11

Curvas Planas em Coordenadas Polares

Sumário

Neste capítulo veremos que há outra maneira de expressar a posição de um ponto no plano, distinta da forma cartesiana. Embora os sistemas cartesianos sejam muito utilizados, há curvas no plano cuja equação toma um aspecto muito simples em relação a um referencial não cartesiano.

11.1 Coordenadas Polares

Definição 1

Um *sistema de coordenadas polares* $O\,\rho\,\theta$ *no plano* consiste de um ponto O, denominado *pólo* ou *origem*, de uma semirreta $\overrightarrow{OA}$, com origem em O, denominada *eixo polar*, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de O a um ponto qualquer do plano.

Dado um ponto P do plano, suas coordenadas nesse sistema são ρ e θ, onde ρ é a distância de P a O e θ é a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta $\overrightarrow{OP}$. Escrevemos, então (Figura 11.1):

$$\boxed{P = (\rho\,,\,\theta)}$$

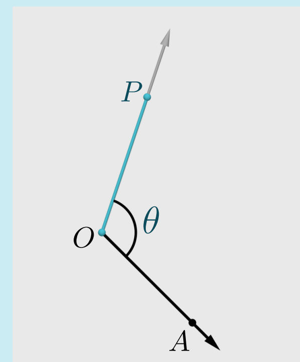

Figura 11.1: Coordenadas polares.

Convencionamos que a medida do ângulo tomada de $\overrightarrow{OA}$ para $\overrightarrow{OP}$ no sentido anti-horário é positiva, e negativa no sentido horário.

A primeira coordenada polar ρ de um ponto distinto do pólo é sempre maior que zero, pois representa a distância do ponto ao pólo. Mas podemos tomar também valores negativos para ρ, convencionando-se, neste caso, marcar a distância $|\rho|$ na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{CD}$, ou seja, o ponto $P = (\rho, \theta)$, com $\rho < 0$, corresponde ao ponto $P = (-\rho, \theta + \pi)$.

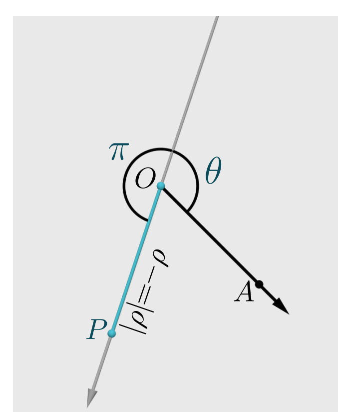

Figura 11.2: $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$

Se a primeira coordenada polar de um ponto é zero, então esse ponto é o pólo. O ângulo do pólo não está definido. Convencionamos que $(0, \theta)$ são as coordenadas polares do pólo, para todo ângulo θ.

Podemos usar a medida dos ângulos em radianos ou em graus. Por exemplo, $P = (2, 30°) = (2, \pi/6)$.

O par (ρ, θ) determina, de maneira única, um ponto do plano. No entanto, um ponto no plano pode ser determinado por meio de várias coordenadas polares distintas, pois, de acordo com a construção acima, as medidas θ e $\theta+2\pi k$, onde $k \in \mathbb{Z}$, estão associadas ao mesmo ângulo e, portanto, (ρ, θ) e $(\rho, \theta + 2\pi k)$ representam o mesmo ponto do plano. Além disto, como $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$ se $\rho < 0$, então $(-\rho, \theta + \pi) = (\rho, \theta + 2\pi) = (\rho, \theta)$ se $\rho > 0$.

Assim, $(\rho, \theta) = (\rho, \theta + 2\pi k) = (-\rho, \theta + (2n + 1)\pi)$ quaisquer que sejam $k, n \in \mathbb{Z}$ e $\rho \in \mathbb{R}$.

Nisso, o sistma polar difere do sistema cartesiano, no qual existe uma correspondência biunívoca entre as coordenadas e os pontos do plano. Mas, se o ponto P não for a origem e se restringimos ρ e θ aos intervalos $(0, +\infty)$ e $[0, 2\pi)$, respectivamente, existirá apenas um par de coordenadas polares (ρ, θ) para P.

Exemplo 1

Os pontos $P_1 = (1, 0°)$, $P_2 = (4, -\pi/4)$, $P_3 = (-1, 0°)$ e $P_4 = (-2, \pi/3)$ estão ilustrados na figura 11.3.

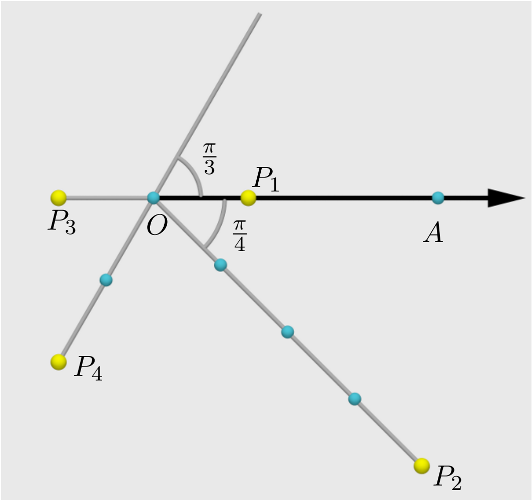

Figura 11.3: Pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 no sistema $O\rho\theta$

Podemos representar esses pontos também com as seguintes coordenadas polares: $P_1 = (1, 360°k) = (-1, 360°n + 180°)$; $P_2 = (4, -\pi/4 + 2\pi k) = (-4, -\pi/4 + \pi + 2\pi n) = (-4, 3\pi/4 + 2\pi n)$, $P_3 = (-1, 360°k) = (1, 180° + 360°n)$ e $P_4 = (-2, \pi/3 + 2\pi k) = (2, \pi/3 + \pi + 2\pi n) = (2, 4\pi/3 + 2\pi n) = (2, 240° + 360°n)$ para todos k e n inteiros.

Exemplo 2

O conjunto $\mathcal{C}$ dos pontos $P = (\rho, \theta)$ que satsifazem a equação $\rho = 3$ é o conjunto dos pontos cuja distância ao pólo O é igual a 3.

Ou seja,

$$\mathcal{C} = \{(\rho, \theta)\,;\ \rho = 3 \text{ e } \theta \in \mathbb{R}\}$$

é o círculo de centro O e raio igual a três.

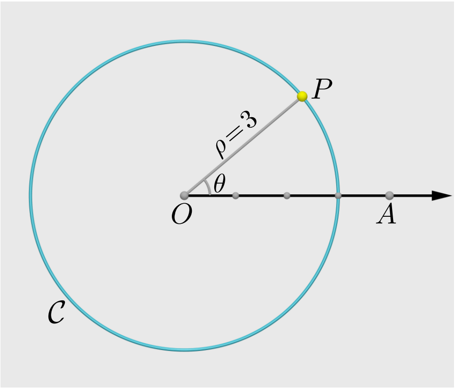

Figura 11.4: Círculo $\mathcal{C}$

Observação 2

A equação $\rho = -3$ também é uma equação polar do círculo acima. Em geral, $\rho = a$ é a equação polar de um círculo de raio $|a|$ centrado na origem.

Exemplo 3

Seja r o conjunto dos pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem a equação polar $\theta = \frac{\pi}{4}$, ou seja,

$r = \{(\rho, \theta)\,;\ \rho \in \mathbb{R} \text{ e } \theta = \pi/4\}$.

Então, r é a reta que passa pelo pólo O e tem inclinação $\theta_0 = \pi/4$ com respeito ao eixo polar.

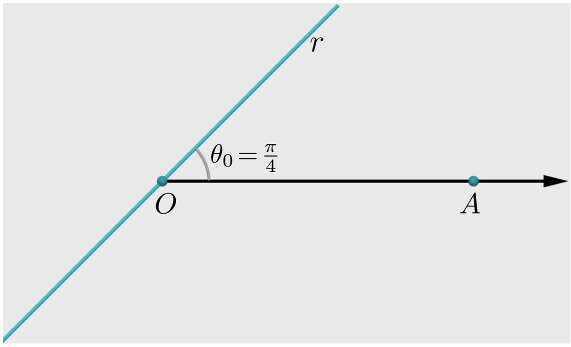

Figura 11.5: Reta $r : \theta = \pi/4$

Observação 3

Qualquer reta que passa pelo pólo O tem equação polar da forma $\theta = \theta_0$, onde θ_0 é uma constante. Além disso, $\theta = \theta_0 + 2\pi k$ e $\theta = \theta_0 + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, representam a mesma reta no plano.

Vamos obter agora a equação polar de uma reta r que não passa pelo pólo.

Proposição 4

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Sejam r uma reta que não passa pelo pólo O, λ a distância do pólo a r e α o ângulo que o eixo polar forma com a semirreta de origem no pólo que é perpendicular a r (Figura 11.6). Então, um ponto P de coordenadas polares (ρ, θ) pertence a r se, e somente se:

$$\boxed{\rho \cos(\theta - \alpha) = \lambda} \tag{11.1}$$

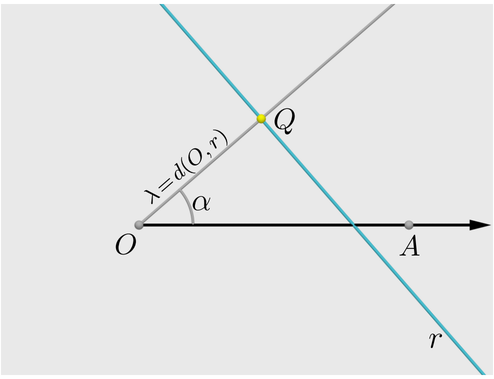

Figura 11.6: Reta r no sistema $O\rho\theta$

Demonstração

Seja Q o ponto de interseção de r com a perpendicular a r contendo o pólo. Sabemos que *$P = (\rho, \theta)$ pertence a reta r se, e somente se, a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{OP}$ sobre o vetor $\overrightarrow{OQ}$ coincide com $\overrightarrow{OQ}$*, isto é:

$$P \in r \iff \mathrm{Proj}_{\overrightarrow{OQ}} \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}\,.$$

Seja $\beta = \widehat{POQ}$. Então, $\beta = \theta - \alpha$ ou $\beta = \alpha - \theta$, dependendo da posição do ponto P (veja as figuras 11.7), onde $P = (|\overrightarrow{OP}|, \theta)$ e $Q = (|\overrightarrow{OQ}|, \alpha)$ são os pontos no sistema $O\rho\theta$. Note que $\cos\beta$ está bem definido, pois $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\alpha - \theta)$.

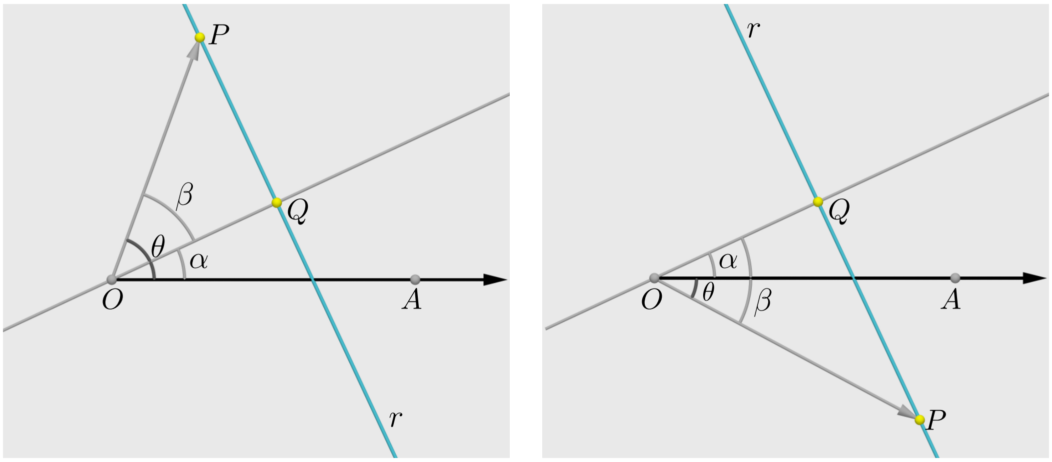

Figura 11.7: Nas figuras acima, a medida do ângulo α é tomada de OA para OQ e a medida do ângulo θ é tomada de OA para OP

Como

$$|\overrightarrow{OP}| = \rho\,,\ |\overrightarrow{OQ}| = \lambda\,,\ \cos\beta = \cos(\theta - \alpha) = \cos(\alpha - \theta),$$

e

$$\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{OQ}} \overrightarrow{OP} = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|\,\|\overrightarrow{OQ}\|\,\cos\beta}{\|\overrightarrow{OQ}\|^2}\,\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|(\cos\beta)\,\overrightarrow{OQ}\,,$$

concluímos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{OQ}}\,\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} &\iff \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|\cos\beta\,\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} \\
&\iff \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|\cos\beta = 1 \iff |\overrightarrow{OP}|\cos\beta = \lambda \\
&\iff \rho\cos(\theta-\alpha) = \lambda\,.
\end{aligned}
$$

EXEMPLO 4

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. A equação polar da reta r cuja distância ao pólo é igual a 3 tal que o ângulo que a semirreta perpendicular a r, com origem no pólo, forma com o eixo polar tem medida $\pi/4$, é:

$$r : \rho\,\cos(\theta - \pi/4) = 3\,.$$

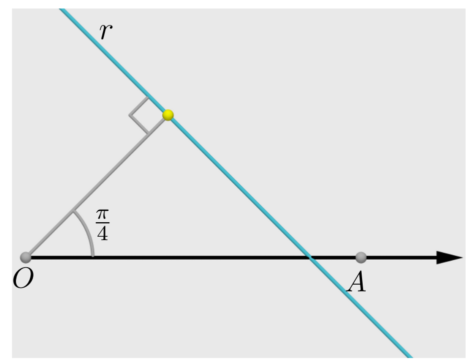

Figura 11.8: $r : \rho\cos(\theta - \pi/4) = 3$

11.1.1 Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Consideremos o sistema cartesiano ortogonal OXY tal que o eixo polar seja o semieixo positivo OX e o eixo$-OY$ seja obtido rotacionando OX de 90^o no sentido positivo. Admitamos a mesma unidade de medida nos dois sistemas (Figura 11.9).

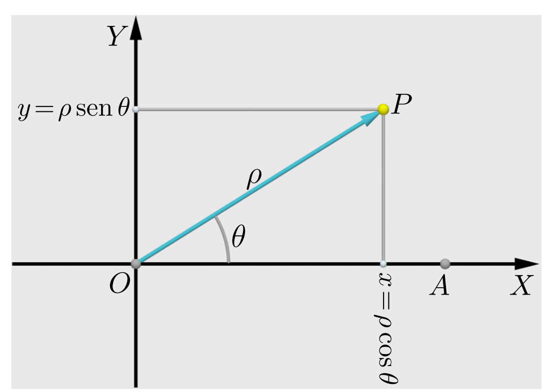

Figura 11.9: Sistemas de coordenadas; polar $O\rho\theta$ e cartesiano OXY

Seja $P \neq O$ um ponto no plano tal que $P = (\rho, \theta)$, no sistema $O\rho\theta$, e $P = (x, y)$, no sistema OXY. Então, as relações entre essas coordenadas são dadas por:

$$\boxed{x = \rho\,\cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{11.2}$$

Dessas relações, obtemos:

$$x^2 = \rho^2 \cos^2\theta\,,\ y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\,,\ \cos\theta = \frac{x}{\rho}\,,\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} \ \text{ e } \ \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta\,,$$

de onde concluímos:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \text{e}\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}} \qquad (11.3)$$

De fato, para obter a primeira relação, basta observar que:

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2\,,$$

o que implica $\rho = |\rho| = \sqrt{x^2+y^2}$, pois $\rho \geq 0$. As duas relações seguintes são substituições diretas da expressão de ρ em $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\rho}$.

Podemos considerar também $\rho' = -\rho = -\sqrt{x^2+y^2}$. Neste caso, devemos considerar o ângulo θ' tal que

$$\cos\theta' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \text{ e } \ \operatorname{sen}\theta' = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

para continuarem válidas as igualdades $x = \rho'\cos\theta'$ e $y = \rho'\operatorname{sen}\theta'$.

Como $\cos\theta' = -\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta' = -\operatorname{sen}\theta$, vemos que $\theta' = \theta + \pi$, o que justifica a convenção feita anteriormente que (ρ, θ) e $(-\rho, \theta+\pi)$ representam o mesmo ponto em coordenadas polares.

Convenção: *Daqui em diante, sempre que fizermos referência a um sistema polar $O\rho\theta$ e a um sistema cartesiano OXY, no mesmo contexto, admitiremos que o semieixo OX positivo é o eixo polar, caso este último não tenha sido definido explicitamente.*

Exemplo 5

Determine as coordenadas cartesianas ou polares dos seguintes pontos:

(a) $P = (\rho, \theta) = (2, \pi/2)$.

Solução. Como $\rho = 2$ e $\theta = \pi/2$, temos que

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ y &= \rho\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2 \end{aligned}$$

são as coordenadas cartesianas de P.

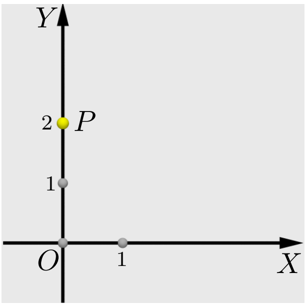

Figura 11.10: $P = (2, \pi/2)_{O\rho\theta}$ e $P = (0, 2)_{OXY}$

(b) $P = (x, y) = (1, 1)$.

Solução. Sendo $x = 1$ e $y = 1$, temos que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Então, $\theta = \pi/4$ ou $\theta = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\begin{aligned} P &= (\rho, \theta) = (\sqrt{2}, \pi/4) \\ &= (\sqrt{2}, \pi/4 + 2\pi k) \\ &= (-\sqrt{2}, 3\pi/4 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

é o ponto P dado em coordenadas polares.

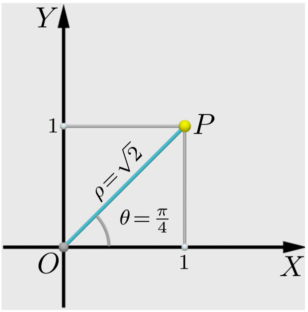

Figura 11.11: $P = (1, 1)_{OXY}$ e $P = (\sqrt{2}, \pi/4)_{O\rho\theta}$

(c) $P = (\rho, \theta) = (-2, \pi/3)$.

Solução. Sendo

$$P = (-2, \pi/3) = (2, \pi/3 + \pi) = (2, 4\pi/3),$$

temos que

$$\begin{aligned} x &= -2\cos\pi/3 \\ &= 2\cos 4\pi/3 = -1\,, \\ y &= -2\operatorname{sen}\pi/3 \\ &= 2\operatorname{sen} 4\pi/3 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

são as coordenadas cartesianas do ponto P.

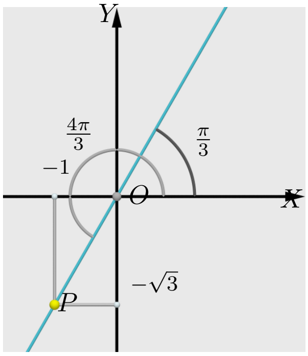

Figura 11.12: $P = (-2, \pi/3)_{O\rho\theta}$ e $P = (-1, -\sqrt{3})_{OXY}$

(d) $P = (x, y) = (4, 5)$.

Solução. Como $x = 4$ e $y = 5$, temos que

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{4^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \\ \cos\theta_0 &= \frac{4}{\sqrt{41}} \\ \operatorname{sen}\theta_0 &= \frac{5}{\sqrt{41}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{41}, \theta_0) = (-\sqrt{41}, \theta_0 + \pi)$$

é o ponto P dado em coordenadas polares.

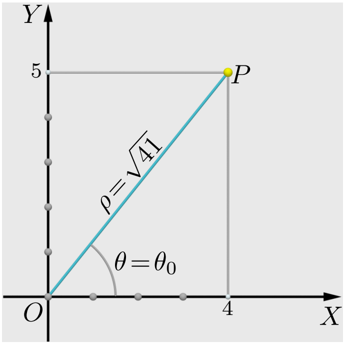

Figura 11.13: $P = (4, 5)_{OXY}$ e $P = (\sqrt{41}, \theta_0)_{O\rho\theta}$

EXEMPLO 6

Seja r o lugar geométrico definido pela equação polar $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

Sabemos, pela definição de coordenadas polares, que r é o conjunto de todos os pontos $P = (\rho, 3\pi/4)$, com $\rho \in \mathbb{R}$, tais que o ângulo entre o semieixo positivo OX e o vetor $\overrightarrow{OP}$ é $\frac{3\pi}{4}$, se $\rho > 0$, ou $\frac{7\pi}{4}$, se $\rho < 0$.

Ou seja, r é a reta que passa pela origem e tem coeficiente angular igual a $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} = -1$.

Então,

$$r : y = -x.$$

Ou, usando a mudança de coordenadas (11.3), obtemos também, substituindo $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$ na equação polar dada, que

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1 \iff y = -x.$$

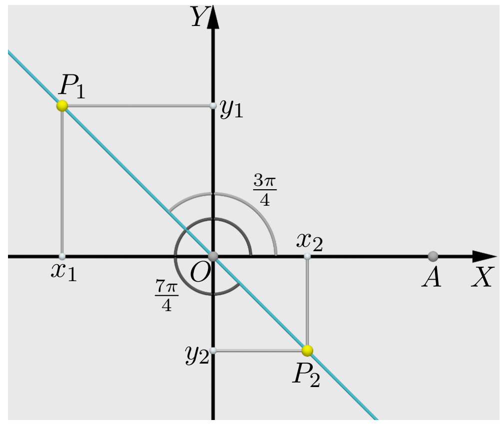

Figura 11.14: Reta $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Exemplo 7

Seja $r : x = a$, com $a \neq 0$, a reta vertical que corta o eixo OX no ponto $(a, 0)$. Então, pela equação polar $\rho\cos(\theta - \alpha) = \lambda$ de uma reta que passa pela origem, temos que $r : \rho\cos\theta = a$, pois $\alpha = 0$ e $\lambda = a$ se $a > 0$ ou, $\alpha = \pi$ e $\lambda = -a$ se $a < 0$.

Ou, usando diretamente as equações de mudança de coordenadas (11.2), obtemos também $r : \rho\cos\theta = a$.

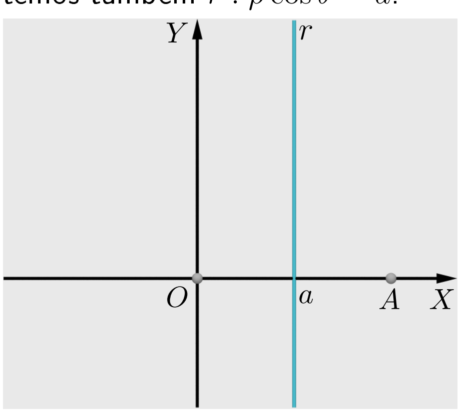

Figura 11.15: $r : x = a$, $a > 0$

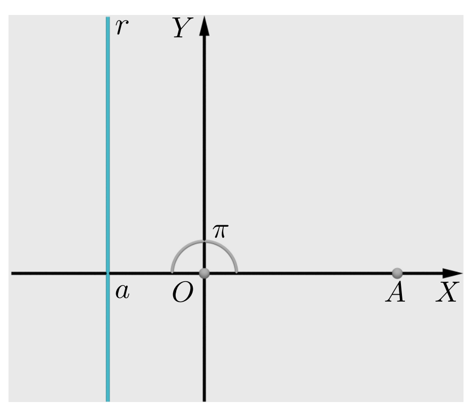

Figura 11.16: $r : x = a$, $a < 0$

De modo análogo, podemos verificar que $\rho\operatorname{sen}\theta = b$ é a equação polar da reta horizontal $y = b$ que corta o eixo OY no ponto $(0, b)$, com $b \neq 0$.

Exemplo 8

Seja r a reta de equação polar $\rho\cos(\theta - \pi/3) = 2$. Pela Proposição 4, a reta ℓ perpendicular à reta r, que passa pela origem, tem inclinação $\pi/3$ e intersecta r no ponto $Q = (\rho_0, \theta_0) = (2, \pi/3)$. Logo, $\overrightarrow{u} = (\cos\pi/3, \operatorname{sen}\pi/3) =$

$(1/2, \sqrt{3}/2)$ é um vetor normal a r e $Q = (x_o, y_o) = (2\cos\pi/3, 2\,\mathrm{sen}\,\pi/3) = (1, \sqrt{3})$ é um ponto de r. Assim,

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y = 2 \Longleftrightarrow x + \sqrt{3}\,y = 4$$

é a equação cartesiana de r.

Podemos também encontrar a equação cartesiana de r da seguinte maneira. Pela identidade:

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b\,,$$

temos:

$$\rho\,\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Longleftrightarrow$$

$$\rho\,\cos\theta\,\cos\frac{\pi}{3} + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2\,.$$

Logo, como $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, segue que

$$x\,\frac{1}{2} + y\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{3}\,y = 4\,,$$

é a equação cartesiana de r.

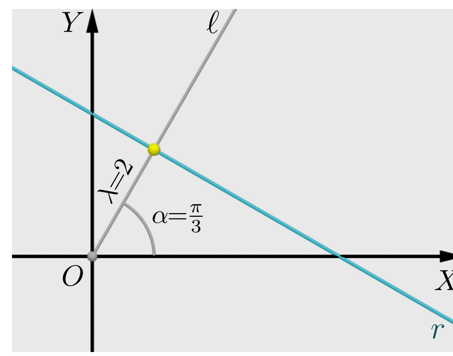

Figura 11.17: Reta r

Exemplo 9

Seja a curva $\mathcal{C}$ de equação polar $\rho = 2\,a\cos\theta$, com $a > 0$.

Utilizando as relações (11.3) para obter a equação correspondente no sistema cartesiano, temos (Figura 11.18):

$$\rho = 2\,a\cos\theta$$

$$\Longleftrightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 2ax\,.$$

Completando o quadrado na última equação, obtemos:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2\,,$$

que é a equação do círculo de centro $(a, 0)$ e raio a.

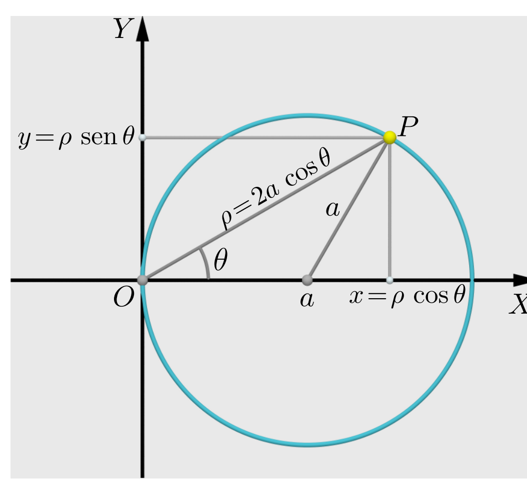

Figura 11.18: $\rho = 2\,a\,\cos\theta$.

Em geral, o círculo no plano é caracterizado em termos das coordenadas polares de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 5

Sejam $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano, $P_0 = (\rho_0, \theta_0)_{O\rho\theta}$ um ponto desse plano e r um valor positivo.
Então o conjunto dos pontos $P = (\rho, \theta)_{O\rho\theta}$ que pertencem ao círculo de centro P_0 e raio r satisfazem a seguinte equação em coordenadas polares:

$$\boxed{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\,\rho_0\,\rho\,\cos(\theta - \theta_0) = r^2}$$

Demonstração

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas OXY tal que o eixo OX positivo coincida com o eixo polar e o eixo OY seja obtido rotacionando o eixo OX de 90^o no sentido positivo.

No sistema OXY, temos:

$$P_0 = (\rho_0 \cos\theta_0, \rho_0 \operatorname{sen}\theta_0)_{OXY} \;\text{ e }\; P = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)_{OXY}\,.$$

Sabemos que o círculo de centro P_0 e raio r é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a P_0 é igual a r.

Então:

$$\begin{aligned} d(P, P_0) = r \iff & \sqrt{(\rho\cos\theta - \rho_0\cos\theta_0)^2 + (\rho\operatorname{sen}\theta - \rho_0\operatorname{sen}\theta_0)^2} = r \\ \iff & \rho^2\cos^2\theta + \rho_0^2\cos^2\theta_0 - 2\rho_0\,\rho\cos\theta_0\cos\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta \\ & +\rho_0^2\operatorname{sen}^2\theta_0 - 2\rho_0\,\rho\operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\theta = r^2 \\ \iff & \rho^2\,(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \rho_0^2\,(\cos^2\theta_0 + \operatorname{sen}^2\theta_0) \\ & -2\,\rho_0\,\rho\,(\cos\theta_0\cos\theta + \operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\theta) = r^2 \\ \iff & \rho^2 + \rho_0^2 - 2\,\rho_0\,\rho\,\cos(\theta - \theta_0) = r^2\,. \end{aligned}$$

Observação 6

No desenvolvimento acima, calculamos a expressão da distância entre dois pontos em termos de coordenadas polares. Isto é, se $P_0 = (\rho_0, \theta_0)$ e $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$, então:

$$\boxed{d(P_0, P_1) = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 - 2\rho_0\rho_1\cos(\theta_0 - \theta_1)}}$$

Exemplo 10

Seja $\mathcal{C}$ um círculo que contém a origem e tem centro $C = (a, b)$. Então, a sua equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0. \tag{11.4}$$

Pelas mudanças de coordenadas (11.2), temos que a equação (11.4), em coordenadas polares é

$$\begin{aligned} \rho^2 - 2a\rho\cos\theta - 2b\rho\operatorname{sen}\theta = 0 &\iff \rho(\rho - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta) = 0 \\ &\iff \rho = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Como a equação $\rho = 0$ representa apenas a origem, que também satisfaz à equação $\rho = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta$, pois $O = (0, \theta_0)$, onde θ_0 é tal que $\cos\theta_0 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\operatorname{sen}\theta_0 = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, obtemos que

$$\rho = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta \tag{11.5}$$

é uma equação polar de $\mathcal{C}$.

Quando $b = 0$, a equação (11.5) torna-se $\rho = 2a\cos\theta$ que é uma equação polar do círculo $\mathcal{C}$ de centro $(a, 0)$ e raio igual a $|a|$. Portanto, neste caso, $\mathcal{C}$ é tangente ao eixo OY na origem.

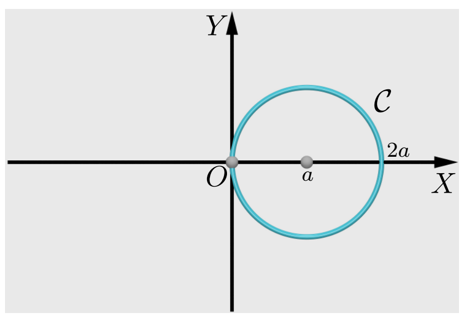

Figura 11.19: $\mathcal{C} : \rho = 2a\cos\theta,\ a > 0$

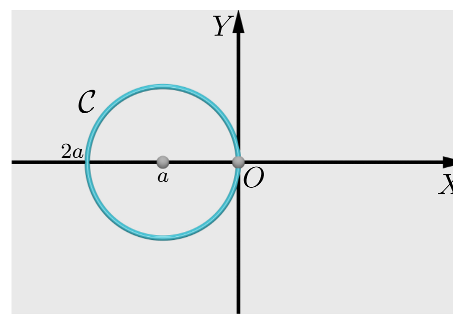

Figura 11.20: $\mathcal{C} : \rho = 2a\cos\theta,\ a < 0$

Se $a = 0$, temos que $\mathcal{C} : \rho = 2a\cos\theta$ é uma equação polar do círculo de centro $(0, b)$ e raio igual a $|b|$. Neste caso, $\mathcal{C}$ é tangente ao eixo OX na origem.

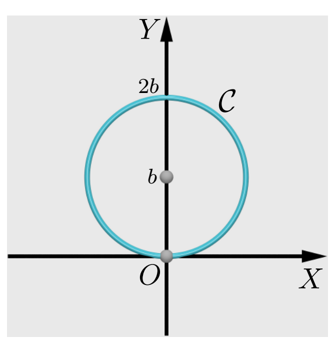

Figura 11.21: $\mathcal{C} : \rho = 2b\operatorname{sen}\theta,\ b > 0$

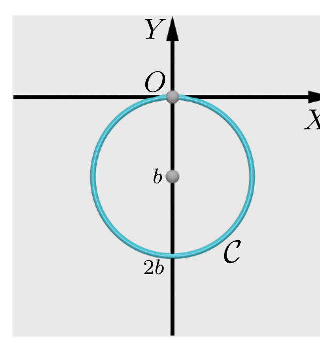

Figura 11.22: $\mathcal{C} : \rho = 2b\operatorname{sen}\theta,\ b < 0$

Exemplo 11

Considere o círculo $\mathcal{C} : (x-2)^2 + y^2 = 2$ de centro $C = (2, 0)$ e raio igual a $\sqrt{2}$.

Substituindo as relações $\rho^2 = x^2 + y^2$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ na equação cartesiana do círculo:

$$(x-2)^2+y^2=2 \iff x^2+y^2-4x+2=0\,,$$

obtemos que:

$$\rho^2-4\rho\cos\theta+2=0 \tag{11.6}$$

é a equação que relaciona as coordenadas polares de um ponto de $\mathcal{C}$. Nesse círculo, $(\rho_0,\theta_0)=(2,0)$ é o centro dada em coordenadas polares.

Logo,

$$\begin{aligned}\rho=\frac{4\cos\theta\pm\sqrt{16\cos^2\theta-8}}{2} &\iff \rho=\frac{4\cos\theta\pm\sqrt{-16\operatorname{sen}^2\theta+16-8}}{2}\\ &\iff \rho=2\cos\theta\pm\sqrt{2-4\operatorname{sen}^2\theta}\,.\end{aligned}$$

Observe que o discriminante da equação 11.6 é zero, se e somente se,

$$\operatorname{sen}^2\theta=\frac{1}{2}\iff \operatorname{sen}\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\iff\theta=\pm\frac{\pi}{4}\,,$$

e que a equação 11.6 tem duas soluções se, e somente se,

$$2-4\operatorname{sen}^2\theta>0\iff\operatorname{sen}^2\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}\iff|\operatorname{sen}\theta|<\frac{\sqrt{2}}{2}\iff\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

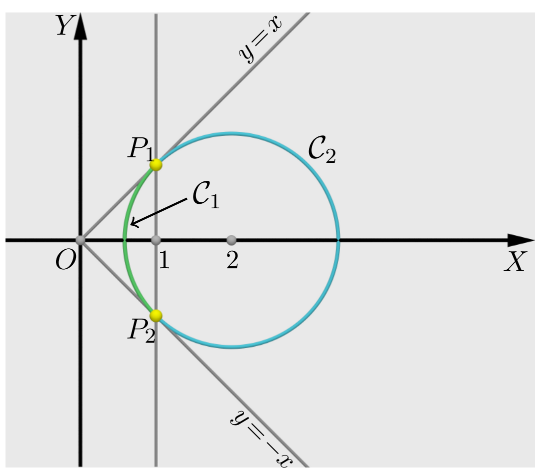

Figura 11.23: Círculo $\mathcal{C}$ e arcos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$

Note também que as retas $r_1: y=x$ e $r_2: y=-x$, que passam pela origem e fazem ângulos $\pi/4$ e $-\pi/4$, respectivamente, com o semieixo positivo OX, são tangentes ao círculo $\mathcal{C}$ nos pontos $P_1=(1,1)$ e $P_2=(1,-1)$, pois:

$$\begin{aligned}(x,y)\in\mathcal{C}\cap r_1 &\iff x=y \text{ e } (x-2)^2+x^2=2\\ &\iff x=y \text{ e } (x-1)^2=0\\ &\iff x=1 \text{ e } y=1\iff(x,y)=(1,1)=P_1,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(x,y)\in\mathcal{C}\cap r_2 &\iff x=-y \ \text{ e } \ (x-2)^2+(-x)^2=2\\ &\iff x=-y \ \text{ e } \ (x-1)^2=0\\ &\iff x=1 \quad \text{ e } \ y=-1\iff (x,y)=(1,-1)=P_2.\end{aligned}$$

Assim, $\rho = 2\cos\theta - \sqrt{2-4\operatorname{sen}^2\theta}$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, é a equação polar do arco $\mathcal{C}_1$, contido no semiplano $x\leq 1$, e $\rho = 2\cos\theta + \sqrt{2-4\operatorname{sen}^2\theta}, \theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, é a equação polar $\mathcal{C}_2=\mathcal{C}-\mathcal{C}_1$.

Até agora esboçamos uma curva dada por sua equação polar apenas quando esta curva é uma reta ou um círculo.

Para esboçarmos uma curva qualquer dada em coordenadas polares ou em coordenadas cartesianas, é bastante útil conhecer suas simetrias para simplificar a nossa análise.

Dizemos que uma curva $\mathcal{C}$ é **simétrica** com respeito a uma reta ℓ (ou a um ponto R) se, e somente se, para todo ponto $P\in\mathcal{C}$, existir um ponto $Q\in\mathcal{C}$ tal que P e Q sejam simétricos em relação a ℓ (a R, respectivamente).

Logo, pelo visto nos Capítulos 9 e 10, uma curva $\mathcal{C}$ é simétrica com respeito

- ao eixo OX quando: $(x,y)\in\mathcal{C}\iff(x,-y)\in\mathcal{C}$;
- ao eixo OY quando: $(x,y)\in\mathcal{C}\iff(-x,y)\in\mathcal{C}$;
- à origem quando: $(x,y)\in\mathcal{C}\iff(-x,-y)\in\mathcal{C}$;
- à reta $y=x$ quando: $(x,y)\in\mathcal{C}\iff(y,x)\in\mathcal{C}$;
- à reta $y=-x$ quando: $(x,y)\in\mathcal{C}\iff(-y,-x)\in\mathcal{C}$,

onde (x,y) são as coordenadas cartesianas de um ponto.

Então, se $\mathcal{C}$ é uma curva dada em coordenadas polares, temos que $\mathcal{C}$ é simétrica em relação ao eixo polar quando

$$\boxed{(\rho,\theta)\in\mathcal{C}\iff\begin{cases}(\rho,-\theta+2\pi k)\in\mathcal{C}\\ \text{ou}\\ (-\rho,-\theta+\pi+2\pi k)\in\mathcal{C}\end{cases}\quad\text{para algum } k\in\mathbb{Z}.}$$

Com efeito, se (ρ,θ) são as coordenadas polares de um ponto cujas coordenadas cartesianas são (x,y), então $(\rho,-\theta+2\pi k)$ e $(-\rho,-\theta+\pi+2\pi k)$, para todo inteiro k, são as coordenadas polares do ponto de coordenadas cartesianas $(x,-y)$ (Figura 11.24).

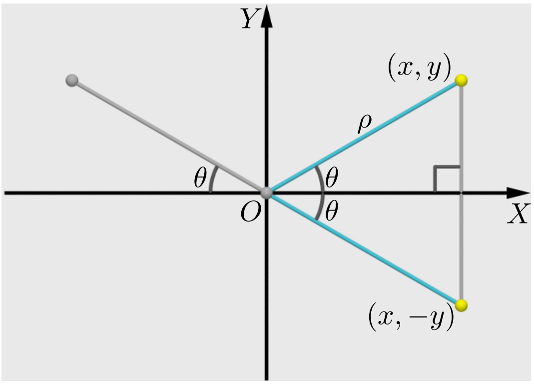

Figura 11.24: Simetria em relação ao eixo OX

De modo análogo, podemos mostrar que uma curva $\mathcal{C}$ em coordenadas polares é simétrica

- à reta $\theta = \pi/2$ quando: $(\rho, \theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho, \pi - \theta + 2\pi k) \in \mathcal{C}$ ou $(-\rho, -\theta + 2\pi k) \in \mathcal{C}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ (Figura 11.25).

- à origem quando: $(\rho, \theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho, \theta + \pi + 2\pi k) \in \mathcal{C}$ ou $(-\rho, \theta + 2\pi k) \in \mathcal{C}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ (Figura 11.26).

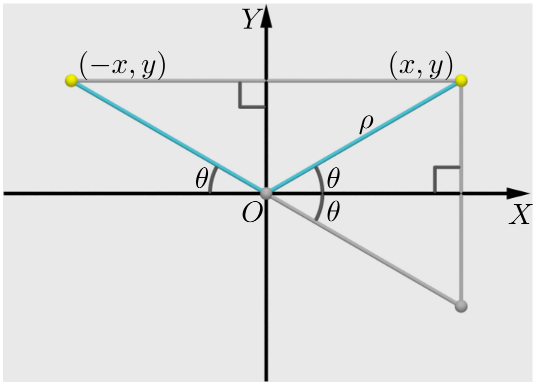

Figura 11.25: Simetria em relação à reta $\theta = \pi/2$

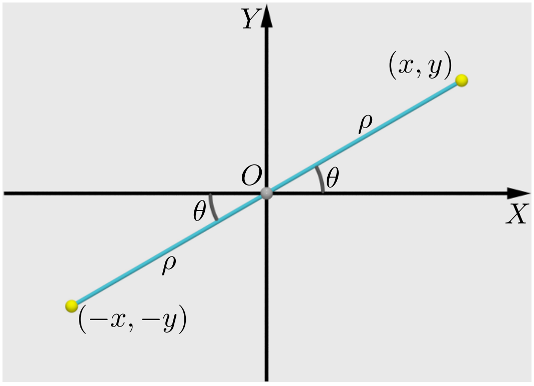

Figura 11.26: Simetria em relação à origem

- à reta $\theta = \pi/4$ quando: $(\rho, \theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho, \pi/2 - \theta + 2\pi k) \in \mathcal{C}$ ou $(-\rho, 3\pi/2 - \theta + 2\pi k) \in \mathcal{C}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ (Figura 11.27).

- à reta $\theta = 3\pi/4$ quando: $(\rho, \theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho, 3\pi/2 - \theta + 2\pi k) \in \mathcal{C}$ ou $(-\rho, \pi/2 - \theta + 2\pi k) \in \mathcal{C}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ (Figura 11.28).

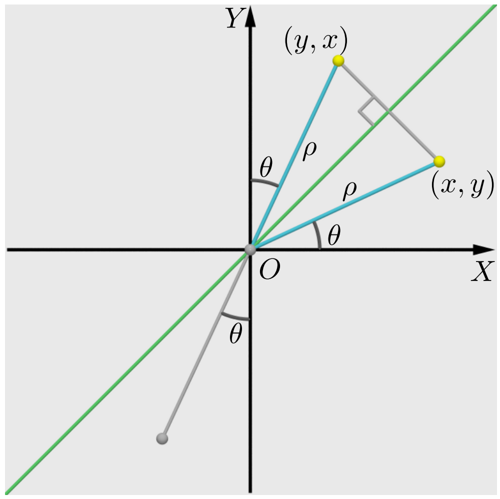

Figura 11.27: Simetria em relação à reta $\theta = \pi/4$

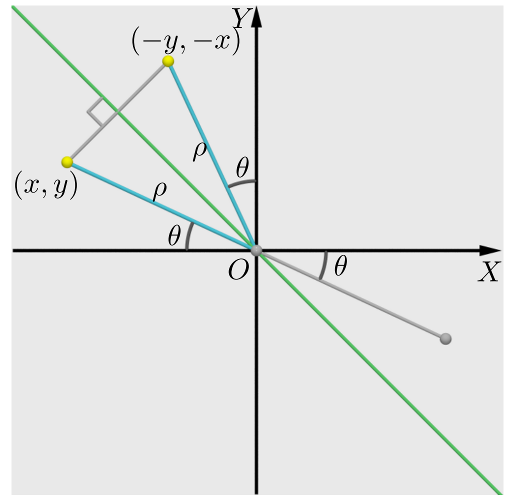

Figura 11.28: Simetria em relação à reta $\theta = 3\pi/4$

Exemplo 12

A curva $\mathcal{C} : \rho = 1 - \cos\theta$ é simétrica com respeito ao eixo polar (eixo OX), pois $(\rho, \theta) \in \mathcal{C}$ se, e só se, $(\rho, -\theta) \in \mathcal{C}$. De fato, como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, temos

$$\rho = 1 - \cos\theta = 1 - \cos(-\theta).$$

Mas, as coordenadas polares $(-\rho, \pi - \theta)$, que é outra representação do ponto (ρ, θ), não satisfaz à equação polar de $\mathcal{C}$, pois, caso contrário, teríamos

$$-\rho = 1 - \cos(\pi - \theta) = 1 + \cos\theta,$$

uma contradição, uma vez que $\rho = 1 - \cos\theta$.

O esboço desta curva será feito no Exemplo 13, item (a).

Para testar as simetrias, é preferível, como mostra o exemplo acima, usar as coordenadas cartesianas de um ponto, devido à multiplicidade de possibilidades em coordenadas polares.

No exemplo 13 faremos o esboço "aproximado" de algumas curvas dadas por suas equações em coordenadas polares. Apenas "aproximado", porque, para fazermos um esboço ideal, precisaríamos analisar em quais intervalos do eixo OX (ou do eixo OY) a curva é uma função crescente ou decrescente e convexa ou côncava da variável x (ou, respectivamente, da variável y).

Exemplo 13

Faça um esboço da curva:

(a) $\mathcal{C} : \rho = 1 - \cos\theta$.

Solução. Primeiro observe que $\rho \geq 0$ para todo θ. Substituindo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ na equação polar de $\mathcal{C}$, obtemos a equação cartesiana da curva:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}: \sqrt{x^2+y^2} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} &\iff \mathcal{C}: x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} - x \\ &\iff \mathcal{C}: (x^2+y^2+x)^2 = x^2+y^2.\end{aligned}$$

Como $(x,y) \in \mathcal{C} \iff (x,-y) \in \mathcal{C}$, a curva é simétrica com respeito ao eixo OX. Então, para esboçá-la, basta analisar $\rho = 1 - \cos\theta$ para $\theta \in [0,\pi]$, pois a função $\cos\theta$ é periódica de período 2π.

Uma vez que a função $\cos\theta$ é decrescente no intervalo $[0,\pi]$, variando de 1 a -1 quando θ varia de 0 a π, e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, segue que ρ é decrescente no intervalo $[I0,\pi]$, $\rho = 0$ se $\theta = 0$, $\rho = 1$ se $\theta = \frac{\pi}{2}$, e $\rho = 2$ se $\theta = \pi$. Assim, o esboço de $\mathcal{C}$, no intervalo $[0,\pi]$, é o mostrado na Figura 11.29.

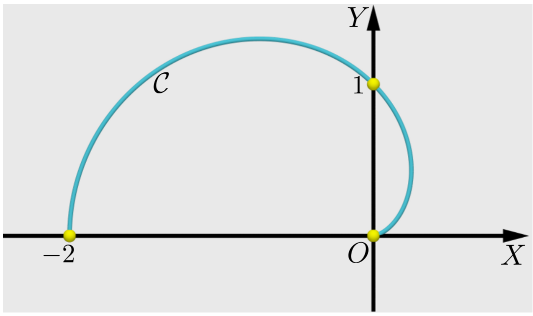

Figura 11.29: Curva $\mathcal{C}$ com $\theta \in [0,\pi]$

Pela simetria em relação ao eixo OX, o esboço de $\mathcal{C}$ é o dado na Figura 11.30.

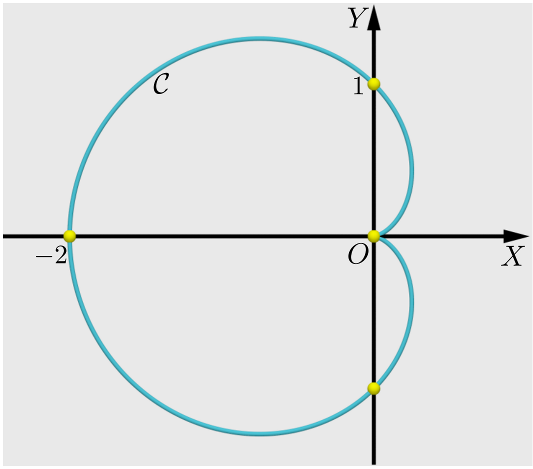

Figura 11.30: Curva $\mathcal{C}$ com $\theta \in [0,2\pi]$

É possível mostrar que $\rho = 1 - \cos\theta$ é a equação polar de uma **cardióide**, estudada no Capítulo 10, tal que os círculos Γ e $\mathcal{C}$ têm raios iguais a 1 e

Γ está centrado no ponto $(-1, 0)$.

(b) $\mathcal{C} : \rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$.

Solução. Pela relação trigonométrica $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, obtemos que

$$\rho = 1 + 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, .$$

Além disso, como $\rho \geq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2+y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} \\ \iff \quad &(x^2+y^2)^{3/2} = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2. \end{aligned} \tag{11.7}$$

é a equação cartesiana da curva.

Por (11.7), é fácil verificar que a curva $\mathcal{C}$ é simétrica em relação à reta $y = x$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (y, x) \in \mathcal{C}$) e à reta $y = -x$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (-y, -x) \in \mathcal{C}$). Logo, basta analisar a curva $\rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$ para θ no intervalo $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Temos que $\operatorname{sen} 2\theta$ é uma função crescente que varia de -1 a 1 no intervalo I, sendo igual a zero para $\theta = 0$.

Logo, $\rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$ é uma função crescente de θ no interalo I tal que $\rho = 0$ se $\theta = -\pi/4$, $\rho = 1$ se $\theta = 0$ e $\rho = 2$ se $\theta = \pi/4$. Então, o esboço de $\mathcal{C}$ no intervalo I é o mostrado na Figura 11.31.

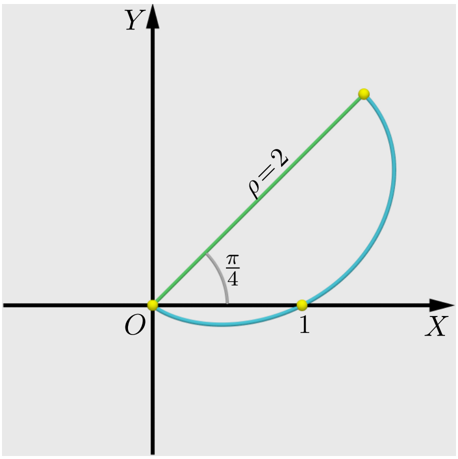

Figura 11.31: Curva $\mathcal{C}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Pelas simetrias da curva, é fácil ver que o esboço de $\mathcal{C}$ é o mostrado na Figura 11.32.

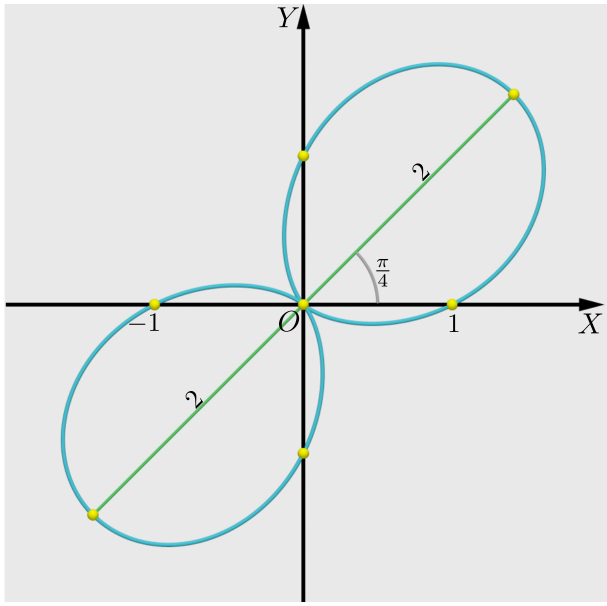

Figura 11.32: Curva $\mathcal{C} : \rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$

(c) $\mathcal{C} : \rho = 1 + 2\cos\theta$.

Solução. Neste exemplo, ρ pode assumir valores negativos e positivos. Logo, $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Substituindo ρ e θ na equação dada, obtemos que

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{x^2+y^2} = 1 \pm \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} &\iff x^2+y^2 = \pm\sqrt{x^2+y^2} + 2x \\ &\iff (x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2 \end{aligned}$$

é a equação cartesiana da curva. É fácil verificar que esta curva é simétrica em relação ao eixo$-OX$, mas não é simétrica em relação ao eixo$-OY$. Portanto, para esboçá-la, basta variar o parâmetro θ no intervalo $[0, \pi]$.

Para $\theta \in [0, \pi]$, temos:

- $\rho = 1 + 2\cos\theta = 0$ se, e só se, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, ou seja, $\rho = 0$ se, e só se, $\theta_0 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$;
- $\rho > 0$ se, e só se, $-\dfrac{1}{2} < \cos\theta \leq 1$, ou seja, se, e só se, $0 \leq \theta < \dfrac{2\pi}{3}$;
- $\rho < 0$ se, e só se, $-1 \leq \cos\theta < -\dfrac{1}{2}$, ou seja, se, e só se, $\dfrac{2\pi}{3} < \theta \leq \pi$.

Tomando os pontos $P_1 = (3, 0)$, $P_2 = (2, \pi/3)$, $P_3 = (1, \pi/2)$, $P_4 = (0, 2\pi/3)$ e $P_5 = (-1, \pi)$ em coordenadas polares da curva, podemos esboçar a parte da curva correspondente ao intervalo $[0, \pi]$ (ver Fig. 11.33).

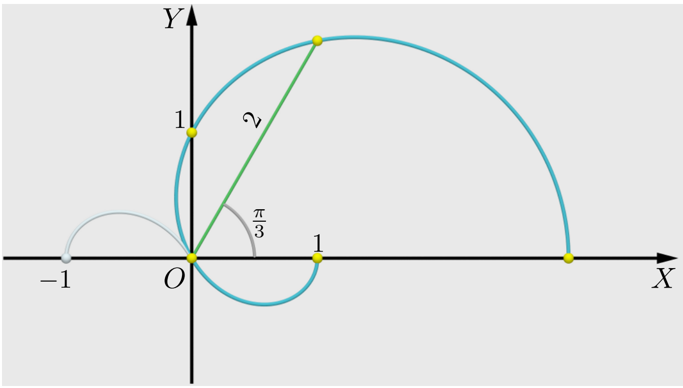

Figura 11.33: Curva $\mathcal{C}$ descrita variando θ em $[0, \pi]$

Observe que o esboço da curva no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, no qual $\rho \leq 0$, é o simétrico, com respeito à origem, do gráfico da curva $\{(|\rho|, \theta)\,;\, \rho = 1 + 2\cos\theta \text{ e } \theta \in [2\pi/3, \pi]\}$ (parte clara na Figura 11.25).

Sendo a curva simétrica em relação ao eixo$-OX$, obtemos o esboço completo da curva $\mathcal{C}$ (ver Fig. 11.34).

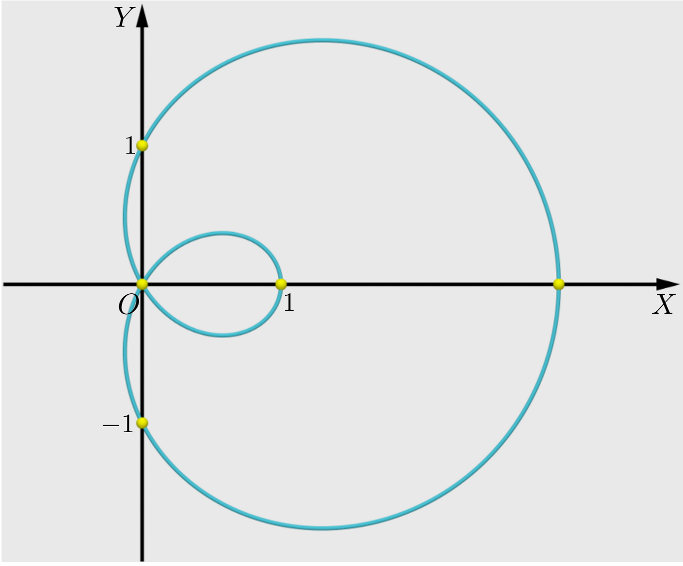

Figura 11.34: Curva $\mathcal{C}$

(d) $\mathcal{C} : \rho \operatorname{tg}\theta = 1.$

Solução. Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{y}{x} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \pm y\sqrt{x^2+y^2} = x \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2(x^2+y^2) = x^2 \end{aligned} \tag{11.8}$$

é a equação cartesiana de $\mathcal{C}$.

Como, pela equação (11.8), a curva é simétrica com respeito aos eixos OX e OY, basta analizá-la no intervalo $[0, \pi/2]$.

Temos $\rho = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0$ se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, ρ é decrescente e positiva em $(0, \pi/2)$, e $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \rho(\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \infty$. Além disso, como $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ e $y(\theta) = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta$ são as coordenadas cartesianas do ponto $(\rho(\theta), \theta)$, temos que

$$\lim_{\theta\to 0^+} x(\theta) = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\theta\to 0^+} y(\theta) = \lim_{\theta\to 0^+} \cos\theta = 1,$$

ou seja, $y = 1$ é uma assíntota da curva $\mathcal{C}$. Pelo obtido acima, vemos que

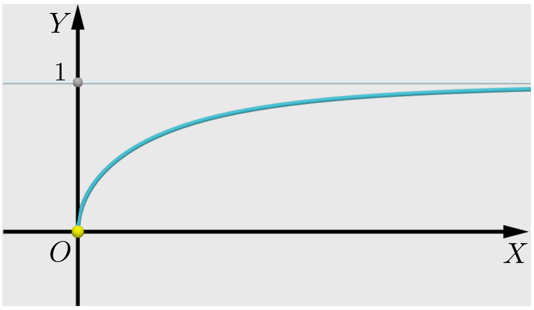

Figura 11.35: Curva $\mathcal{C}$ variando θ em $[0, \pi/2]$

é o esboço de $\mathcal{C}$ no intervalo $[0, \pi/2]$. Então, pela simetria da curva em relação aos eixos OX e OY, temos que o traço de $\mathcal{C}$ é o mostrado na Figura 11.36.

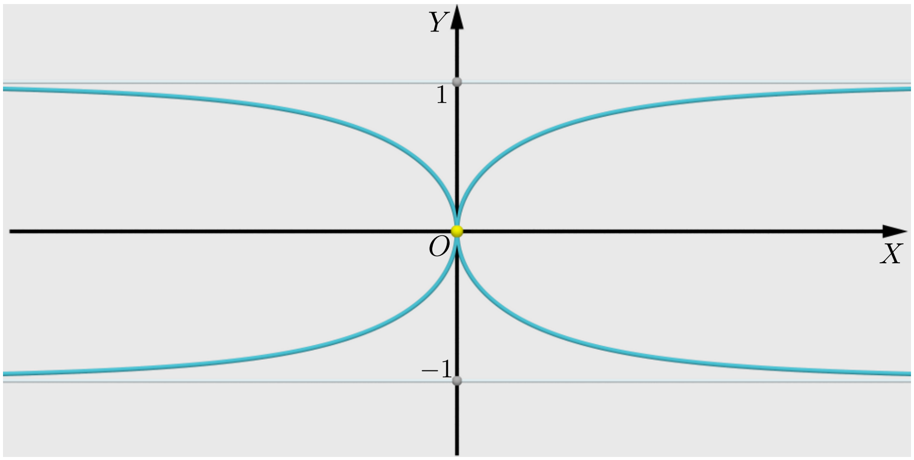

Figura 11.36: Curva $\mathcal{C}$

11.2 Exercícios

1. Obtenha as coordenadas polares dos pontos dados em coordenadas cartesianas, onde:

   $A = (1, \sqrt{3})$, $B = (-\sqrt{3}, 1)$, $C = (4, -4)$, $D = (-2, 1)$, $E = (0, -2)$.

2. Encontre as coordenadas cartesianas dos pontos dados em coordenadas polares, onde:

   $A = (2, \pi/6)$, $B = (-3, 0)$, $C = (4, -\pi/4)$, $D = (-1, \pi/3)$, $E = (3, \theta_0)$, onde $\operatorname{tg}\theta_0 = 4/3$.

3. Determine a distância do ponto P ao ponto Q dados em coordenadas polares, onde:

   (a) $P = (2, \pi/4)$ e $Q = (3, -\pi/4)$;

   (b) $P = (1, \theta_0)$ e $Q = (2, \pi/6)$, com $\operatorname{tg}\theta_0 = 3/4$;

   (c) $P = (6, \theta_0)$ e $Q = (-6, \theta_1)$, com $\operatorname{tg}\theta_0 = 2$ e $\operatorname{tg}\theta_1 = 1/2$.

4. Encontre a equação cartesiana e faça um esboço da curva polar:

   (a) $\mathcal{C} : \rho\cos(\theta - \pi/4) = 1$; (b) $\mathcal{C} : \rho = 4\cos\theta$;
   (c) $\mathcal{C} : \rho\operatorname{sen}\theta = -4$; (d) $\mathcal{C} : \rho^2 + 4\cos(\theta - \pi/3) = -3$;
   (e) $\mathcal{C} : \rho = 3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta$; (f) $\mathcal{C} : \rho = 2|\cos\theta|$;
   (g) $\mathcal{C} : \rho|\cos\theta| = 4$.

5. Determine a equação cartesiana e as simetrias da curva $\mathcal{C}$. Faça também um esboço de $\mathcal{C}$.

   (a) $\mathcal{C} : \rho^2 = -25\cos 2\theta$; (b) $\mathcal{C} : \rho = \cos 2\theta$;
   (c) $\mathcal{C} : \rho = \operatorname{sen} 3\theta$; (d) $\mathcal{C} : \rho(1 - \cos\theta) = 2$;
   (e) $\mathcal{C} : \rho = 2\sec\theta - 1$; (f) $\mathcal{C} : \rho = 2\operatorname{tg}^2\theta$.

6. Uma família de curvas tem equação polar
   $$\mathcal{C} : \rho = \frac{1 - m\cos\theta}{1 + m\cos\theta}, \text{ com } m \in \mathbb{R}.$$
   Investigue como o traço de $\mathcal{C}$ muda quando o parâmetro m assume todos os valores reais.

7. Verifique que as curvas polares $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e $\rho = \operatorname{sen}\theta - 1$ possuem o mesmo traço.

8. Esboçe a região do plano que consiste dos pontos cujas coordenadas polares (ρ, θ) satisfazem às inequações:

(a) $1 \leq \rho \leq 3$;

(b) $2 \leq \rho \leq 4$ e $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$;

(c) $0 \leq \rho \leq 2$ e $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/6$;

(d) $-1 \leq \rho \leq 1$ e $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$.

9. considere a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{12} \leq y \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Faça um esboço de $\mathcal{R}$ e descreva-a como reunião de regiões na forma:

$$\begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \end{cases}$$

onde (ρ, θ) são as coordenadas polares de um ponto de $\mathcal{R}$.

10. Descreva a região $\mathcal{R}$ como uma reunião de regiões na forma

$$\begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \end{cases}$$

onde (ρ, θ) são as coordenadas polares de um ponto de $\mathcal{R}$, sendo:

(a) $\mathcal{R}$ a região interior a ambas as curvas

$$\mathcal{C}_1 : \rho = 4\sqrt{3}\cos\theta \text{ e } \mathcal{C}_2 : \rho = 4\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

(b) $\mathcal{R}$ a região limitada pelo círculo $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e pelas retas $y = x$, $y = -x$ e $x = 2$, que contém o ponto $(1, 0)$, onde (x, y) são as coordenadas cartesianas de um ponto.

◇