10

Curvas Planas Parametrizadas

Sumário

Ao estudarmos as retas no plano, vimos que a reta r que passa por dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ é dada pelas seguintes equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Estas equações expressam os valores das coordenadas cartesianas x e y de um ponto qualquer da reta r em função de apenas uma variável, a variável t, denominada parâmetro.

Neste capítulo veremos como obter as equações paramétricas de algumas curvas planas, dentre elas as cônicas, usando, por exemplo, relações trigonométricas básicas e observando as condições que um ponto deve satisfazer para pertencer a uma curva dada.

Definição 1

Seja $\mathcal{C}$ uma curva plana. Dizemos que uma aplicação $\gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é uma parametrização de $\mathcal{C}$ se a sua imagem $\gamma(D)$ coincide com $\mathcal{C}$, ou seja,

$$\mathcal{C} = \gamma(D) = \{(x(t), y(t)) \,|\, t \in D\}\,,$$

onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}$ (geralmente um intervalo ou uma reunião finita de intervalos).

A imagem $\gamma(D) \subset \mathbb{R}^2$ é também chamada traço de γ.

A parametrização de uma curva plana pode ser vista como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca em um intervalo de tempo. Neste caso, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ nos dá a posição que o móvel ocupa em cada instante t.

10.1 Parametrização das cônicas

Nesta seção veremos como parametrizar uma elipse, uma hipérbole e uma parábola. Começaremos este estudo por um caso particular da elipse, mas extremamente importante, que é o círculo.

10.1.1 Parametrização do círculo

Seja $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ o círculo de centro na origem e raio $r > 0$.

Seja t a medida, em radianos, do ângulo $\widehat{P_0OP}$ (tomada no sentido positivo), onde O é a origem do sistema cartesiano de coordenadas, $P_0 = (r, 0)$ é a interseção do círculo com o semieixo positivo OX e $P = (x, y) \in \mathcal{C}$.

Consideremos o ponto $P' = (x, 0)$. Como o triângulo OPP' é retângulo em P', as expressões das coordenadas x e y, em função do parâmetro t, são:

$$\boxed{x = x(t) = r\cos t \quad \text{e} \quad y = y(t) = r\,\text{sen}\, t}$$

Fazendo t percorrer os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, obtemos todos os pontos do círculo.

Se quisermos, podemos considerar t percorrendo todos os valores reais. Isto implica realizar um número infinito de voltas sobre o círculo. Portanto, uma possibilidade de equações paramétricas para o círculo $\mathcal{C}$ é:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = r\,\cos t \\ y = r\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

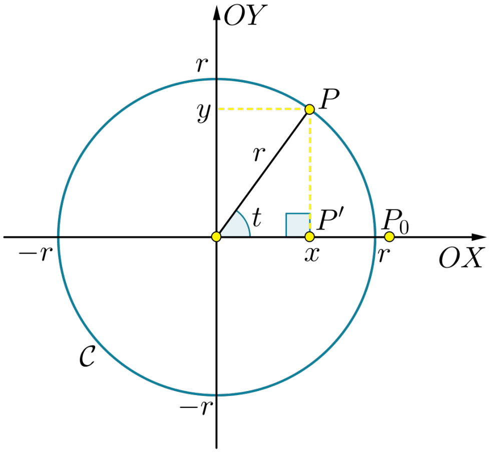

Figura 10.1: Círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$.

Observe que, para quaisquer valores reais a e b, com $a \neq 0$, as equações

$$x = r\,\cos(at + b) \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}(at + b),$$

também são equações paramétricas para o círculo $\mathcal{C}$, pois:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2(at + b) + r^2\,\text{sen}^2(at + b) = r^2\,,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e conforme t percorre todos os valores em $\left[-\dfrac{b}{a}, \dfrac{2\pi - b}{a}\right)$, o ponto $P = (r\,\cos(at + b), r\,\text{sen}(at + b))$ percorre todos os pontos do círculo.

Em particular, para $a = -1$ e $b = \pi/2$, obtemos que

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = r\,\cos(\pi/2 - t) = r\,\text{sen}\, t \\ y = r\,\text{sen}(\pi/2 - t) = r\,\cos t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas para o círculo $\mathcal{C}$.

Seja agora o círculo de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$

$$\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Por uma translação do sistema de eixos OXY, obtemos um novo sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, onde $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é o centro do círculo. Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, a equação cartesiana do círculo é $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = r^2$, pois, nesse sistema, o círculo $\mathcal{C}$ tem raio r e centro na origem.

Sendo $\overline{x} = r\cos t$ e $\overline{y} = r\,\mathrm{sen}\,t$, $t \in \mathbb{R}$, equações paramétricas de $\mathcal{C}$ nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, segue que:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_0 + \overline{x} = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + \overline{y} = y_0 + r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas do círculo $\mathcal{C}$ nas coordenadas x e y.

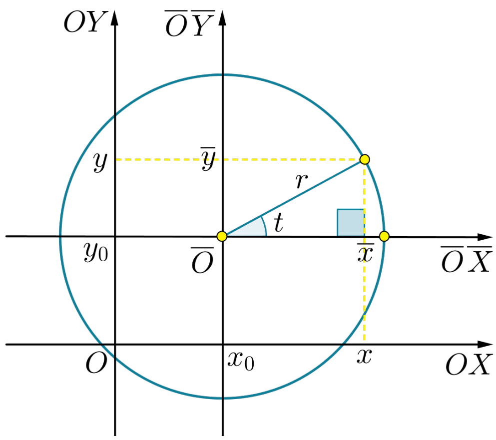

Figura 10.2: Círculo $\mathcal{C} :: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Exemplo 1

Parametrize o círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$.

Solução. Completando os quadrados,

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12 \iff (x-2)^2 + (y-3)^2 = 12 + 4 + 9 = 25\,,$$

vemos que $\mathcal{C}$ é o círculo de centro $C = (2, 3)$ e raio $r = 5$. Pelo visto acima,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2 + 5\cos t \\ y = 3 + 5\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas do círculo $\mathcal{C}$.

10.1.2 Parametrização de uma elipse

Seja $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ uma elipse de centro na origem.

Seja $\mathcal{C} : \alpha^2 + \beta^2 = 1$ o círculo de centro na origem e raio $r = 1$. Como $(x, y) \in \mathcal{E}$ se, e só se, $(\alpha, \beta) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \in \mathcal{C}$, e $\mathcal{C} : \begin{cases} \alpha = \cos t \\ \beta = \operatorname{sen} t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{C} : \begin{cases} \alpha = \operatorname{sen} t \\ \beta = \cos t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ são parametrizações de $\mathcal{C}$, obtemos que

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \begin{cases} x = a \operatorname{sen} t \\ y = b\cos t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R},$$

são possíveis parametrizações da elipse $\mathcal{E}$.

O significado geométrico do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ pode ser visto da seguinte maneira.

Sejam $\mathcal{C}_a : x^2 + y^2 = a^2$ o círculo de centro na origem e raio a e $\mathcal{C}_b : x^2 + y^2 = b^2$ o círculo de centro na origem e raio b.

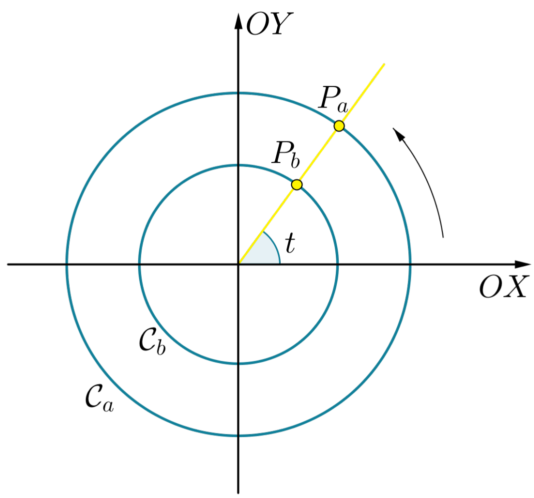

Figura 10.3: Círculos $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_b$, $a > b > 0$.

Considere, para cada $t \in \mathbb{R}$, os pontos $P_a = (a\cos t, a \operatorname{sen} t) \in \mathcal{C}_a$ e $P_b = (b\cos t, b \operatorname{sen} t) \in \mathcal{C}_b$, tais que os vetores $\overrightarrow{OP_a}$ e $\overrightarrow{OP_b}$ fazem um ângulo t, no sentido positivo, com o semieixo positivo OX.

A interseção da reta $r_a : x = a\cos t$, paralela ao eixo$-OY$ que passa pelo ponto P_a, com a reta $r_b : y = b \operatorname{sen} t$, paralela ao eixo$-OX$ que passa pelo ponto P_b, nos dá o ponto $P = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$ pertencente à elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

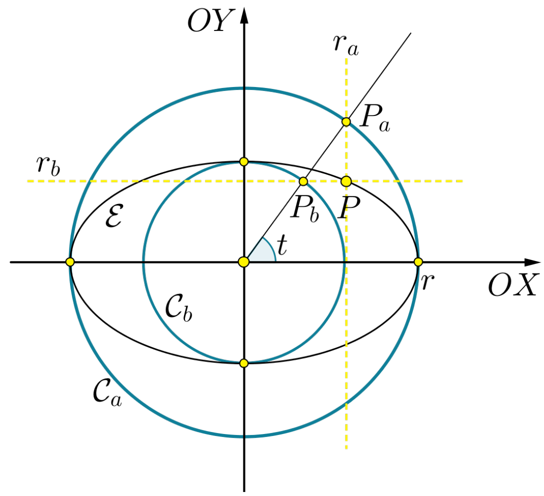

Figura 10.4: Construção da elipse $\mathcal{E}$

Seja agora a elipse $\mathcal{E} : \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0).

Por uma translação dos eixos coordenados, obtemos um sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, onde $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é o centro da elipse. Nas novas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação cartesiana da elipse fica na forma $\mathcal{E} : \dfrac{\overline{x}^2}{a^2} + \dfrac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$ e, portanto,

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \overline{x} = a\cos t \\ \overline{y} = b\,\text{sen}\,t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \begin{cases} \overline{x} = a\,\text{sen}\,t \\ \overline{y} = b\cos t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

são parametrizações da elipse nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, obtemos que:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\,\text{sen}\,t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \begin{cases} x = x_0 + a\,\text{sen}\,t \\ y = y_0 + b\cos t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R},$$

são parametrizações da elipse nas coordenadas x e y.

EXEMPLO 2

Parametrize a elipse $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = -1$.

Solução. Completando os quadrados,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4y^2 - 16y = -1 &\iff (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = -1 + 1 + 16 = 16 \\ &\iff \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1\,, \end{aligned}$$

vemos que a elipse $\mathcal{E}$ tem centro no ponto $(1, 2)$, reta focal $y = 2$ paralela ao eixo$-OX$, $a = 4$ e $b = 2$.

Então,

$$\mathcal{E}:\begin{cases} x = 1 + 4\cos t \\ y = 2 + 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad \text{e} \quad \mathcal{E}:\begin{cases} x = 1 + 4\,\mathrm{sen}\,t \\ y = 2 + 2\cos t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

são parametrizações de $\mathcal{E}$.

10.1.3 Parametrização de uma hipérbole

Consideremos a hipérbole $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$ equilátera $(a = b = 1)$ de centro na origem cuja reta focal é o eixo$-OX$.

Sejam $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\mathrm{senh}\, t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico. Os pontos $(\cosh t, \mathrm{senh}\, t)$ e $(-\cosh t, \mathrm{senh}\, t)$ pertencem à hipérbole $\mathcal{H}$, pois,

$$(\cosh t)^2 - (\mathrm{senh}\, t)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

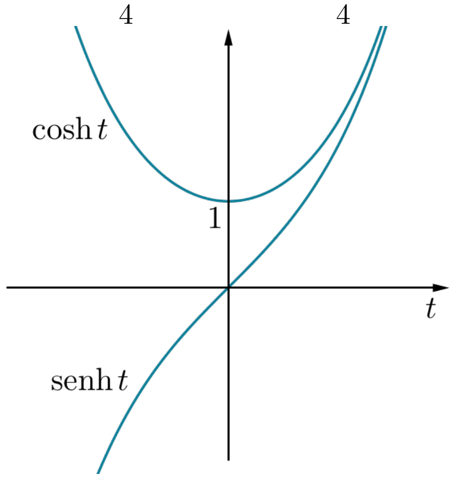

Figura 10.5: Gráficos de $\cosh t$ e $\mathrm{senh}\, t$.

Além disso, variando t em $\mathbb{R}$, vemos que $x = \cos ht$ $(x = -\cos ht)$ percorre todos os valores em $[1, +\infty)$ (respectivamente, $(-\infty, -1]$), enquanto $y = b\,\mathrm{senh}\, t$ percorre todos os valores reais.

Portanto, $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \mathrm{senh}\, t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização do ramo $\mathcal{H}_+$ de $\mathcal{H}$ que intesecta o semieixo positivo OX, e $\begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \mathrm{senh}\, t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização do ramo $\mathcal{H}_-$ de $\mathcal{H}$ que intesecta o semieixo negativo OX.

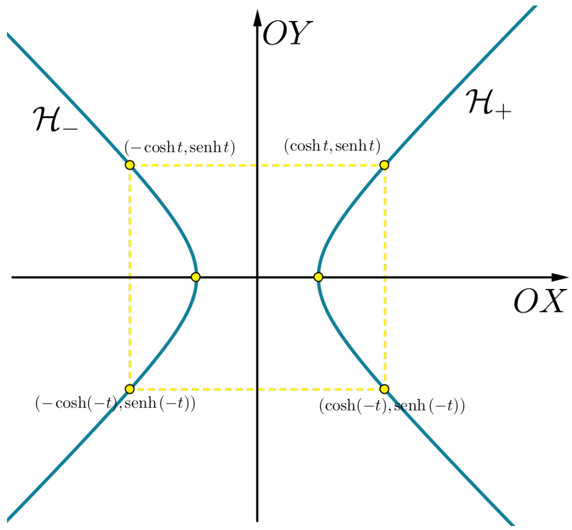

Figura 10.6: Gráfico de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_-$.

Seja agora a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OX$.

Considere a hipérbole $\mathcal{H}_0 : \alpha^2 - \beta^2 = 1$.

Como $(x, y) \in \mathcal{H}$ se, e só se, $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{x-x_0}{a}, \dfrac{y-y_0}{b}\right) \in \mathcal{H}_0$ e $\begin{cases} \alpha = \pm\cosh t \\ \beta = \operatorname{senh} t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização de $\mathcal{H}_0$, temos que

$$\begin{cases} x = x_0 \pm a \cosh t \\ y = y_0 + b \operatorname{senh} t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H}$.

De modo análogo, podemos verificar que

$$\begin{cases} x = x_0 + b \operatorname{senh} t \\ y = y_0 \pm a \cosh t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Exemplo 3

Parametrize a hipérbole $\mathcal{H} : x^2 - 4y^2 + 2x - 8y = 7$.

Solução. Completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 4y^2 - 8y = 7 &\iff (x+1)^2 - 4(y+1)^2 = 7 + 1 - 4 = 4 \\ &\iff \frac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{H}$ é uma hipérbole de centro $(-1,-1)$, reta focal $y=-1$ paralela ao eixo$-OX$, $a=2$ e $b=1$.

Assim, pelo visto acima,

$$\mathcal{H}:\begin{cases} x=\pm 2\cosh t-1 \\ y=\operatorname{senh} t-1 \end{cases} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{H}$.

Exemplo 4

Parametrize a hipérbole $\mathcal{H}: -x^2+9y^2-2x+18y-1=0$.

Solução. Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} 9(y^2+2y)-(x^2+2x)=1 &\iff 9(y+1)^2-(x+1)^2=1+9-1=9 \\ &\iff (y+1)^2-\frac{(x+1)^2}{9}=1\,. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{H}$ é uma hipérbole de centro $(-1,-1)$, reta focal $x=-1$ paralela ao eixo$-OY$, $a=1$ e $b=3$.

Portanto,

$$\mathcal{H}:\begin{cases} x=3\operatorname{senh} t-1 \\ y=\pm\cosh t-1 \end{cases} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

é uma possível parametrização de $\mathcal{H}$.

10.1.4 Parametrização de uma parábola

As equações canônicas das parábolas se caracterizam por apresentar uma das variáveis no primeiro grau. Isso permite expressar essa variável como *função da variável do segundo grau*.

Assim, por exemplo, na parábola $\mathcal{P}$ de equação

$$(x-a)^2=k(y-b)\iff y=\frac{1}{k}(x-a)^2+b\,,$$

de vértice (a,b) e reta-focal paralela ao eixo$-OY$, escolhendo o parâmetro t como sendo $x-a$, a variável y se expressa como $y=\dfrac{1}{k}t^2+b$.

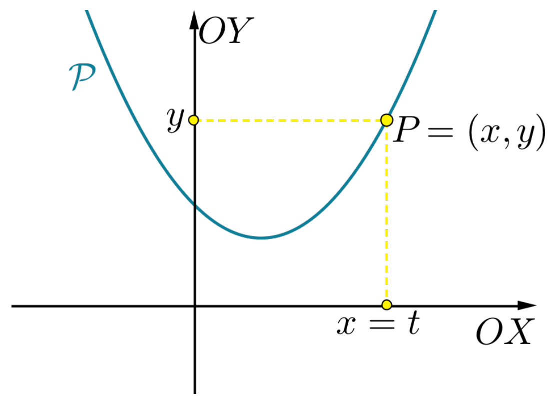

Figura 10.7: $\mathcal{P} : (x-a)^2 = k(y-b)$.

Portanto, $\mathcal{P}$ tem por equações paramétricas:

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = t + a \\ y = \dfrac{1}{k} t^2 + b \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}}$$

Exemplo 5

Parametrize a parábola $\mathcal{P} : y^2 - 2x + 4y = 0$.

Solução. Completando o quadrado:

$$y^2 + 4y - 2x = 0 \quad \iff \quad (y+2)^2 = 2x + 4 = 2(x+2)\,,$$

vemos que $\mathcal{P}$ é uma parábola de vértice $V = (-2, -2)$ e reta focal $y = -2$ paralela ao eixo$-OX$.

Então, como $x = \dfrac{(y+2)^2}{2} - 2$, temos que:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} - 2 \\ y = t - 2 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas da parábola $\mathcal{P}$.

Exemplo 6

Determine uma parametrização da cônica dada pela equação do segundo grau:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0\,. \tag{10.1}$$

Solução. Os coeficientes da equação são $A = 9$, $B = -24$, $C = 16$, $D = -20$, $E = 110$, $F = 50$ e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4 \times 9 \times 16 = 0$. Portanto, a equação é do tipo parabólico.

Seja $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$ a matriz da equação 10.1 e

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 9 & 12 \\ 12 & \lambda - 16 \end{pmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 16) - 144 \\ &= \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25) \end{aligned}$$

o seu polinômio característico, cujas raízes são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 25$, ou seja, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 25$ são os autovalores da matriz $\mathcal{A}$.

Os autovetores $\overrightarrow{u_1} = (x, y)$ relativos ao autovalor $\lambda_1 = 0$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 9)x + 12y = 0 \\ 12x + (\lambda_1 - 16)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -9x + 12y = 0 \\ 12x - 16y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \iff x = \frac{4y}{3}.$$

Assim, $\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ é um autovetor unitário relativo ao autovalor $\lambda_1 = 0$. E, portanto, $\overrightarrow{u_2} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ é um autovetor unitário relativo ao autovalor $\lambda_2 = 25$.

Seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema obtido girando, no sentido positivo, os eixos OX e OY de ângulo $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$.

Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}$, a equação 10.1 fica na forma

$$\begin{aligned} & 25\overline{y}^2 + \left\langle \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} (\overline{x}, \overline{y}), (-20, 110) \right\rangle - 50 = 0 \\ \iff\ & 25\overline{y}^2 + < (4/5\overline{x} - 3/5\overline{y}, 3/5\overline{x} + 4/5\overline{y}), (-20, 110) > -50 = 0 \\ \iff\ & 25\overline{y}^2 - 16\overline{x} + 12\overline{y} + 66\overline{x} + 88\overline{y} - 50 = 0 \\ \iff\ & 25\overline{y}^2 + 50\overline{x} + 100\overline{y} - 50 = 0 \\ \iff\ & \overline{y}^2 + 2\overline{x} + 4\overline{y} - 2 = 0. \end{aligned}$$

Completando o quadrado, temos:

$$\overline{y}^2 + 4\overline{y} = -2\overline{x} + 2 \iff (\overline{y} + 2)^2 = -2\overline{x} + 2 + 4 = -2(\overline{x} - 3)\,.$$

Assim, a curva representa uma parábola de vértice $\overline{V} = (3, -2)$, parâmetro $p = \frac{1}{2}$, reta focal $\overline{\ell} : \overline{y} = -2$, foco $\overline{F} = \left(3 - \frac{1}{2}, -2\right) = \left(\frac{5}{2}, -2\right)$ e diretriz $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Portanto,

$$\begin{cases} \overline{x} = -\dfrac{t^2}{2} + 3 \\ \overline{y} = t - 2 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da parábola nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Então, usando a mudança de coordenadas $x = \frac{1}{5}(4\overline{x} - 3\overline{y})$ e $y = \frac{1}{5}(3\overline{x} + 4\overline{y})$, obtemos que:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\left(4\left(-\dfrac{t^2}{2} + 3\right) - 3(t-2)\right) = -\dfrac{1}{5}(2t^2 + 3t - 18) \\ y = \dfrac{1}{5}\left(3\left(-\dfrac{t^2}{2} + 3\right) + 4(t-2)\right) = \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{3}{2}t^2 + 4t + 1\right) \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da cônica.

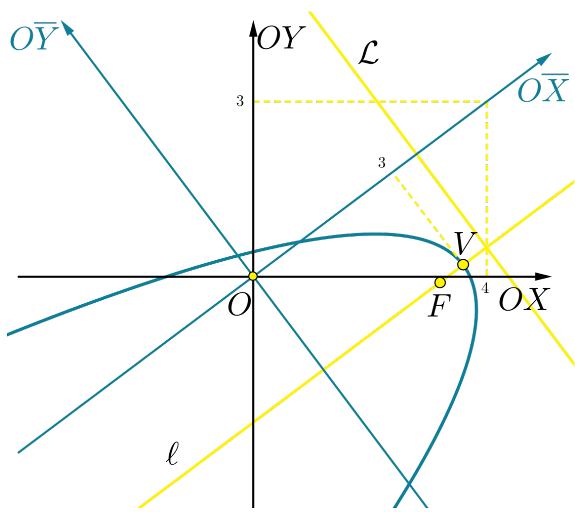

Figura 10.8: Parábola $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$

10.2 Parametrização de curvas planas conhecidas

10.2.1 Curva de Agnesi.

Seja $\mathcal{C}$ um círculo de raio r tangente a duas retas paralelas s_1 e s_2. Sejam O e A os pontos de tangência de $\mathcal{C}$ com s_1 e s_2, respectivamente. Do ponto

O tracemos uma semirreta em direção à reta s_2. Sejam R e Q os pontos de interseção desta semirreta com $\mathcal{C}$ e s_2, respectivamente. Tracemos o segmento QD, perpendicular a s_1, com $D \in s_1$, e a reta s paralela a s_1 passando por R (veja a Figura 10.9).

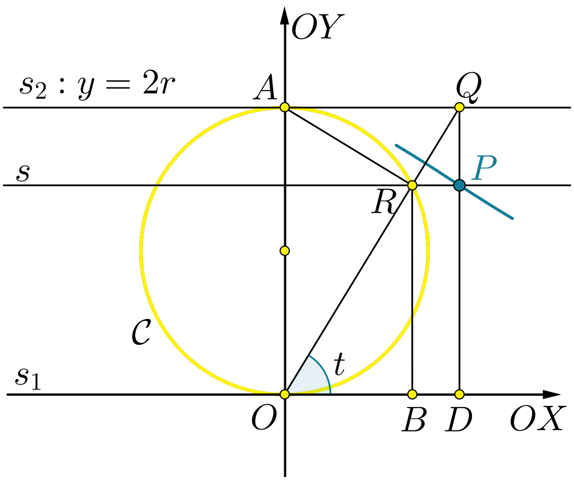

Figura 10.9: Construção da curva de Agnesi.

Seja P o ponto de interseção da reta s com o segmento QD. Os pontos P assim obtidos, traçando todas as semirretas que partem de O e intersectam $\mathcal{C}$, descrevem a curva denominada **curva de Agnesi**.

Para obtermos as equações paramétricas da curva de Agnesi, admitamos que O seja a origem do sistema de coordenadas, s_1 seja o eixo OX e $s_2 : y = 2r$. Assim, $A = (0, 2r)$ nessas coordenadas (Figura 10.9).

O nosso problema consiste em determinar as coordenadas dos pontos $P = (x, y)$ da curva em função de apenas um parâmetro.

Denotando t a medida do ângulo $\widehat{DOQ}$, obtemos:

$$|OD| = |OQ| \cos t \qquad \text{e} \qquad |RB| = |OR| \operatorname{sen} t\,. \tag{10.2}$$

onde B é a projeção de R sobre o eixo OX.

Note que os triângulos ORA (inscrito em um semicírculo de $\mathcal{C}$) e ODQ são retângulos. No primeiro, $\widehat{ORA}$ é o ângulo reto, a medida de $\widehat{OAR}$ é t e, portanto, $|OR| = 2\,r \operatorname{sen} t$. No triângulo ODQ, temos $|QD| = 2r$. Logo, $|OQ| \operatorname{sen} t = 2r$, ou seja, $|OQ| = \dfrac{2r}{\operatorname{sen} t}$.

Substituindo essas relações em (10.2), obtemos:

$$|OD| = \frac{2r \cos t}{\operatorname{sen} t} = 2r \operatorname{cotg} t \qquad \text{e} \qquad |RB| = 2r \operatorname{sen}^2 t\,. \tag{10.3}$$

Então, as equações paramétricas da curva de Agnesi são:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2\,r\,\operatorname{cotg} t \\ y = 2\,r\,\operatorname{sen}^2 t \end{cases} \quad ; \quad t \in (0,\pi)\ ,}$$

e seu traço é mostrado na figura 10.10:

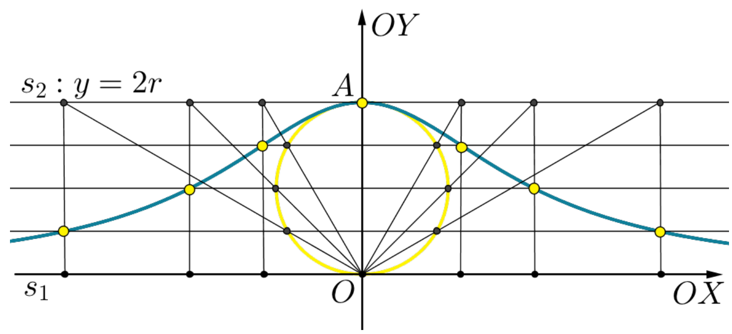

Figura 10.10: Curva de Agnesi.

10.2.2 Ciclóides

Sejam $\mathcal{C}$ um círculo de raio r, s uma reta e P um ponto de $\mathcal{C}$. Denominamos *ciclóide* a curva descrita pelo ponto P quando $\mathcal{C}$ rola sobre a reta s, sem deslizar.

Para obtermos as equações paramétricas da ciclóide, admitamos que:

- a reta s é o eixo OX;
- o círculo $\mathcal{C}$ inicia o movimento estando seu centro no ponto $(0,r)$;
- o ponto P coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

Tracemos dois círculos: $\mathcal{C}_1$, representando $\mathcal{C}$ em sua posição inicial, e $\mathcal{C}_2$, representando $\mathcal{C}$ após ter rolado alguns instantes.

Veja, na Figura 10.11, a designação dos seguintes elementos:

- sejam O_1 e O_2 os centros de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, respectivamente;
- $P = (x,y)$ o ponto da ciclóide em $\mathcal{C}_2$;
- A o ponto em que $\mathcal{C}_2$ toca o eixo OX;
- $Q = (x,0)$ e $T = (0,y)$ as projeções ortogonais de P sobre OX e OY, respectivamente;
- M e N as projeções ortogonais de P sobre O_2O_1 e O_2A, respectivamente;
- t a medida do ângulo que O_2P faz com O_2A, no sentido positivo.

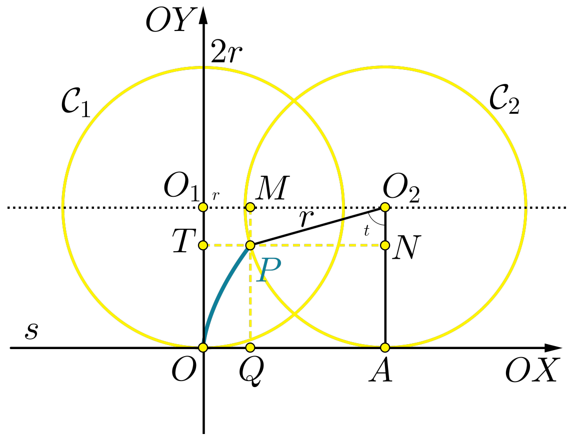

Figura 10.11: Desenvolvimento da ciclóide.

Note que o segmento OA tem o mesmo comprimento que o arco de A a P sobre o círculo $\mathcal{C}_2$, que consiste dos pontos de $\mathcal{C}$ que já fizeram contato com a reta s.

Como t é a medida de $\widehat{AO_2P}$, o comprimento do arco de $\mathcal{C}_2$ de A a P que já fez contato com s é rt. Logo, $|OA| = rt$.

Então,

$$\begin{array}{l} x = |OQ| = |OA| \pm |QA| = |OA| \pm |O_2M| = rt \pm r|\operatorname{sen} t| \\ y = |OT| = |OO_1| \pm |TO_1| = r \pm |O_2N| = rt \pm r|\cos t| \end{array},$$

onde o sinal depende da posição de Q na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e da posição de T na semirreta $\overrightarrow{OO_1}$, que, por sua vez, variam com a medida t do ângulo $\widehat{AO_2P}$.

Analisando o sinal de $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ nos intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, obtemos as seguintes equações paramétricas da ciclóide:

$$\boxed{\begin{cases} x = rt - r\operatorname{sen} t \\ y = r - r\cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Observação 2

- para $t = 0$, o ponto P está na sua posição inicial;
- para $t = \pi$, P dista $2r$ do eixo OX;
- para $t = 2\pi$, o círculo dá um giro completo e o ponto P volta a tocar o eixo OX.

Veja como é feito o movimento na seqüência de figuras abaixo.

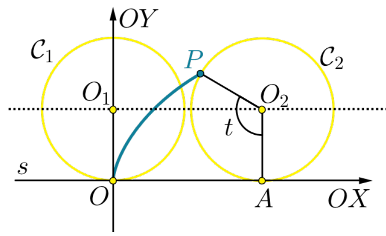

Figura 10.12: $t = \frac{2\pi}{3}$.

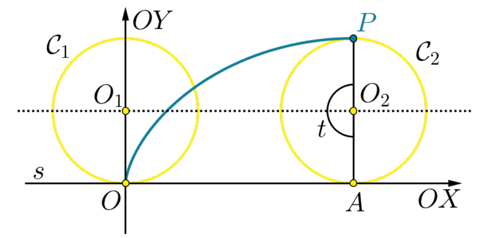

Figura 10.13: $t = \pi$.

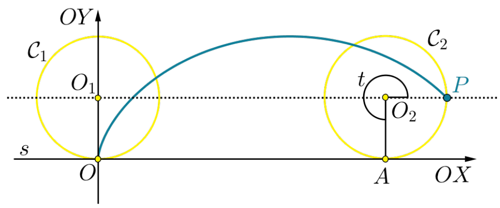

Figura 10.14: $t = \frac{3\pi}{2}$.

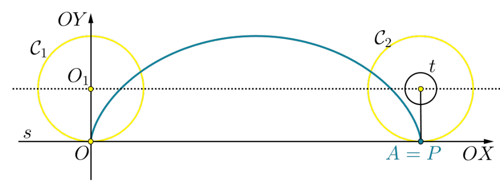

Figura 10.15: $t = 2\pi$.

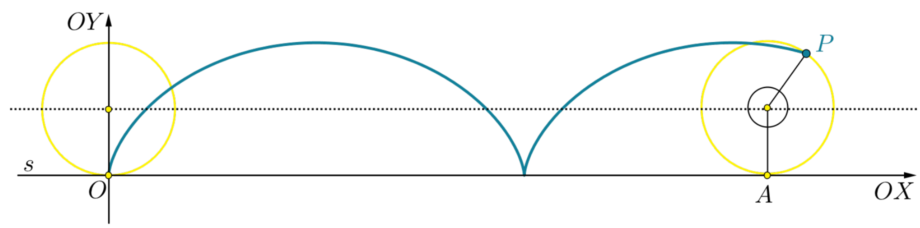

Figura 10.16: Ciclóide.

trocóides.

10.2.3 Epiciclóide

Consideremos dois círculos, Γ e $\mathcal{C}$, de raios R e r, respectivamente,tais que:

- Γ e $\mathcal{C}$ se tocam apenas em um ponto P,
- os pontos de $\mathcal{C}$, diferentes de P, estão no exterior de Γ.

Denominamos epiciclóide o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando $\mathcal{C}$ rola sobre Γ sem deslizar.

Para obtermos as equações paramétricas da epiciclóide, admitamos Γ com centro na origem, $\mathcal{C}$ com centro no ponto $(R + r, 0)$ e que a posição inicial de P seja $P_1 = (R, 0)$.

Nas Figuras 10.17 e 10.18, mostramos o círculo $\mathcal{C}$ após ter rolado, no sentido positivo, alguns instantes sobre o círculo Γ. Acompanhe, nessas mesmas figuras, a designação dos seguintes elementos: $P = (x, y)$ o ponto da epiciclóide que, estando inicialmente na posição P_1, descreve o arco de curva P_1P quando $\mathcal{C}$ rola um ângulo de medida θ sobre Γ; A o ponto de contato entre os círculos; O_2

o centro de $\mathcal{C}$; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY; $Q=(x,0)$ e $T=(0,y)$ as projeções de P sobre OX e OY; M e N as projeções de P sobre as retas O_2D e O_2B, respectivamente, e seja t o ângulo $\widehat{AO_2P}$ descrito pelo ponto P com respeito à semirreta radial OO_2.

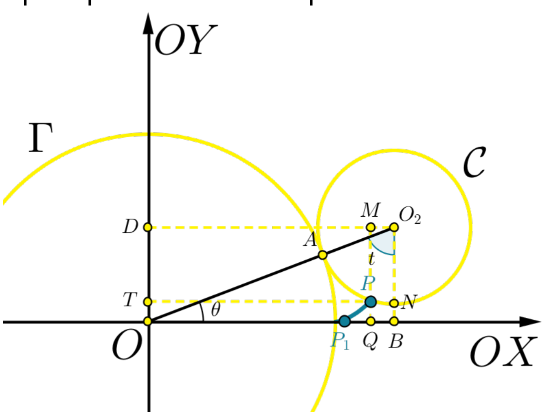

Figura 10.17: P descreve uma epiciclóide.

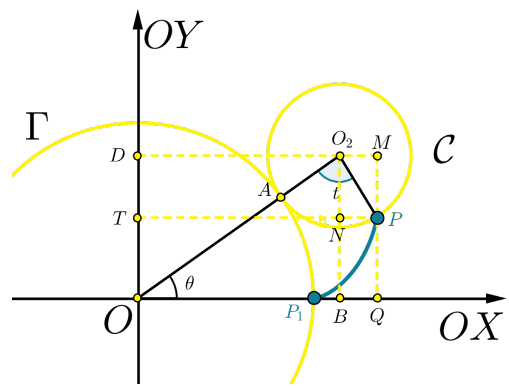

Figura 10.18: P continuando o movimento.

O nosso problema consiste em descrever as coordenadas do ponto P em termos de um parâmetro.

Nas figuras acima, vemos que as posições relativas entre O, Q e B e entre O, T e D variam de acordo com a posição do ponto P. Isto é, de acordo com a medida t do ângulo $\widehat{AO_2P}$.

No caso em que Q está entre O e B, e T está entre O e D, figura 10.17, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M|\,, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|\,. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Note que, enquanto $\mathcal{C}$ rola sobre Γ, seu centro descreve um círculo centrado em O e de raio $R+r$. Sendo θ a medida do ângulo que o semieixo OX positivo faz com a semirreta OO_2 (no sentido positivo), obtemos:

$$|OB| = (R+r)cos\theta \qquad \text{e} \qquad |OD| = (R+r)sen\theta\,. \tag{10.5}$$

Se t é a medida do ângulo que O_2A faz com O_2P, no sentido positivo, vemos que:

$$\widehat{NO_2P} = \widehat{OO_2B} - \widehat{AO_2P} = (\tfrac{\pi}{2} - \theta) - t = \tfrac{\pi}{2} - (\theta + t)\,.$$

Portanto, no triângulo-retângulo PNO_2, temos:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r\,\mathrm{sen}(\widehat{NO_2P}) = r\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{2} - (\theta+t)) = r\cos(\theta+t)\,, \\ |O_2N| &= r\cos(\widehat{NO_2P}) = r\cos(\tfrac{\pi}{2} - (\theta+t)) = r\,\mathrm{sen}(\theta+t)\,. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Substituindo as identidades (10.5) e (10.6) em (10.4), obtemos:

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos(\theta+t)\,,\\ y &= (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}(\theta+t)\,. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Observe que o comprimento do arco de A a P ao longo de $\mathcal{C}$ é igual ao comprimento do arco de P_1 a A sobre o círculo Γ (lembre que $\mathcal{C}$ rola sobre Γ, sem deslizar). Como a medida do primeiro arco é rt e a medida do segundo é $R\theta$, temos $rt = R\theta$, de onde, $t = \dfrac{R\theta}{r}$.

Logo, substituindo $t = \frac{R\theta}{r}$ em (10.7), obtemos as seguintes equações paramétricas da epiciclóide, apenas em função do parâmetro θ:

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right)\\ &= (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)\,,\\ y &= (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right)\\ &= (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)\,. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Vamos verificar agora o caso em que B está entre O e Q e T está entre O e D (Figura 10.18).

No triângulo NPO_2, (Figura 10.18), temos $\widehat{NO_2P} = t - (\frac{\pi}{2} - \theta) = (\theta + t) - \frac{\pi}{2}$. Portanto:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r\,\mathrm{sen}((\theta+t) - \tfrac{\pi}{2}) = -r\cos(\theta+t)\,,\\ |O_2N| &= r\cos((\theta+t) - \tfrac{\pi}{2}) = r\,\mathrm{sen}(\theta+t)\,. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|\,,\\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|\,, \end{aligned}$$

obtemos as mesmas equações paramétricas do caso anterior.

Nos outros casos, em que B está entre O e Q e D está T e O, ou que Q está entre O e B e D está entre T e O, também podemos mostrar que:

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)\,,\\ y &= (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)\,. \end{aligned}$$

Assim, quando $\mathcal{C}$ rola sobre Γ, as coordenadas do ponto P satisfazem as equações (10.8), independentemente da posição de P.

Conclusão: as equações paramétricas da epiciclóide são:

$$\boxed{\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos((\frac{R+r}{r})\theta) \\ y = (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}((\frac{R+r}{r})\theta) \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}} \qquad (10.9)$$

Observe que, quando $\mathcal{C}$ percorre um arco de Γ de comprimento igual a $2\pi r$, o ponto P volta a tocar Γ.

Portanto, se $\frac{R}{r} = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, o ponto P toca Γ n vezes até coincidir com sua posição inicial na n-ésima vez.

Para verificar isto, basta observar que o comprimento de Γ contém n vezes o comprimento de $\mathcal{C}$: $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$.

A Cardióide é a epiciclóide com $r = R$ ($\Longleftrightarrow \theta = t$). Então, por 10.9, as equações paramétricas da cardióide são:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta - r\cos(2\theta) \\ y = 2r\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}(2\theta) \end{cases}$$

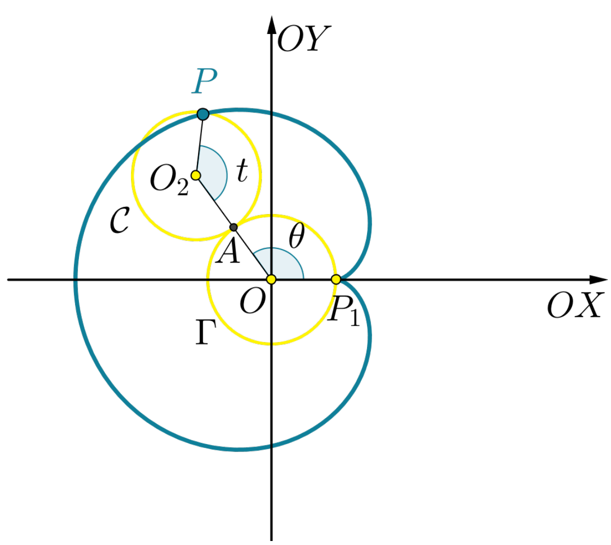

Figura 10.19: Cardióide $R = r$.

10.2.4 Fólium de Descartes.

A curva chamada *Fólium de Descartes* é a curva cuja equação cartesiana é:

$$\mathcal{C} : x^3 + y^3 = 3axy\,, \quad \text{onde } a > 0\,, \qquad (10.10)$$

Para fazermos um esboço detalhado desta curva, vamos primeiro parametrizá-la. Para isso, introduzimos o parâmetro $t = y/x$.

Observe que:

- se $(x,y) \in \mathcal{C}$, então $x = 0 \Longleftrightarrow y = 0,$.
- se $t = -1$ e $(x,y) \in \mathcal{C}$, então $x = -y \Longrightarrow x^3 + (-x)^3 = 3ax(-x) \Longrightarrow 0 = -3ax^2 \Longrightarrow x = 0$ e $y = 0$.

Substituindo $y = tx$ na equação $x^3 + y^3 = 3axy$, obtemos:

$$x^3 + (tx)^3 = 3ax(tx) \Longleftrightarrow (1+t^3)x^3 = 3atx^2 .$$

Portanto, para $t \neq -1$, temos que $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$ e $y = tx = \dfrac{3at}{1+t^3}\, t$.

Assim,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} ; \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) ,$$

é uma parametrização da *Folium de Descartes*. Observe que $(x(0), y(0)) = (0,0)$.

Vamos agora verificar algumas propriedades relativas a esta curva:

1. A curva intersecta a reta $r : y = x$ nos pontos $(0,0)$ e $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$.

   De fato, fazendo $y = x$ na equação (10.10), obtemos:

$$\begin{aligned} & x^3 + x^3 = 3axx \\ \Longleftrightarrow\ & 2x^3 = 3ax^2 \\ \Longleftrightarrow\ & x = 0 \text{ ou } x = \frac{3a}{2} . \end{aligned}$$

2. A curva é simétrica em relação à reta $r : y = x$.

   Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e P' o simétrico de P em relação à reta $r : x - y = 0$.

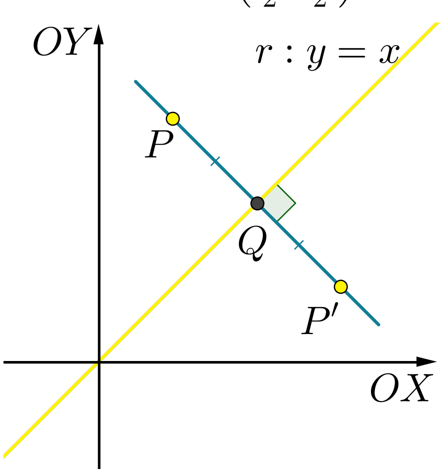

Figura 10.20: $r' \perp r$ e P' simétrico de P em relação a r.

Seja r' a reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P. Então, $r' \parallel (1, -1)$ e

$$r' : \begin{cases} x = s + x_0 \\ y = -s + y_0 \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R} ,$$

é uma equação paramétrica da reta r'.

O ponto $Q = (s + x_0, -s + y_0)$ de interseção da reta r' com a reta r têm parâmetro s dado por:

$$s + x_0 = -s + y_0 \Longleftrightarrow s = \frac{y_0 - x_0}{2}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{y_0 - x_0}{2} + x_0, -\frac{y_0 - x_0}{2} + y_0\right) \\ &= \left(\frac{y_0 - x_0}{2} + x_0, \frac{x_0 - y_0}{2} + y_0\right) \\ &= \left(\frac{y_0 + x_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2}\right), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$P' = 2Q - P = (x_0 + y_0, x_0 + y_0) - (x_0, y_0) = (y_0, x_0)\,.$$

Para verificar que $\mathcal{C}$ é simétrica em relação à reta $r : y = x$, basta mostrar que $(x, y) \in \mathcal{C}$ se, e só se, $(y, x) \in \mathcal{C}$, o que é evidente pela equação cartesiana de $\mathcal{C}$.

Observação 3 Podemos provar, de modo análogo, que o simétrico de um ponto $P = (x, y)$ com respeito à reta $y = -x$ é o ponto $P' = (-y, -x)$. Assim, um conjunto S é simétrico com relação à reta l, quando:

$$(x, y) \in S \Longleftrightarrow (-y, -x) \in S.$$

3. Vamos analizar agora o comportamento da curva em função do parâmetro t nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

(A) Para $t \in (-\infty, -1)$: $1 + t^3 < 0$; $x(t) > 0$ e $y(t) < 0$;

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} (x(t), y(t)) &= \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{3a}{1/t + t^2}, \frac{3a}{1/t^2 + t}\right) = (0, 0)\,; \\ \lim_{t\to-1^-} (x(t), y(t)) &= (+\infty, -\infty)\,. \end{aligned}$$

(B) Para $t \in (-1, 0]$: $1 + t^3 > 0$, $x(t) < 0$ e $y(t) > 0$; $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ e

$$\lim_{t\to-1^+} (x(t), y(t)) = (-\infty, +\infty)\,.$$

(C) Para $t \in [0, 1]$: $1 + t^3 > 0$; $x(t) > y(t) > 0$ se $t \in (0, 1)$; $x(0) = y(0) = 0$ e $x(1) = y(1) = \dfrac{3a}{2}$.

(D) Para $t \in (1, +\infty)$: $1 + t^3 > 0$; $y(t) > x(t) > 0$;

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3a}{1/t + t^2}, \frac{3a}{1/t^2 + t}\right) = (0, 0)\,.$$

4. A curva está contida no semiplano $x+y+a > 0$ e $d((x(t), y(t)), r) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow -1^{\pm}$, onde r é a reta $x+y+a = 0$. Então, r é uma assíntota da curva.

De fato:

$$\begin{aligned} \bullet\; x(t) + y(t) + a &= \frac{3at}{1+t^3} + \frac{3at^2}{1+t^3} + a = \frac{3at + 3at^2 + a + at^3}{1+t^3} \\ &= a\frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{1+t^3} = a\frac{(t+1)(t^2+2t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} \\ &= a\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} = \frac{a(t+1)^2}{t^2-t+1} > 0\,, \end{aligned} \tag{10.11}$$

pois $(t+1)^2 > 0$ para todo $\in \mathbb{R} - \{-1\}$ e $t^2 - t + 1 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet\; \lim_{t\to-1^{\pm}} d((x(t), y(t)), r) &= \lim_{t\to-1^{\pm}} \frac{|x(t) + y(t) + a|}{\sqrt{2}} \\ &= \lim_{t\to-1^{\pm}} \frac{a(t+1)^2}{\sqrt{2}\,(t^2-t+1)} \\ &= \frac{a\cdot 0}{\sqrt{2}\cdot 3} = 0\,. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Usando as informações acima, podemos traçar a curva:

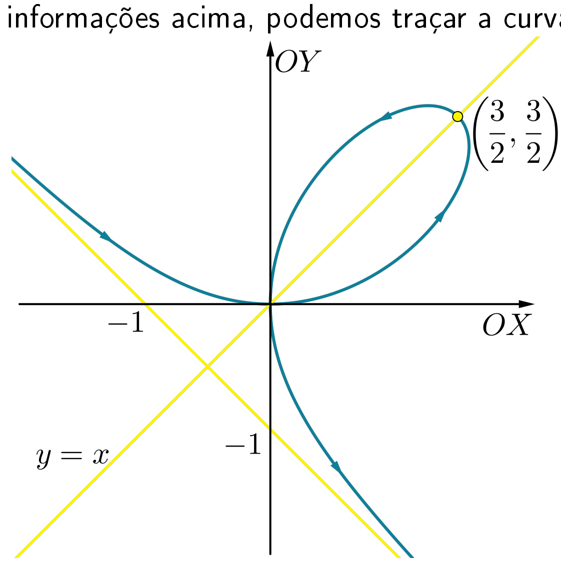

Figura 10.21: Folium de Descartes obtido com $a = 1$.

10.3 Exercícios

1. Para cada uma das curvas abaixo, determine sua equação cartesiana e esboce-a.

(a) $\mathcal{C} : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R}$ **(b)** $\mathcal{C} : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t^2 \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R}$

(c) $\mathcal{C} : \begin{cases} x = t^4 \\ y = 2t^2 \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R}$ **(d)** $\mathcal{C} : \begin{cases} x = \cos^2(\frac{\pi t}{2}) \\ y = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi t}{2}) \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R}$

2. As curvas (isto é, as trajetórias) descritas em cada um dos itens abaixo são idênticas?

(a) $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R}$

(b) $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases} \; ; \; t > 0$ e $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R}$

3. Considere o círculo $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$. Parametrize a parte superior de $\mathcal{C}$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C}$; $y \geq y_0$) de duas maneiras diferentes.

4. Seja a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OX$. Mostre que

$$\mathcal{H}_+ : \begin{cases} x = a \sec t + x_0 \\ y = b \tan t + y_0 \end{cases} \; ; \; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathcal{H}_- : \begin{cases} x = -a \sec t + x_0 \\ y = b \tan t + y_0 \end{cases} \; ; \; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

são parametrizações dos ramos $\mathcal{H}_+$ e $\mathcal{H}_-$ de $\mathcal{H}$ que intersectam o semieixo OX positivo e semieixo OX negativo, respectivamente.

5. Parametrize as cônicas de duas maneiras diferentes.

(a) $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0$

(b) $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

(c) $-4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$

(d) $4y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$

6. Encontre equações paramétricas para as cônicas dadas pelas equações do segundo grau do exercício 6 do Capítulo 8.

7. A *involuta* de um círculo de raio a é a curva descrita pela extremidade de um fio quando o fio (mantido tenso) é desenrolado de um carretel de raio a (ver figura 10.22). Determine equações paramétricas para tal involuta sabendo que o centro do carretel (isto é, do círculo) está na origem e que o fio começa a ser desenrolado no ponto $A = (a, 0)$.

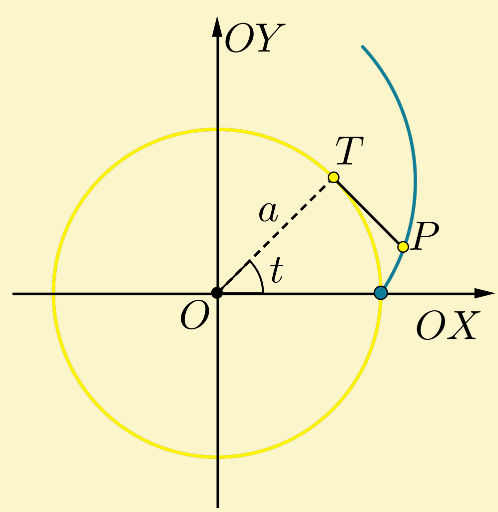

Figura 10.22: Exercício 7

Note que o segmento OT é perpendicular ao segmento TP.

8. Considere o círculo da figura 10.23. Sejam OA o diâmetro sobre o eixo OX, AB um segmento tangente ao círculo em A, e C o ponto em que o segmento OB intercepta o círculo. Se P está sobre o segmento OB e $OP = CB$, obtenha as equações paramétricas do lugar geométrico descrito por tais pontos P. Esta curva é denomidada *Cissóide de Diocles*.

Determine também a equação cartesiana, mostre que a reta $x = 2a$ é uma assíntota e faça um esboço da curva.

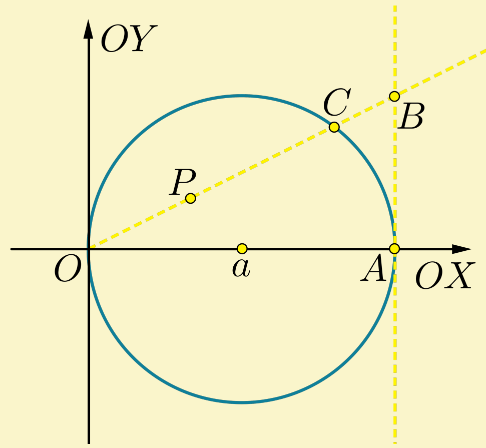

Figura 10.23: Exercício 8

9. Consideremos dois círculos Γ e $\mathcal{C}$, de raios R e r, respectivamente, tais que: $r < R$; Γ e $\mathcal{C}$ se tocam apenas em um ponto P, e os pontos de $\mathcal{C}$, diferentes de P, estão no exterior de Γ.

O *hipociclóide* é o lugar geométrico descrito pelo ponto P, quando $\mathcal{C}$ rola sobre Γ, no sentido negativo (horário), sem deslizar.

Obtenha equações paramétricas da hipociclóide. No caso particular em que $R = 4r$, a curva é chamada astróide ou *tetracúspide*. Parametrize e faça um esboço da astróide.

10. A *Lemniscata de Bernoulli* é a curva dada pelas equações paramétricas:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Faça um esboço desta curva, indicando o sentido em que ela é percorrida, e determinemos a sua equação cartesiana.

10.4 Solução de Exercícios

Solução do Exercício 7:

Utilizando como parâmetro o ângulo $t \geq 0$ indicado na figura abaixo, obtemos que

$$\boxed{x = a\cos t + at \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad y = a \operatorname{sen} t - at\cos t, \quad t \geq 0}$$

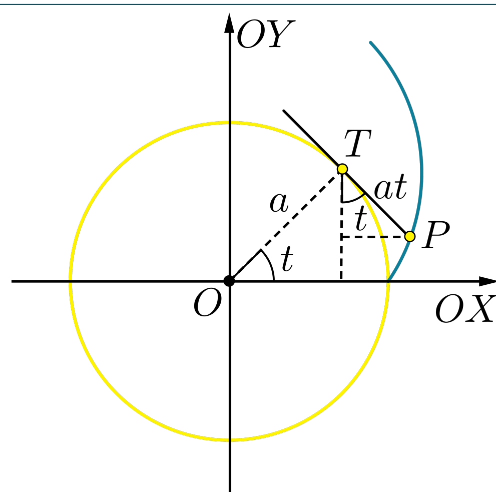

Figura 10.24: Involuta.

Solução do Exercício 8:

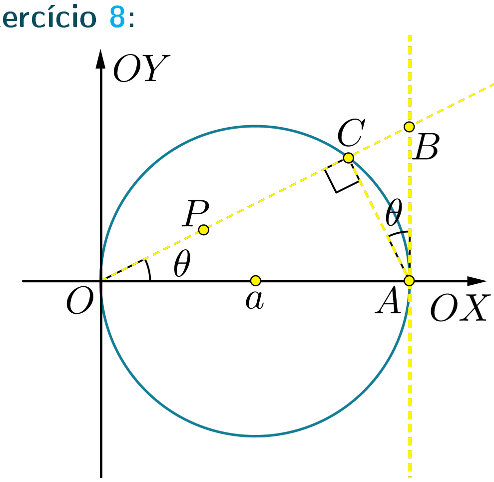

Figura 10.25: Exercício 8.

Como $AB = 2a\tan\theta$ e $CB = OP = r = AB \operatorname{sen}\theta$, temos que $r = 2a\tan\theta \operatorname{sen}\theta$ e, portanto,

$$x = r\cos\theta = 2a\tan\theta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,,$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta = 2a\tan\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

são equações paramétricas da curva.

Além disso, como $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ e $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, a equação cartesiana da curva é

$$\sqrt{x^2+y^2}=2a\,\frac{y}{x}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

ou seja,

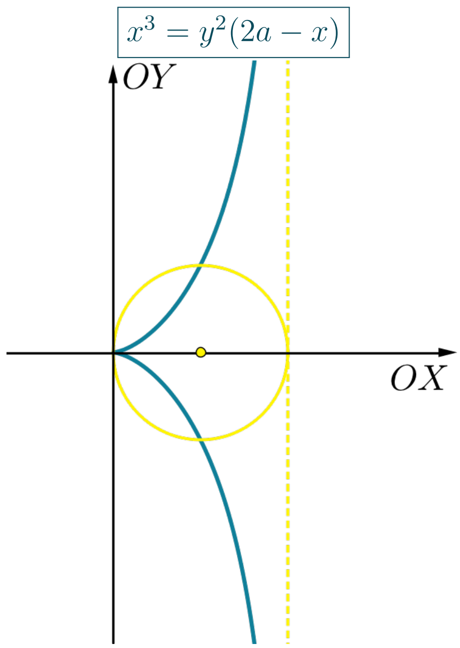

Figura 10.26: Exercício 8.

A curva é, portanto, simétrica em relação ao eixo$-OX$, e como $y=\pm\sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$, $0\leq x<2a$, $\lim\limits_{x\to 2a^-} y=\pm\infty$. Logo, $x=2a$ é uma assíntota da curva.

Solução do Exercício 9:

Para obtermos as equações paramétricas da hipociclóide, vamos admitir Γ com centro na origem, $\mathcal{C}$ iniciando o movimento com centro no ponto $(R-r,0)$ e P com posição inicial $P_1=(R,0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P=(x,y)$ em termos de um parâmetro, quando $\mathcal{C}$ rola sobre Γ sem deslizar.

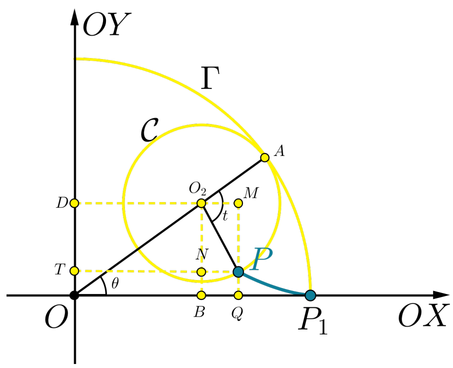

Figura 10.27: P descrevendo uma hipociclóide.

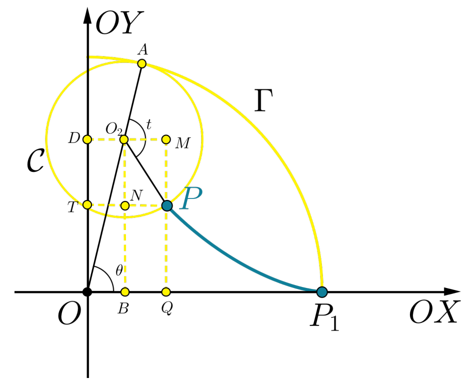

Figura 10.28: P continuando o movimento.

Acompanhe, nas Figuras 10.27 e 10.28, a designação dos seguintes elementos: A é o ponto de $\mathcal{C}$ que toca Γ; O_2 o centro de $\mathcal{C}$; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B, respectivamente.

Com estas notações, considerando o caso em que B está entre O e Q e T está entre O e D, mostrado na Figura 10.27, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|\,, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|\,. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Sabendo que o centro de $\mathcal{C}$ descreve um círculo de raio $R - r$, e sendo θ a medida do ângulo que o semieixo$-OX$ positivo faz com OO_2, no sentido positivo, obtemos:

$$|OB| = (R - r)\cos\theta \qquad \text{e} \qquad |OD| = (R - r)\operatorname{sen}\theta.$$

Denotando t a medida do ângulo de O_2A para O_2P, no sentido negativo, temos:

$$\widehat{OO_2P} = \pi - t \qquad \text{e} \qquad \widehat{OO_2P} - \widehat{NO_2P} = \tfrac{\pi}{2} - \theta\,.$$

Logo,

$$\widehat{NO_2P} = -\tfrac{\pi}{2} + \theta + \widehat{OO_2P} = -\tfrac{\pi}{2} + \theta + (\pi - t) = (\theta - t) + \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Portanto, no triângulo retângulo PNO_2, temos:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r\operatorname{sen}(\widehat{NO_2P}) = r\operatorname{sen}((\theta - t) + \tfrac{\pi}{2}) = r\cos(\theta - t) = r\cos(t - \theta)\,, \\ |O_2N| &= r\cos(\widehat{NO_2P}) = r\cos((\theta - t) + \tfrac{\pi}{2}) = -r\operatorname{sen}(\theta - t) = r\operatorname{sen}(t - \theta)\,. \end{aligned}$$

Substituindo essas identidades nas relações (10.13) e usando o fato de que $t = \frac{R\theta}{r}$, obtemos as seguintes equações paramétricas da hipociclóide:

$$\boxed{\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta + r\cos((\frac{R-r}{r})\theta) \\ y = (R-r)\,\text{sen}\,\theta - r\,\text{sen}((\frac{R-r}{r})\theta) \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}}$$

Procure verificar que as mesmas equações paramétricas são obtidas quando P está em outras posições com respeito ao centro O_2.

As equações paramétricas da astróide são:

$$\begin{cases} x = 3r\cos\theta + r\cos(3\theta) \\ y = 3r\,\text{sen}\,\theta - r\,\text{sen}(3\theta) \end{cases} \quad ; \quad \theta \in \mathbb{R},$$

e seu lugar geométrico é mostrado na figura 10.29.

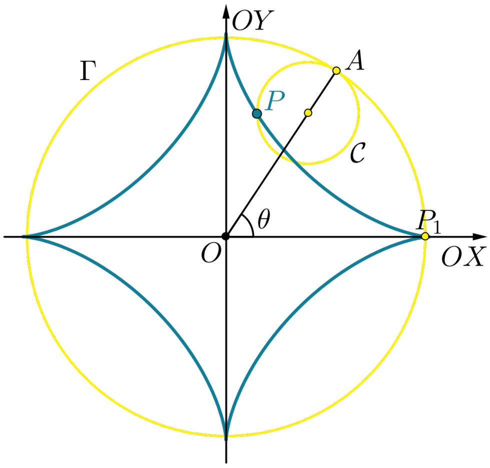

Figura 10.29: Astróide.

Solução do Exercício 10:

Vamos achar primeiro os pontos onde a curva intersecta a reta $r : x-y=0$. Para que isso ocorra devemos ter:

$$\begin{aligned} x(t) = y(t) &\iff \frac{t}{1+t^4} = \frac{t^3}{1+t^4} \iff t^3 - t = 0 \\ &\iff t(t^2-1) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = 1 \text{ ou } t = -1\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{C} \cap r = \left\{ (0,0)\,,\, \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\,,\, \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Além disso, temos que:

A. para $t \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$, $x(t) > y(t)$, pois $t > t^3$, e

$$\lim_{t\to-\infty} (x(t),y(t)) = \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{1/t+t^3}\,,\, \frac{1}{1/t^3+t} \right) = (0,0)\,.$$

B. para $t \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$, $x(t) < y(t)$, pois $t < t^3$, e

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t),y(t))=(0,0).$$

Com estas informações, podemos traçar a curva:

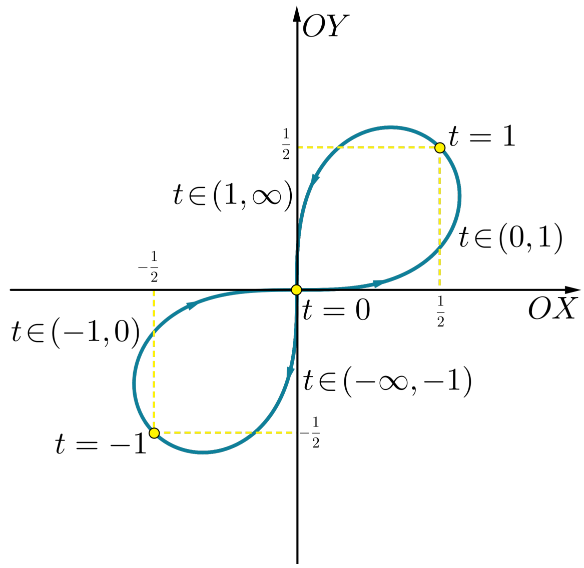

Figura 10.30: Lemniscata de Bernoulli.

Sendo $y=\dfrac{t^3}{1+t^4}=t^2\,\dfrac{t}{1+t^4}=t^2\,x$, obtemos que $t^2=\dfrac{y}{x}$, se $x\neq 0$ ($\Longleftrightarrow y\neq 0$). Em particular, y e x têm o mesmo sinal ao longo da curva.

Como $x=\dfrac{t}{1+t^4}$, $t=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ se $x>0$ e $t=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ se $x<0$, temos que:

- $$x=\frac{\sqrt{y/x}}{1+y^2/x^2}\iff x=\frac{x^2\dfrac{y^{1/2}}{x^{1/2}}}{x^2+y^2}\iff x^2+y^2=x^{1/2}y^{1/2}$$
$$\iff x^2+y^2=\sqrt{xy}\,,\ \text{se } x>0\,;$$

- $$x=\frac{-\sqrt{y/x}}{1+y^2/x^2}\iff x=\frac{-x^2\dfrac{|y|^{1/2}}{|x|^{1/2}}}{x^2+y^2}\iff x^2+y^2=-x\,\frac{|y|^{1/2}}{|x|^{1/2}}$$
$$\iff x^2+y^2=|x|\,\frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}}=\sqrt{|x|\,|y|}=\sqrt{xy}\,,\ \text{se } x<0\,;$$

uma vez que x e y têm o mesmo sinal ao longo da curva.

Assim,

$$\boxed{x^2+y^2=(xy)^{1/2}\iff(x^2+y^2)^2=xy}$$

é a equação cartesiana da Lemniscata de Bernoulli.

Observe, pela equação acima, que a Lemniscata de Bernoulli é simétrica em relação à reta $r: x-y=0$.