12

Cônicas em Coordenadas Polares

Sumário

12.1 Introdução 2

12.2 Definição geral de uma cônica 2

12.3 Equação polar das cônicas 8

12.4 Exercícios 14

12.1 Introdução

No Capítulo 7 definimos uma parábola em termos de seu foco e de sua diretriz, enquanto que, nos Capítulos 5 e 6, definimos uma elipse e uma hipérbole, respectivamente, em termos de seus focos. Nesta unidade daremos uma definição geral que engloba os três tipos de cônicas em termos de um foco e da diretriz correspondente a esse foco.

Usando a definição geral de uma cônica e escolhendo um sistema de coordenadas polares com origem no foco e eixo polar perpendicular ou paralela à diretriz, veremos, na seção 12.3, que uma cônica nessas coordenadas polares assume uma forma bem simples.

12.2 Definição geral de uma cônica

Teorema 1 Sejam F um ponto do plano, $\mathcal{L}$ uma reta do plano tal que $F \notin \mathcal{L}$ e e um número real positivo. Então, o conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ P \,\middle|\, d(P,F) = e\, d(P,\mathcal{L}) \right\}$$

é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$, de foco no ponto F e excentricidade e.

Demonstração Note que se $e = 1$, então

$$\mathcal{C} = \left\{ P \,\middle|\, d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \right\}$$

é uma parábola de foco F e diretriz $\mathcal{L}$, de acordo com a definição de parábola dada no Capítulo 7.

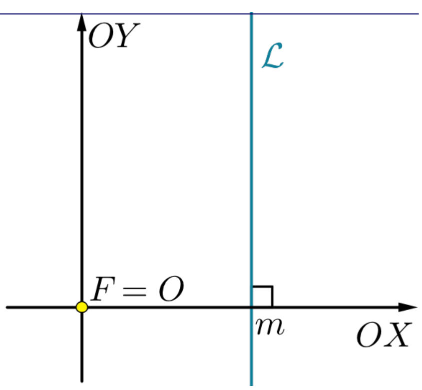


Figura 12.1: Sistema OXY escolhido.

Suponhamos que $0 < e \neq 1$. Seja o sistema de eixos ortogonais OXY tal que $F = (0,0)$ e $\mathcal{L} : x = m$, com $m > 0$.

Temos, então, que:

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in \mathcal{C} &\iff \sqrt{x^2+y^2} = e\,|x-m| \\ &\iff x^2+y^2 = e^2(x-m)^2 \\ &\iff x^2+y^2 = e^2(x^2-2mx+m^2) \\ &\iff (1-e^2)\left(x^2 + \frac{2me^2}{1-e^2}\,x\right) + y^2 = m^2e^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad (1-e^2)\left(x+\frac{me^2}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = m^2e^2 + \frac{(1-e^2)m^2e^4}{(1-e^2)^2}\\
&\Longleftrightarrow \quad (1-e^2)\left(x+\frac{me^2}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = m^2e^2\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\right)\\
&\Longleftrightarrow \quad (1-e^2)\left(x+\frac{me^2}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2e^2}{1-e^2}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\left(x+\dfrac{me^2}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{m^2e^2}{1-e^2}} = 1\,.
\end{aligned}
$$

• **Se** $0<e<1$, então $0<1-e^2<1$. Assim, $\mathcal{C}$ é uma elipse, cuja reta focal é o eixo$-OX$, pois $\dfrac{m^2e^2}{(1-e^2)^2} > \dfrac{m^2e^2}{1-e^2}$. Logo, $a=\dfrac{me}{1-e^2}$, $b=\dfrac{me}{\sqrt{1-e^2}}$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
&c^2 = a^2-b^2 = \frac{m^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{1}{1-e^2}-1\right) = \frac{m^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)\\
\Longleftrightarrow \quad &c^2 = \frac{m^2e^4}{(1-e^2)^2} \Longleftrightarrow c = \frac{me^2}{1-e^2}\,.
\end{aligned}
$$

Além disso,

- $\dfrac{c}{a} = \dfrac{me^2}{1-e^2}\times\dfrac{1-e^2}{me} = e$ é a excentricidade.
- $C=\left(\dfrac{-me^2}{1-e^2}\,,0\right)$ é o centro.
- $F_1 = C+(c,0) = (0,0) = F$ é um foco.
- $\mathcal{L}: x=+m$ é perpendicular à reta focal = eixo$-OX$

e

$$
\begin{aligned}
d(C,\mathcal{L}) &= |x-m| = \left|-\frac{me^2}{1-e^2}-m\right| = \left|\frac{me^2}{1-e^2}+m\right|\\
&= m\left|\frac{e^2+1-e^2}{1-e^2}\right| = \frac{m}{1-e^2} = \frac{a}{e}\,.
\end{aligned}
$$

Observe que o foco F está entre o centro C e o ponto $M=(m,0)$, pois a abscissa m de M é positiva e a abscissa $-\dfrac{me^2}{1-e^2}$ de C é negativa, onde M é o ponto de interseção de $\mathcal{L}$ com a reta focal.

• **Se** $e>1$, então $1-e^2<0$. Logo, $\mathcal{C}$ é uma hipérbole com reta-focal = eixo$-OX$, pois $\dfrac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}>0$ e $\dfrac{m^2e^2}{1-e^2}<0$. Assim,

$$\mathcal{C}: \frac{\left(x+\dfrac{me^2}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\dfrac{m^2e^2}{e^2-1}} = 1\,,$$

onde

$$a = \sqrt{\frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}} = \frac{me}{e^2-1}\,,\ b = \sqrt{\frac{m^2e^2}{e^2-1}} = \frac{me}{\sqrt{e^2-1}}\,,$$

e

$$\begin{aligned} c^2 = &\ a^2+b^2 = \frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{m^2e^2}{e^2-1} = \frac{m^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{1}{1-e^2}-1\right) \\ \iff &\ c^2 = \frac{m^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{1-1+e^2}{1-e^2}\right) = \frac{m^2e^4}{(1-e^2)^2} \\ \iff &\ c = \frac{me^2}{e^2-1}\,. \end{aligned}$$

Temos, também, que

- $\dfrac{c}{a} = \dfrac{me^2}{e^2-1} \times \dfrac{e^2-1}{me} = e$ é a excentricidade,
- $C = \left(-\dfrac{me^2}{1-e^2}, 0\right)$ é o centro,
- $F_1 = C + (c,0) = (0,0) = F$ é um foco,
- $\mathcal{L} : x = m$ é perpendicular à reta-focal $=$ eixo$-OX$

e

$$\begin{aligned} d(C,\mathcal{L}) &= |x-m| = \left|-\frac{me^2}{1-e^2} - m\right| = \left|\frac{me^2}{1-e^2}+m\right| \\ &= m\left|\frac{e^2}{1-e^2}+1\right| = m\left|\frac{1}{1-e^2}\right| = \frac{m}{e^2-1} = \frac{a}{e}. \end{aligned}$$

Note que, na hipérbole, o ponto $M=(m,0)$ está entre o foco F e o centro C, pois $0 < m < -\dfrac{me^2}{1-e^2}$, onde M é o ponto de interseção de $\mathcal{L}$ com reta focal.

A reta $\mathcal{L}$ mencianada no teorema é chamada **diretriz correspondente ao foco F**.

No caso de uma elipse de focos F_1 e F_2, temos duas diretrizes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ correspondentes a cada um dos focos.

A diretriz $\mathcal{L}_i$ correspondente ao foco F_i, $i=1,2$, é a reta perpendicular à reta focal que está à distância $\dfrac{a}{e}$ do centro, com o foco F_i pertencente ao segmento CM_i, onde M_i é o ponto da interseção da reta focal ℓ com $\mathcal{L}_i$.

Para a elipse
$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,,$$
de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal ℓ paralela ao eixo-OX, a reta
$$\mathcal{L}_1 : x = x_0 - \frac{a}{e}$$
é a diretriz correspondente ao foco $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e a reta
$$\mathcal{L}_2 : x = x_0 + \frac{a}{e}$$
é a diretriz correspondente ao foco $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

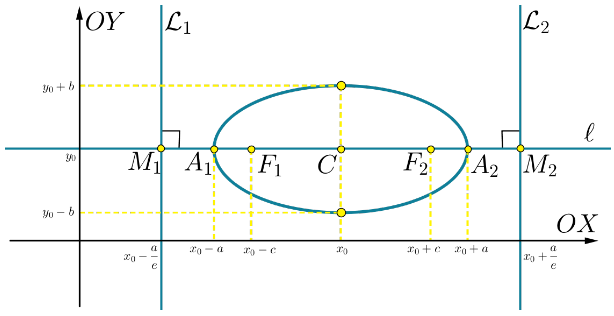


Figura 12.2: Elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ e seus principais elementos.

Para a elipse
$$\mathcal{E} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1\,,$$
de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal ℓ paralela ao eixo$-OY$,
$$\mathcal{L}_1 : y = y_0 - \frac{a}{e}$$
é a diretriz correspondente ao foco $F_1 = (x_0, y_0 - c)$, e
$$\mathcal{L}_2 : y = y_0 + \frac{a}{e}$$
é a diretriz correspondente ao foco $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.

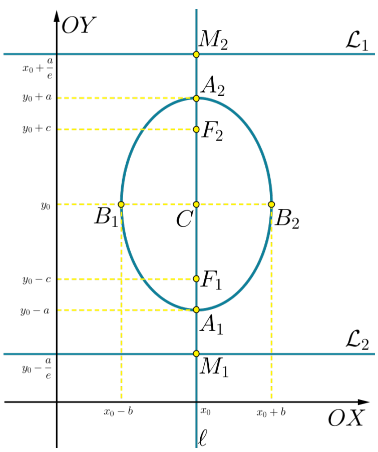


Figura 12.3: Elipse $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ e seus principais elementos.

No caso de uma hipérbole de focos F_1 e F_2 temos, também, duas diretrizes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ correspondentes a cada um dos focos. A diretriz $\mathcal{L}_i$ correspondente ao foco F_i, $i = 1, 2$, é a reta perpendicular à reta focal que está à distância $\frac{a}{e}$ do centro, com $M_i \in CF_i$, sendo M_i o ponto de interseção da diretriz $\mathcal{L}_i$ com a reta focal ℓ.

Para a hipérbole
$$\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,,$$
com centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$, a reta
$$\mathcal{L}_1 : x = x_0 - \frac{a}{e}$$
é a diretriz correspondente ao foco $F_1 = (x_0 - c, y_0)$, e a reta
$$\mathcal{L}_2 : x = x_0 + \frac{a}{e}$$
é a diretriz correspondente ao foco $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

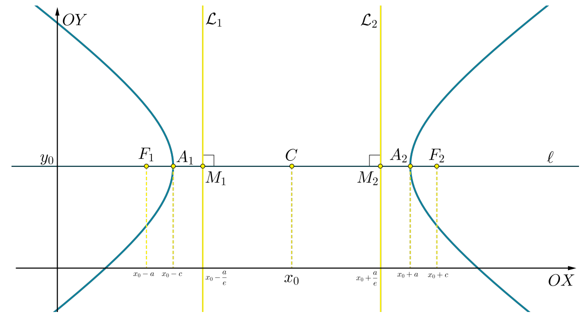


Figura 12.4: Hipérbole $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ e seus principais elementos.

Para a hipérbole

$$\mathcal{H} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal ℓ paralela ao eixo$-OY$, a reta

$$\mathcal{L}_1 : y = y_0 - \frac{a}{e}$$

é a diretriz correspondente ao foco $F_1 = (x_0, y_0 - c)$, e a reta

$$\mathcal{L}_2 : y = y_0 + \frac{a}{e}$$

é a diretriz correspondente ao foco $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.

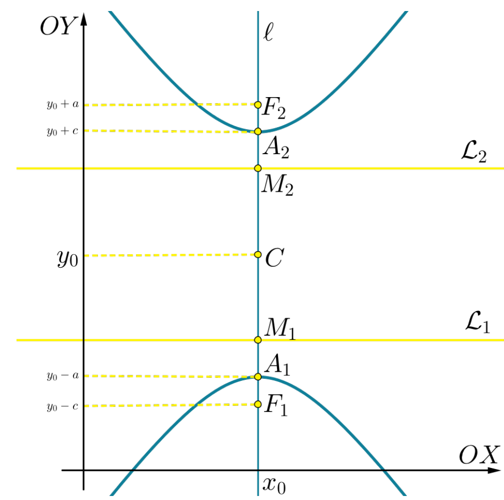


Figura 12.5: Hipérbole $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ e seus principais elementos.

Exemplo 1

Determine os focos, os vértices e as equações das diretrizes das cônicas abaixo. Faça também um esboço da curva.

(a) $5x^2 + 9y^2 = 45$.

Solução. A equação se escreve na forma $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ e representa a elipse com centro $C = (0,0)$; reta focal: $y = 0$ (eixo$-OX$); $a^2 = 9$; $b^2 = 5$; $c^2 = a^2 - b^2 = 4$; focos: $F_1 = (-2,0)$ e $F_2 = (2,0)$; vértices sobre a reta focal: $A_1 = (-3,0)$ e $A_2 = (3,0)$; vértices sobre a reta não-focal: $B_1 = (0, -\sqrt{5})$ e $B_2 = (0, \sqrt{5})$; reta não-focal: $x = 0$ (eixo$-OY$); excentricidade $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}$; diretrizes: $\mathcal{L}_1 : x = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{9}{2}$ e $\mathcal{L}_2 : x = \dfrac{a}{e} = \dfrac{9}{2}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente.

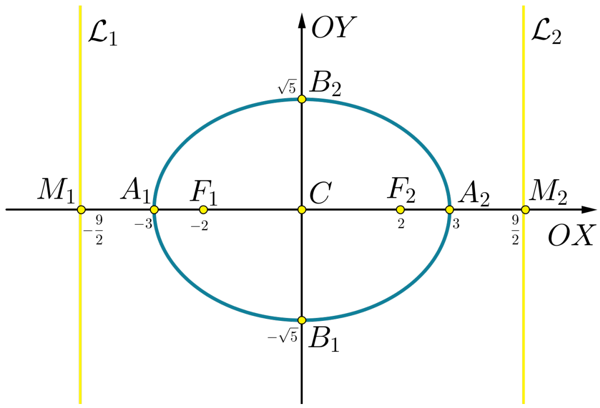


Figura 12.6: Elipse $\mathcal{E} : 5x^2 + 9y^2 = 45$.

(b) $2y^2 - 7x^2 = 14$.

Solução. A equação se escreve na forma

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{2} = 1,$$

e representa a hipérbole com centro $C = (0,0)$; reta focal $\ell : x = 0$ (eixo$-OY$); $a^2 = 7$; $b^2 = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 9$; focos: $F_1 = (0,-3)$ e $F_2 = (0,3)$; vértices: $A_1 = (0, -\sqrt{7})$ e $A_2 = (0, \sqrt{7})$; vértices imaginários: $B_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $B_2 = (\sqrt{2}, 0)$; excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$; diretrizes: $\mathcal{L}_1 : y = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{7}{3}$ e $\mathcal{L}_2 : y = \dfrac{a}{e} = \dfrac{7}{3}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente, e assíntotas: $r_{\pm} : x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\, y$.

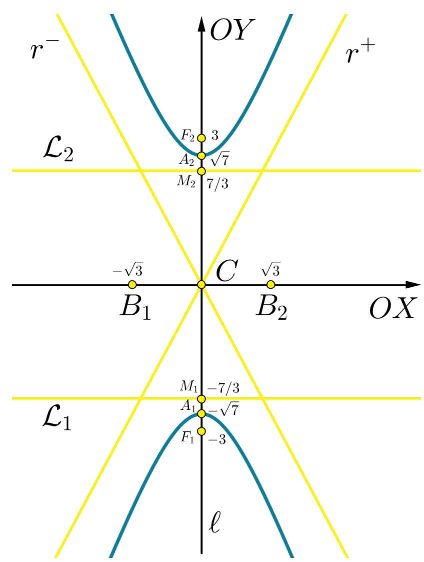


Figura 12.7: Hipérbole $\mathcal{H} : 2y^2 - 7x^2 = 14$.

(c) $9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191$.

Solução. Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 2y) = 191 \\
\iff\ & 9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 2y + 1) = 191 + 9 + 25 \\
\iff\ & 9(x-1)^2 + 25(y-1)^2 = 225 \\
\iff\ & \mathcal{E} : \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1\,.
\end{aligned}$$

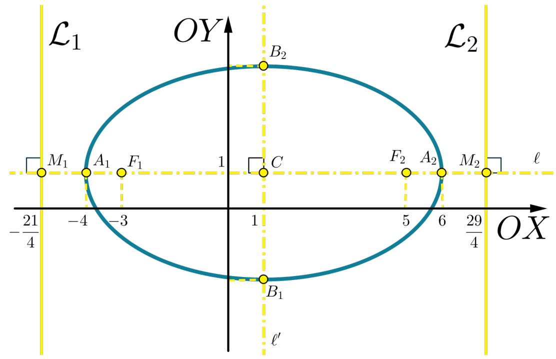


Figura 12.8: Elipse $\mathcal{E} : 9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191$.

Assim, a cônica é a elipse com centro $C = (1, 1)$; reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$; $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$; vértices sobre a reta focal: $A_1 = (1 - a, 1) = (-4, 1)$ e $A_2 = (1 + a, 1) = (6, 1)$; focos: $F_1 = (1 - c, 1) = (-3, 1)$ e $F_2 = (1 + c, 1) = (5, 1)$; vértices sobre a reta não-focal: $B_1 = (1, 1 - b) = (1, -2)$ e $B_2 = (1, 1 + b) = (1, 4)$; reta não-focal $\ell' : x = 1$, paralela ao eixo$-OY$; excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$; diretrizes: $\mathcal{L}_1 : x = 1 - \dfrac{a}{e} = 1 - \dfrac{25}{4} = -\dfrac{21}{4}$ e $\mathcal{L}_2 : x = 1 + \dfrac{a}{e} = 1 + \dfrac{25}{4} = \dfrac{29}{4}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente.

12.3 Equação polar das cônicas

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica de excentricidade $e > 0$. Consideremos um sistema de coordenadas polares em que um foco F da cônica é a origem O e o eixo polar $\overrightarrow{OA}$ está contido na reta focal de $\mathcal{C}$.

Designamos $\mathcal{L}$ a diretriz associada ao foco F e seja $h = d(F, \mathcal{L})$.

Segundo a definição geral de uma cônica,

$$P = (\rho, \theta) \in \mathcal{C} \iff d(P, F) = e\, d(P, \mathcal{L}) \iff \rho = e\, d(P, \mathcal{L})\,.$$

Temos dois casos a considerar.

- Se $\mathcal{L}$ não intersecta o eixo polar, então $d(P, \mathcal{L}) = h + \rho \cos\theta$.

  Neste caso, $P = (\rho, \theta) \in \mathcal{C}$ se, e somente se,

$$\rho = e(h + \rho\cos\theta) \iff \rho = \frac{eh}{1 - e\cos\theta}\,.$$

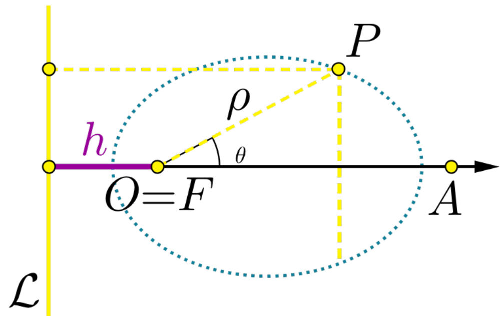


Figura 12.9: $\mathcal{L}$ não intersecta $\overrightarrow{OA}$.

- Se $\mathcal{L}$ intersecta o eixo polar, então $d(P,\mathcal{L}) = h - \rho\cos\theta$.

  Neste caso, $P = (\rho,\theta) \in \mathcal{C}$ se, e somente se,

$$\rho = e(h - \rho\cos\theta) \iff \rho = \frac{eh}{1 + e\cos\theta}\,.$$

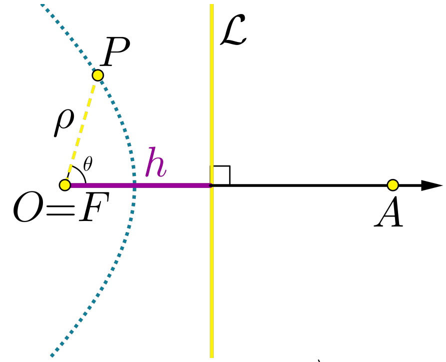


Figura 12.10: $\mathcal{L}$ intersecta $\overrightarrow{OA}$.

Ou seja, a equação polar de $\mathcal{C}$, nesse sistema, $O\rho\theta$ é

$$\boxed{\mathcal{C} : \rho = \frac{eh}{1 \pm e\,\cos\theta}} \tag{12.1}$$

na qual tomamos o sinal positivo $(+)$ se a diretriz $\mathcal{L}$ intersecta o eixo polar, e o sinal negativo $(-)$ se $\mathcal{L}$ não intersecta o eixo polar.

De modo análogo, se o eixo polar $\overrightarrow{OA}$, com origem $O = F$, for escolhido de modo a ser paralelo à diretriz $\mathcal{L}$, ou seja, perpendicular à reta focal, podemos mostrar que a equação polar da cônica é dada por

$$\boxed{\mathcal{C} : \rho = \frac{eh}{1 \pm e\,\operatorname{sen}\theta}} \tag{12.2}$$

na qual tomamos o sinal positivo $(+)$ se a diretriz $\mathcal{L}$ intersecta a semirreta $\overrightarrow{OB}$, onde $\overrightarrow{OB}$ é a rotação de $\pi/2$ do eixo polar $\overrightarrow{OA}$, no sentido positivo. Caso contrário, tomamos o sinal negativo $(-)$.

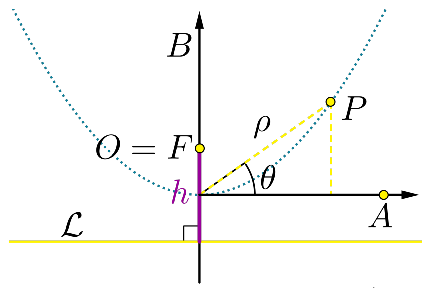


Figura 12.11: $\mathcal{L}$ não intercepta $\overrightarrow{OB}$.

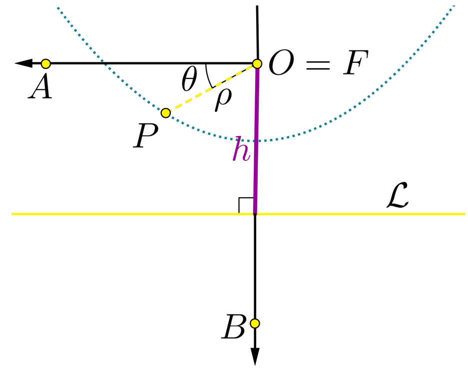


Figura 12.12: $\mathcal{L}$ intercepta $\overrightarrow{OB}$.

Para Saber Mais

Como foi mencionado no Capítulo 5, Isaac Newton, em seu Principia Mathematica, de 1687, mostrou as três leis de Kepler a partir de duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei Universal da Gravitação. Para isso, usou o cálculo vetorial e o cálculo diferencial para chegar a conclusão que a equação do movimento de um planeta em todo do Sol tem equação polar $\rho = \dfrac{eh}{1 + e\cos\theta}$, num sistema de coordenadas polares com o Sol no pólo. Como a órbita de um planeta é uma curva limitada, a cônica descrita por um planeta só pode ser uma elipse, provando, assim, a primeira lei de Kepler.

Exemplo 2

Seja $\mathcal{P}$ uma parábola com foco F na origem O e vértice V no ponto $(4, \pi)$ com respeito a um sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$.

Como o foco $F = (0, 0)$ e o vértice $V = (4, \pi)$ pertencem à reta focal, o eixo polar $\overrightarrow{OA}$ está contido na reta focal. Além disso, como o vértice está à esquerda de O, a diretriz $\mathcal{L}$ de $\mathcal{P}$ não corta o eixo polar.

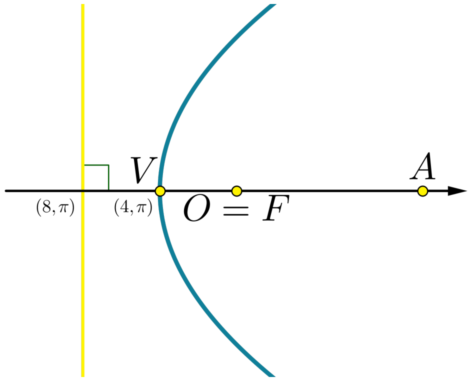


Figura 12.13: $\rho = \frac{8}{1-\cos\theta}$.

Logo, a equação polar de $\mathcal{P}$ é da forma 12.1 com sinal negativo no denominador, excentricidade $e = 1$ e $h = d(F, \mathcal{L}) = 2p = 8$, pois $p = d(V, F) = 4$. Assim, a equação polar de $\mathcal{P}$ é

$$\rho = \frac{8}{1 - \cos\theta}$$

e a equação de sua diretriz $\mathcal{L}$ é $r\cos\theta = -8$.

Exemplo 3

Considere a cônica $\mathcal{C}$ de equação polar $\rho = \dfrac{2}{3-\cos\theta}$.

Multiplicando o numerador e o denominador da equação polar por $\frac{1}{3}$, obtemos

$$\mathcal{C} : \rho = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cos\theta}.$$

Então, por 12.1, a excentricidade de $\mathcal{C}$ é $e = \frac{1}{3}$. Logo, $\mathcal{C}$ é uma elipse. Além disso, por 12.1, o sistema polar $O\rho\theta$ considerado tem origem O num dos focos F_1 de $\mathcal{C}$ e eixo polar $\overrightarrow{OA}$ contido na reta focal de modo que a diretriz $\mathcal{L}_1$, correspondente ao foco F_1, não intercepta o eixo polar. Portanto, estamos na situação mostrada na figura 12.14.

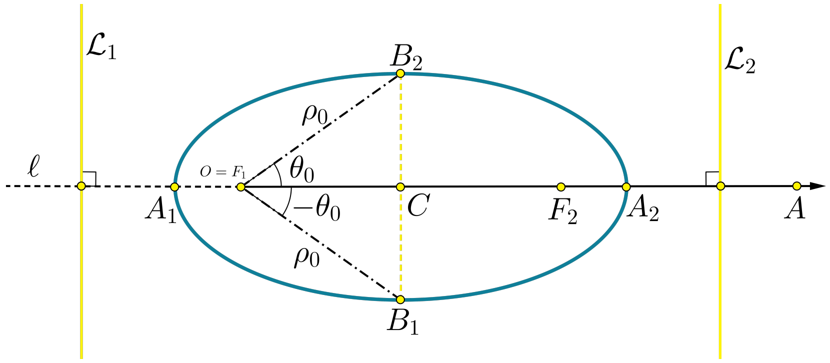


Figura 12.14: Posição dos focos F_1 e F_2, dos vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 e das diretrizes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ de $\mathcal{C}$.

Fazendo $\theta = 0$ na equação de $\mathcal{C}$, obtemos $\rho = 1$. Logo, segundo o esquema da figura 12.14, $A_2 = (1, 0)$.

Para obter o outro vértice A_1 sobre a reta focal, devemos fazer $\theta = \pi$ na equação de $\mathcal{C}$. Assim $\rho = \frac{1}{2}$ e $A_1 = (\frac{1}{2}, \pi)$.

A distância entre os vértices é $2a = d(A_1, A_2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, de onde concluímos que $a = \frac{3}{4}$ é a medida do semieixo focal da elipse.

Sendo $e = \dfrac{c}{a}$, obtemos $c = e\,a = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Portanto, o centro C da elipse $\mathcal{C}$ tem coordenadas polares $C = (c, 0)_{O\rho\theta} = (\frac{1}{4}, 0)$.

Conhecendo o centro $C = (\frac{1}{4}, 0)$ e a distância do centro aos focos, $c = d(C, F_2) = d(C, F_1) = \frac{1}{4}$, podemos obter as coordenadas polares do outro foco:

$$F_2 = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Logo, $\mathcal{L}_1 : \rho\cos\theta = -\dfrac{a}{e} + c = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4} = -2$ e $\mathcal{L}_2 : \rho\cos\theta = \dfrac{a}{e} + c =$

$\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$ são as diretrizes correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente, no sistema polar $O\rho\,\theta$.

Finalmente, como a medida do semieixo não focal é $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9/16-1/16}=\sqrt{8/16}=\sqrt{2}/2$, temos que $B_1=(\rho_0,-\theta_0)$ e $B_2=(\rho_0,\theta_0)$, onde $\rho=\sqrt{c^2+b^2}=\sqrt{1/16+2/4}=\sqrt{9/16}=3/4$, $\cos\theta_0=\frac{c}{a}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$ e $\operatorname{sen}\theta_0=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}/2}{3/4}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Exemplo 4

A equação polar de uma cônica $\mathcal{C}$, num sistema de coordenadas $O\rho\,\theta$, é $\rho=\frac{3}{3+6\operatorname{sen}\theta}$.

Dividindo o numerador e o denominador da equação por 3, obtemos a equação

$$\mathcal{H}:\rho=\frac{1}{1+2\operatorname{sen}\theta}\,, \tag{12.3}$$

que é da forma 12.2 com sinal positivo $(+)$ no denominador e excentricidade $e=2$. Como $e>1$, a cônica $\mathcal{C}$ é uma hipérbole com um dos focos F_1 na origem do eixo polar $\overrightarrow{OA}$.

Se $\overrightarrow{OB}$ é a semirreta obtida girando o eixo polar $\overrightarrow{OA}$ de $\pi/2$, no sentido positivo, temos, por 12.3, que $\overrightarrow{OB}$ está sobre a reta focal de $\mathcal{H}$ e a diretriz $\mathcal{L}_1$, correspondente ao foco $F_1=O$, corta a semirreta $\overrightarrow{OB}$.

Sejam C o centro, A_1 e A_2 os vértices, B_1 e B_2 os vértices imaginários e F_2 o outro foco de $\mathcal{H}$. A figura 12.15 ilustra a posição desses pontos e das diretrizes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente.

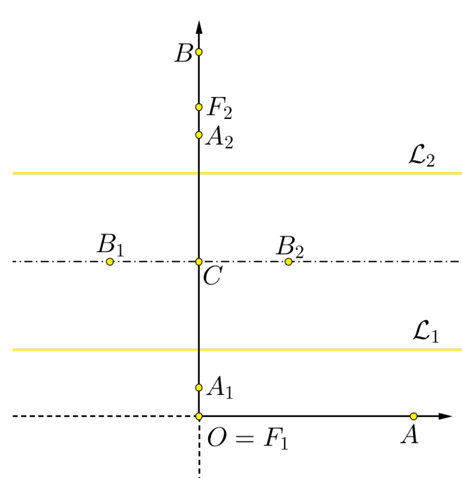


Figura 12.15: Posições de F_1, F_2, A_1, A_2, B_1, B_2, C, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ no sistema $O\rho\,\theta$.

Como $ed(F_1,\mathcal{L}_1)=1$ e, por outro lado, $d(F_1,\mathcal{L}_1)=d(F_1,C)-d(C,\mathcal{L}_1)=c-a/e=ae-a/e=a\left(\frac{e^2-1}{e}\right)$, obtemos que

$$\frac{1}{e}=a\left(\frac{e^2-1}{e}\right)$$
$$\iff\quad a=\frac{1}{e^2-1}=\frac{1}{3}.$$

Assim, $c = ae = \dfrac{2}{3}$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, $C = (2/3, \pi/2)$ é o centro, $A_1 = (2/3-1/3, \pi/2) = (1/3, \pi/2)$ e $A_2 = (2/3+1/3, \pi/2) = (1, \pi/2)$ são os vértices da hipérbole nas coordenadas polares $O\rho\theta$.

Pela figura 12.15, podemos ver que $d(B_1, F_1) = d(B_2, F_1) = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3/9 + 4/9} = \sqrt{7}/3$ e que o ângulo θ_0 que $\overrightarrow{OB_2}$ faz com $\overrightarrow{OA}$ é tal que $\tan\theta_0 = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2/3}{\sqrt{3}/3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Então, $B_1 = (\sqrt{7}/3, \pi - \theta_0)$ e $B_2 = (\sqrt{7}/3, \theta_0)$ são os vértices imaginários de $\mathcal{H}$ no sistema $O\rho\theta$.

Além disso, $F_2 = (2c, \pi/2) = (4/3, \pi/2)$ é o outro foco, $\mathcal{L}_1 : \rho \operatorname{sen}\theta = c - \dfrac{a}{e} = \dfrac{1}{2}$ é a diretriz correspondente ao foco F_1 e $\mathcal{L}_2 : \rho\operatorname{sen}\theta = c + \dfrac{a}{e} = \dfrac{5}{6}$ é a diretriz correspondente ao foco F_2.

As assíntotas $r_\pm$ de $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro $C = (2/3, \pi/2)$ e têm coeficientes angulares

$$\tan\varphi_\pm = \pm\frac{b}{a} = \pm\sqrt{3}$$

com respeito à semirreta $\overrightarrow{OB}$.

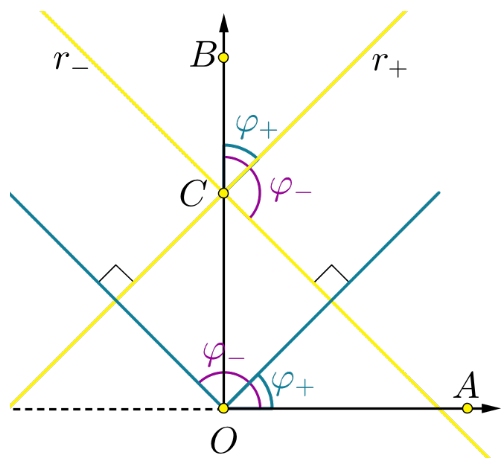


Figura 12.16: As assíntotas $r_\pm$ de $\mathcal{H}$.

Ou seja, $\varphi_+ = \pi/3$ e $\varphi_- = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$ são as inclinações das assíntotas com respeito a $\overrightarrow{OB}$. Então, $\theta_+ = \varphi_- = 2\pi/3$ e $\theta_- = \varphi_+ = \pi/3$ são as inclinações das retas normais às assíntotas r_+ e r_-, respectivamente, com respeito ao eixo polar $\overrightarrow{OA}$.

Portanto, pela Proposição 6 do Capítulo 11,

$$r_+ : \rho\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e

$$r_- : \rho\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

são as equações polares das assíntotas no sistema $O\rho\theta$.

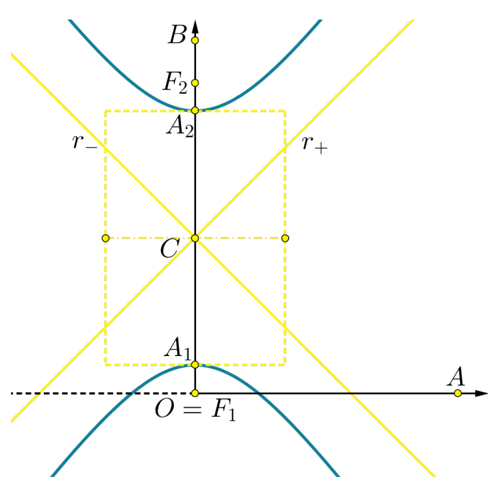


Figura 12.17: $\mathcal{H} : \frac{1}{1+2\operatorname{sen}\theta}$.

12.4 Exercícios

1. Encontre os focos e as diretrizes correspondentes das cônicas $\mathcal{C}$. Obtenha também os demais elementos e faça um esboço das cônicas.

   (a) $\mathcal{C} : 4x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 7 = 0$

   (b) $\mathcal{C} : -x^2 + 5y^2 + 4x - 10y - 19 = 0$

2. Sejam o sistema cartesiano OXY e o sistema polar $O\rho\theta$ tal que o eixo polar $\overrightarrow{OA}$ é o semieixo OX positivo. Encontre a equação polar e os principais elementos, em coordenadas polares, da cônica $\mathcal{C}$ com um dos focos F na origem O tal que:

   (a) $\mathcal{C}$ é uma hipérbole de excentricidade $e = \dfrac{7}{4}$ e a diretriz $y = 6$ correspondente ao foco $F = O$.

   (b) $\mathcal{C}$ é uma parábola de diretriz $x = 4$.

   (c) $\mathcal{C}$ é uma elipse de excentricidade $e = \dfrac{3}{4}$ e diretriz $x = -5$ correspondente ao foco $F = O$.

   (d) $\mathcal{C}$ é uma hipérbole com vértices em $(1, \pi/2)$ e $(3, \pi/2)$.

   (e) $\mathcal{C}$ é uma parábola de vértice em $(4, 3\pi/2)$.

   (f) $\mathcal{C}$ é uma elipse com vértices em $(3, 0)$ e $(1, \pi)$.

3. Determine os principais elementos e esboce a cônica $\mathcal{C}$, cuja equação polar é dada por:

   (a) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

   (b) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{10}{4 + 5\cos\theta}$

   (c) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{3}{4 - 8\cos\theta}$

   (d) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$

   (e) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{12}{4 - \operatorname{sen}\theta}$

   (f) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{1}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}$

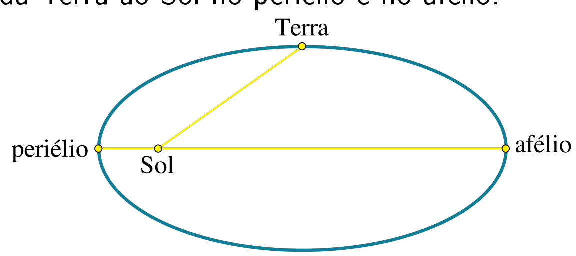
4. Mostre que a equação polar de uma elipse com diretriz $\rho\cos\theta = -d, d > 0$, correspondente ao foco $F = O$ na origem do sistema polar $O\rho\,\theta$, pode ser escrita na forma

$$\mathcal{C} : \rho = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\theta}\,,$$

onde $2a$ é o comprimento do eixo focal da elipse.

5. As órbitas de alguns planetas ao redor do Sol são elípticas, com o Sol num dos focos. As posições de um planeta que estão mais próximas ou mais afastadas do Sol são chamadas periélio e afélio do planeta, respectivamente. Use o exercício 4 para mostrar que a distância de um planeta no periélio até o Sol é $a(1-e)$ e que a distância de um planeta no afélio ao Sol é $a(1+e)$.

6. Encontre uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra ao redor do Sol (em um foco), sabendo que a excentricidade é cerca de $0,017$ e o comprimento do eixo focal é cerca de $2,99 \times 10^8 Km$. Obtenha também as distâncias da Terra ao Sol no periélio e no afélio.



7. O planeta Mercúrio percorre uma órbita elíptica em torno do Sol com excentricidade $0,26$. Sua distância mínima do Sol é $4,6 \times 10^7 Km$. Obtenha a distância máxima do planeta ao Sol e a equação polar de sua órbita elíptica.