$ pela translação $T_{\overrightarrow{v}}$, onde $\overrightarrow{v} = (-1, 1)$.

2. Determine a reflexão do círculo $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ com respeito aos eixos coordenados e com respeito à reta $x + 3y = -2$.

3. Ache um vetor $\overrightarrow{v}$ de modo que a translação $T_{\overrightarrow{v}}$ por esse vetor, leve a curva $y = ax^2 + bx + c$ na curva $y = ax^2$.

4. Sejam P_1 e P_2 pontos do plano. Mostre que a composta das simetrias R_{P_1} e R_{P_2} é a translação $T_{\overrightarrow{v}}$ pelo vetor $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{P_1P_2}$.

5. Ache e identifique a imagem $R(\mathcal{C})$ da curva $\mathcal{C} : ax^2 + 2bxy + ay^2 = c$ pela rotação R de $45°$ em torno da origem.

6. Sejam R_1 a rotação de ângulo θ_1 em torno do ponto P_1 e R_2 a rotação de ângulo θ_2 em torno do ponto P_2. Mostre que a composta $R_1 \circ R_2$ é igual à rotação de ângulo $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ em torno de um terceiro ponto P_3.

7. Verifique que uma transformação constante é uma transformação linear se, e somente se, é a transformação linear nula.

8. Prove que:

   (a) a soma de duas transformações lineares é uma transformação linear;

   (b) o produto de um escalar λ por uma transformação linear é também uma transformação linear;

   (c) a composta de duas transformações lineares é uma transformação linear;

   (d) a composição de transformações lineares é distributiva com respeito à soma de transformações lineares;

   (e) a composição de transformações lineares não é em geral comutativa.

   Indicação: componha um cissalhamento com uma homotetia.

9. Determine:

(a) a imagem do círculo de centro $(2,2)$ e raio 1 pela homotetia de razão $1/2$ e pela homotetia de razão 2;

(b) a imagem da reta r paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,2)$ que passa pelo ponto $P = (2,3)$ pelas homotetias do item anterior.

10. Sabemos que uma transformação linear leva retas em retas. Se uma transformação no plano leva retas em retas então ela é uma transformação linear?

11. Ache uma isometria que leve a reta $2x - 4y = -3$ no eixo OX.

12. Determine a isometria $T = R_2 \circ R_1$ dada pela reflexão R_1 com respeito à reta $y = x$ seguida da reflexão R_2 com respeito à reta $x = 0$.

13. Determine uma transformação linear L e uma translação $T_{\overrightarrow{v}}$ por um vetor $\overrightarrow{v}$ de modo que a transformação $S = T_{\overrightarrow{v}} \circ L$ leve o círculo $\mathcal{C}$ de centro na origem e raio 1 na elipse $\mathcal{E} : \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$.

14. Considere as cônicas $\mathcal{C}$ dadas no Exercício 6 do Capítulo 8. Para cada uma delas, encontre uma isometria $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que $T(\mathcal{C})$ seja uma elipse ou uma hipérbole com centro na origem e eixos focais paralelos aos eixos coordenados ou uma parábola com vértice na origem e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

15. Sejam ℓ e ℓ' retas concorrentes não perpendiculares do plano. A **reflexão com respeito à reta ℓ, paralelamente a ℓ'**, é a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada ponto P associa o ponto $P' = T(P)$ tal que PP' é paralelo a ℓ' e ℓ corta o segmento PP' no seu ponto médio. Determine a expressão de T quando $\ell : -\cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y = 0$ e $\ell' : -\cos\varphi\, x + \operatorname{sen}\varphi\, y = 0$, com $\varphi \neq \theta + \dfrac{\pi}{2}$. A transformação T é uma isometria? T preserva ângulo?

16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação. Um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é um ponto fixo de T se $T(P) = P$. Mostre que:

(a) O ponto P_0 é o único ponto fixo da rotação R_{θ,P_0} de ângulo θ em torno de P_0.

(b) Os pontos fixos da reflexão R_ℓ em torno de uma reta ℓ são os pontos de ℓ.

(c) Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, a translação $T_{\overrightarrow{v}}$ e a reflexão com deslizamento $R_{\ell,\overrightarrow{v}}$ não possuem pontos fixos.

17. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 duas retas paralelas e o vetor $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AB}$, com $A \in \ell_1$, $B \in \ell_2$ e $\overrightarrow{AB} \perp \ell_1$. Mostre que $T_{\overrightarrow{v}} = R_{\ell_2} \circ R_{\ell_1}$, onde R_{ℓ_1} e R_{ℓ_2} são as reflexões em torno das retas ℓ_1 e ℓ_2, respectivamente.

18. Sejam R_{ℓ_1} e R_{ℓ_2} as reflexões em torno das retas ℓ_1 e ℓ_2 concorrentes, e $\dfrac{\theta}{2}$ o ângulo de ℓ_1 para ℓ_2 no sentido positivo. Mostre que $R_{\ell_2} \circ R_{\ell_1}$ é a rotação de ângulo θ em torno do ponto de interseção de ℓ_1 com ℓ_2.

19. Mostre que uma reflexão com deslizamento pode ser escrita como a composta de três reflexões.

20. Mostre que toda isometria do plano é uma reflexão, a composta de duas reflexões ou a composta de três reflexões.

◇