13

Coordenadas e vetores no espaço

Sumário

13.1 Coordenadas no espaço

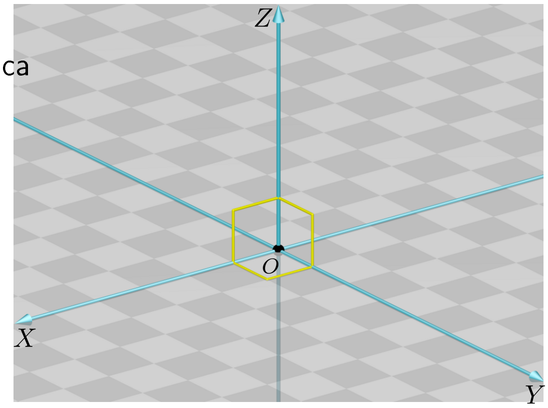

Figura 13.1: Eixos do sistema $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$

Neste capítulo começaremos o nosso estudo da Geometria Analítica Espacial. Primeiro vamos estender as noções de coordenadas, distância e vetor, vistas no plano no Capítulo 1, ao espaço euclidiano. Como dissemos naquele capítulo, assumiremos que o leitor conheça os principais axiomas e resultados da Geometria Euclidiana no espaço, relativos aos seus elementos básicos[1] .

Definição 1

Um **sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$ da Geometria Euclidiana** consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX, OY e OZ, com a mesma origem O (Figura 13.1).

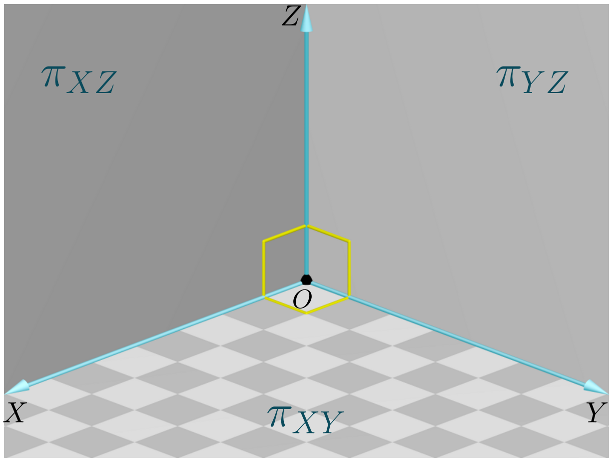

Figura 13.2: Planos cartesianos no espaço $\mathcal{E}$

Escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, há três planos especiais, chamados **planos cartesianos** (Figura 13.2):

- π_{XY}, o plano que contém os eixos OX e OY;
- π_{XZ}, o plano que contém os eixos OX e OZ;
- π_{YZ}, o plano que contém os eixos OY e OZ.

Em analogia ao feito no plano no Capítulo 1, um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço E e os ternos ordenados de números reais (x, y, z). Isto é, cada ponto do espaço corresponde exatamente a um terno ordenado de números

[1] Ver *Introdução à Geometria Espacial*, Carvalho, Paulo C. P., Ed. SBM (1993).

reais, e cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente a um ponto de $\mathcal{E}$.

Se o ponto P está em correspondência com o terno (x, y, z), dizemos que x, y e z são as **coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$**. Estas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

- **coordenada x**: coordenada no eixo OX do ponto de interseção deste eixo com o plano π' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{YZ}.

- **coordenada y**: coordenada no eixo OY do ponto de interseção deste eixo com o plano π'' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XZ}.

- **coordenada z**: coordenada no eixo OZ do ponto de interseção deste eixo com o plano π''' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XY}.

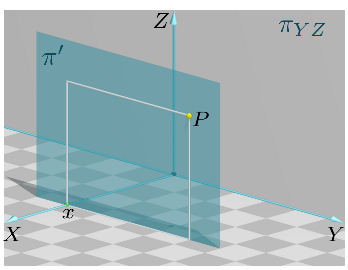

Figura 13.3: Coordenada x de P

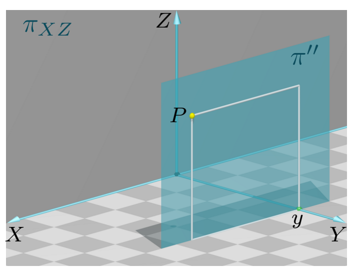

Figura 13.4: Coordenada y de P

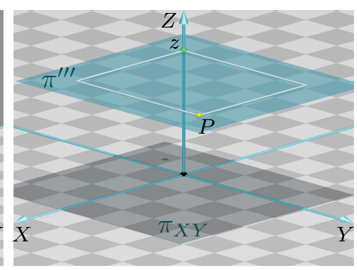

Figura 13.5: Coordenada z de P

Designamos por $\mathbb{R}^3$ o conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) de números reais. A escolha de um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$ determina uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{E}$ e $\mathbb{R}^3$. A bijeção $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é obtida associando-se a cada ponto $P \in \mathcal{E}$ o terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ formado pelas coordenadas de P relativas ao sistema $OXYZ$

Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, identificamos cada ponto $P \in \mathcal{E}$ pelas suas coordenadas (x, y, z) e escrevemos:

$$P = (x, y, z).$$

Com esta identificação, observamos que:

- a origem do sistema de eixos ortogonais é o ponto $O = (0, 0, 0)$.
- os eixos do sistema são os conjuntos:

$$\text{eixo } OX = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\};$$

$$\text{eixo } OY = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\};$$

$$\text{eixo } OZ = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

- os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\pi_{XY} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{XY} : z = 0;$$
$$\pi_{XZ} = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{XZ} : y = 0;$$
$$\pi_{YZ} = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{YZ} : x = 0.$$

Um sistema de eixos ortogonais no espaço $\mathcal{E}$ permite descrever os subconjuntos do espaço por meio das coordenadas de seus pontos. Vejamos, por exemplo, como caracterizar outros planos e algumas retas por equações que envolvem as coordenadas dos pontos neles contidos:

- Um plano π é **horizontal** se coincide ou é paralelo ao plano π_{XY} (Figura 13.6). Nesse caso, se o ponto de interseção do plano π com o eixo OZ é $(0, 0, c)$, então a terceira coordenada de qualquer ponto $P \in \pi$ é igual a c, ou seja,

$$\pi = \{(x, y, c) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, a **equação do plano** π é:

$$\pi : z = c.$$

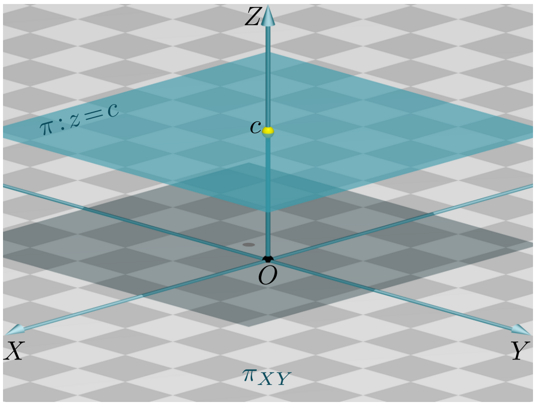

Figura 13.6: Plano horizontal π

- Analogamente, os planos paralelos aos planos π_{XZ} e π_{YZ} têm equações $y = b$ e $x = a$, com $b \neq 0$ e $a \neq 0$, respectivamente.

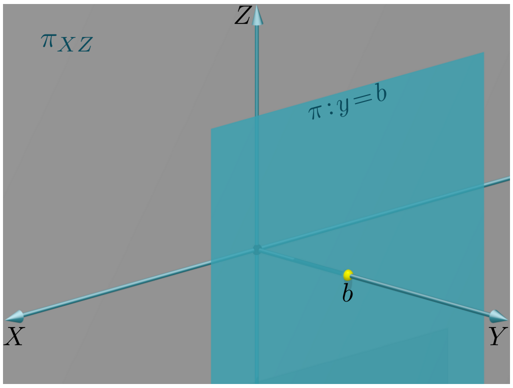

Figura 13.7: $\pi : y = b$

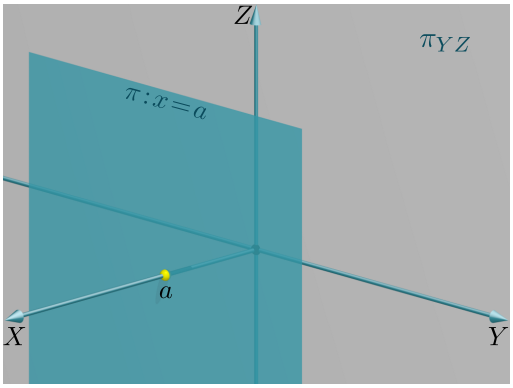

Figura 13.8: $\pi : x = a$

- Uma reta r no espaço, que é paralela a um dos eixos coordenados, intersecta o plano cartesiano complementar em apenas um ponto. As coordenadas deste ponto determinam as coordenadas de todos os pontos da reta r.

De fato, se r_1 é uma reta paralela ao eixo OZ e $r_1 \cap \pi_{XY} = \{Q_1 = (a, b, 0)\}$, então qualquer outro ponto $Q = (x, y, z) \in r_1$ tem $x = a$, $y = b$ e $z \in \mathbb{R}$ (Figura 13.9). Portanto, $r_1 = \{\,(a, b, z)\,;\ z \in \mathbb{R}\,\}$ e suas equações são:

$$r_1 : \begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$$

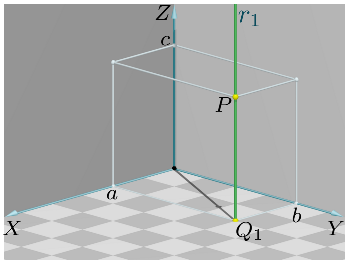

Figura 13.9: $r_1 \parallel$ eixo OZ

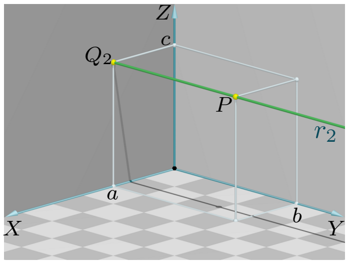

Figura 13.10: $r_2 \parallel$ eixo OY

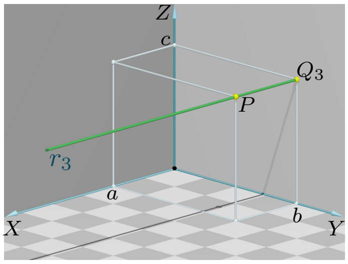

Figura 13.11: $r_3 \parallel$ eixo OX

De modo análogo:

- Se $r_2 \parallel$ eixo OY e $r_2 \cap \pi_{XZ} = \{Q_2 = (a, 0, c)\}$, então (Figura 13.10)
$$r_2 = \{(a, y, c)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } r_2 : \begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}.$$
- Se $r_3 \parallel$ eixo OX e $r_3 \cap \pi_{YZ} = \{Q_3 = (0, b, c)\}$, então (Figura 13.11)
$$r_3 = \{(x, b, c)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } r_3 : \begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}.$$

Definição 2

Um plano π é **vertical** quando contém ou é paralelo ao eixo OZ. Isto é, π é um plano vertical se, e somente se,

$$\text{eixo } OZ \subset \pi \qquad \text{ou} \qquad \text{eixo } OZ \cap \pi = \varnothing.$$

Por exemplo, os planos $\pi : x = a$, $a \in \mathbb{R}$, assim como os planos $\pi : y = b$, $b \in \mathbb{R}$, são planos verticais.

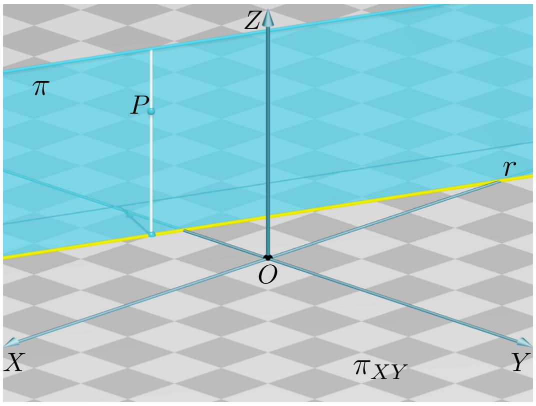

Figura 13.12: $\pi \parallel$ eixo OZ e $r = \pi \cap \pi_{XY}$

A intersecção de um plano vertical π com o plano π_{XY} é uma reta r (Figura 13.12). Essa reta, vista exclusivamente no plano $\pi_{XY} : z = 0$, é dada por uma equação da forma $\alpha x + \beta y = d$, com $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Mas, no espaço, a reta $r = \pi \cap \pi_{XY}$ é dada por duas equações:

$$r : \begin{cases} \alpha x + \beta y = d \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Ou seja, um ponto pertence à reta r se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem, simultaneamente, às duas equações acima.

Por outro lado, como a direção do eixo-OZ é parelela ao plano π, ele é formado pela união de todas as retas paralelas ao eixo-OZ que passam por um ponto de r.

Portanto, o plano π é dado por

$$\pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha\, x + \beta\, y = d \text{ e } z \in \mathbb{R}\right\},$$

e sua equação é:

$$\pi : \alpha\, x + \beta\, y = d.$$

Observação 3

Não confunda! No espaço, uma equação da forma $\alpha x + \beta y = d$ representa um plano vertical, ao passo que, no plano π_{XY}, esta equação representa uma reta.

Procedendo de forma análoga com os outros dois eixos, temos que:

eixo $OX \parallel \pi$ **ou** eixo $OX \subset \pi \iff \pi : \beta y + \gamma z = d,$ onde $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0;$

eixo $OY \parallel \pi$ **ou** eixo $OY \subset \pi \iff \pi : \alpha x + \gamma z = d,$ onde $\alpha^2 + \gamma^2 \neq 0;$

eixo $OZ \parallel \pi$ **ou** eixo $OZ \subset \pi \iff \pi : \alpha x + \beta y = d,$ onde $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$

13.2 Distância entre dois pontos do espaço

Sejam $P = (a, b, c)$ e $Q = (a', b', c')$ pontos no espaço $\mathcal{E}$.

Começamos observando que se P e Q estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, então eles têm duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o módulo da diferença das coordenadas diferentes.

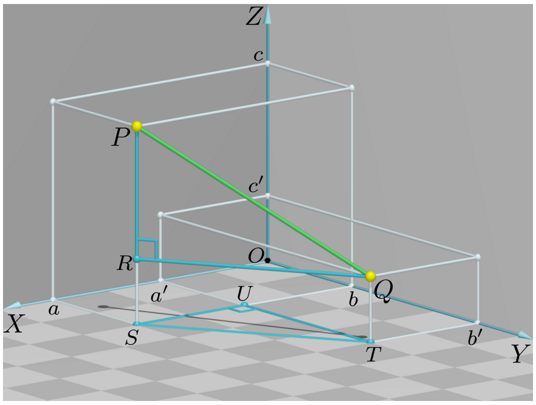

Figura 13.13: Cálculo de $d(P, Q)$

Suponhamos que P e Q não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Para o cálculo da **distância** de P a Q, vamos considerar os pontos auxiliares (Figura 13.13):

$$R = (a, b, c'),\ \ S = (a, b, 0),\ \ T = (a', b', 0) \text{ e } U = (a', b, 0).$$

Como, pela observação feita acima,

$$d(S,U) = |a' - a| \;\text{ e }\; d(U,T) = |b' - b|,$$

obtemos, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $\triangle SUT$, que:

$$d(S,T)^2 = d(S,U)^2 + d(U,T)^2 = |a'-a|^2 + |b'-b|^2 = (a'-a)^2 + (b'-b)^2 .$$

Sendo os segmentos ST e RS lados opostos de um retângulo, temos:

$$d(R,Q)^2 = d(S,T)^2 = (a'-a)^2 + (b'-b)^2 .$$

Além disso, $d(P,R) = |c'-c|$, pois os pontos P e R estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo OZ.

Finalmente, como o triângulo $\triangle PRQ$ é retângulo,

$$d(P,Q)^2 = d(P,R)^2 + d(R,Q)^2 = (c'-c)^2 + (a'-a)^2 + (b'-b)^2 ,$$

ou seja,

$$d(P,Q) = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2} . \tag{13.1}$$

No plano, vimos que o conjunto dos pontos que equidistam de um ponto dado formam um círculo. No espaço temos:

Definição 4

A **esfera $\mathcal{S}$ de centro C e raio $r > 0$** é o conjunto formado por todos os pontos $P \in \mathcal{E}$ cuja distância ao centro C é igual a r:

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathcal{E} \mid d(P,C) = r\} .$$

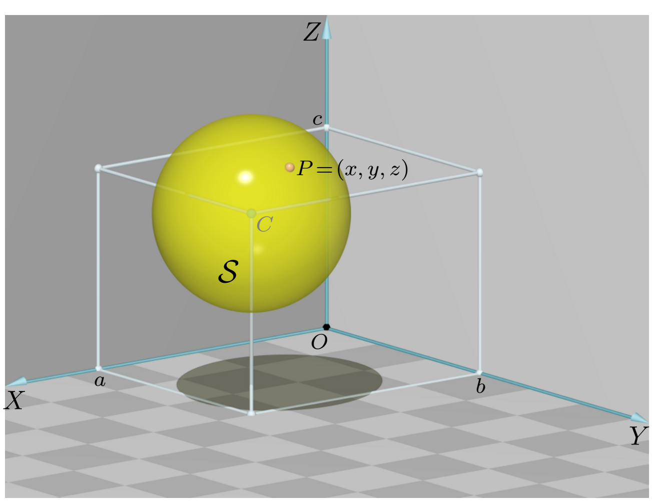

Figura 13.14: Esfera $\mathcal{S}$ de centro $C = (a,b,c)$ e raio r

Sejam $C = (a,b,c)$ e $P = (x,y,z)$ as coordenadas do centro C e de um ponto genérico de $\mathcal{S}$ em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Então,

$$P \in \mathcal{S} \iff d(P,C) = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última identidade, obtemos a equação da esfera S no sistema de eixos $OXYZ$:

$$\mathcal{S} : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Exemplo 1

Mostre, completando os quadrados, que a equação de segundo grau

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 1,$$

representa uma esfera $\mathcal{S}$. Determine o centro e o raio de $\mathcal{S}$.

Solução. Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 1 \\ \iff & (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) = 1 \\ \iff & (x^2 - 2x+1) + (y^2 + 4y+4) + (z^2 - 6z+9) = 1+1+4+9 \\ \iff & (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 15. \end{aligned}$$

Portanto, a equação representa a esfera $\mathcal{S}$ de centro $C = (1, -2, 3)$ e raio $r = \sqrt{15}$.

Exemplo 2

Determine as coordenadas do **ponto médio** M do segmento AB, onde $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$.

Solução. Seja $M = (m_x, m_y, m_z)$ o ponto médio do segmento AB (Figura 13.15), isto é, $|AM| = d(A, M) = d(M, B) = |MB|$.

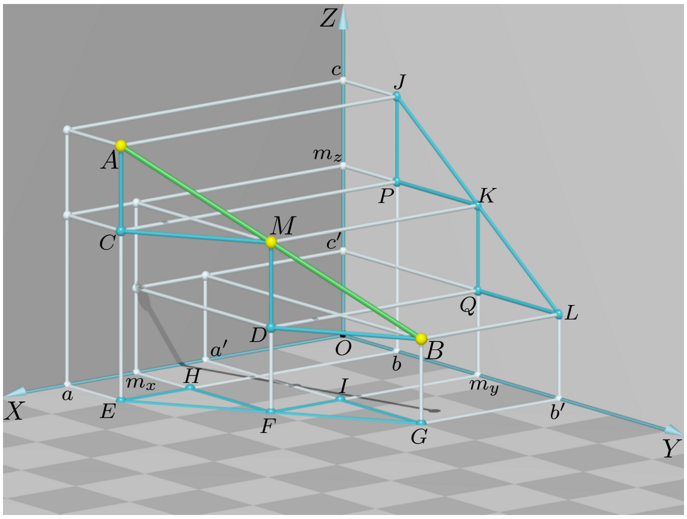

Figura 13.15: Ponto médio do segmento AB

Pelo critério ALA, os triângulos $\triangle ACM$ e $\triangle MDB$ são congruentes. Em particular, $|CM| = |DB|$. Logo, $|EF| = |CM| = |DB| = |FG|$.

De novo, pelo critério ALA, os triângulos $\triangle EHF$ e $\triangle FIG$ são congruentes. Logo, $|EH| = |FI|$ e, portanto, $m_x = \dfrac{a+a'}{2}$.

Analogamente, $|HF| = |IG|$, donde $m_y = \dfrac{b+b'}{2}$.

Pelo mesmo argumento, os triângulos $\triangle JPK$ e $\triangle KQL$ são congruentes, logo $|JP| = |KQ|$ e, portanto, $m_z = \dfrac{c+c'}{2}$.

Finalmente, as coordenadas do ponto médio M do segmento AB são:

$$M = (m_x, m_y, m_z) = \left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2}\right).$$

Exemplo 3

Determine o conjunto,

$$\mathcal{M} = \{P \in \mathcal{E} \mid d(P,A) = d(P,B)\},$$

dos pontos equidistantes a dois pontos distintos A e B no espaço.

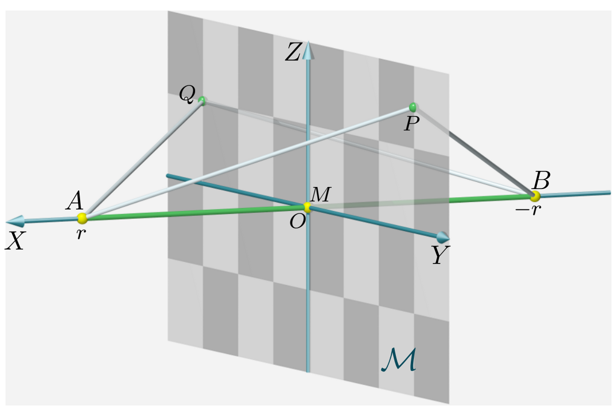

Figura 13.16: Conjunto $\mathcal{M}$ dos pontos equidistantes de A e B

Solução. Note que o ponto médio M do segmento AB pertence ao conjunto $\mathcal{M}$. Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço tal que $O = M$ e o segmento AB esteja contido no eixo OX, com A no semieixo positivo OX. Então, $A = (r, 0, 0)$ e $B = (-r, 0, 0)$, para algum número real $r > 0$. Assim, $P = (x, y, z) \in \mathcal{M}$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& d(A,P) = d(B,P) \iff d(A,P)^2 = d(B,P)^2 \\
\iff\ & (x-r)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (x-(-r))^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 \\
\iff\ & x^2 - 2xr + r^2 = x^2 + 2xr + r^2 \iff -2xr = 2xr \iff 4xr = 0 \\
\iff\ & x = 0 \text{ (pois } r \neq 0) \iff P = (0, y, z) \in \pi_{YZ}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{M} = \pi_{YZ}$. Geometricamente, $\mathcal{M}$ é o plano perpendicular ao segmento AB que passa pelo seu ponto médio.

13.3 Vetores no espaço

A noção de **vetor** no espaço define-se da mesma maneira que no plano, continuando válidas as principais propriedades, salvo alguns acréscimos.

Para definir a relação de equipolência no espaço, começamos observando que, no espaço, duas retas são paralelas quando estão contidas no mesmo plano e não se intersectam. De fato, no espaço há situações em que duas retas não se intersectam e não são paralelas. Pense, por exemplo, em duas ruas, sendo uma delas um viaduto que passa por cima da outra transversalmente!

Definição 5

Os segmentos orientados AB e CD no espaço são **equipolentes**, e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem às seguintes condições:

- AB e CD têm igual comprimento: $|AB| = d(A, B) = d(C, D) = |CD|$.
- AB e CD estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta.
- AB e CD têm o mesmo sentido.

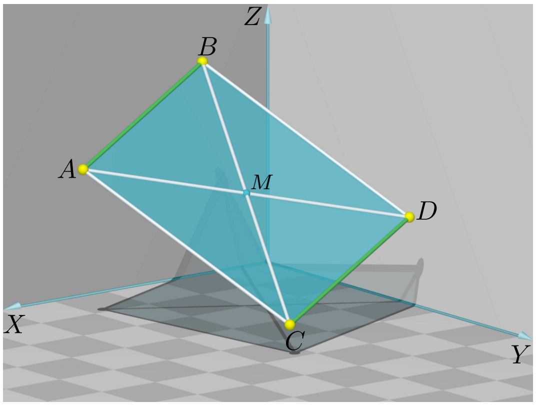

Figura 13.17: Paralelogramo $ABDC$: $AB \equiv CD$

Se AB e CD satisfazem às duas primeiras propriedades, a terceira significa, no caso em que A, B, C e D não são colineares, que $ABDC$ é um paralelogramo no plano que contém os pontos A, B, C e D. Como foi feito no plano, podemos mostrar que $AB \equiv CD$ se, e só se, o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC. A relação de equipolência entre segmentos do espaço é também uma **relação de equivalência**, isto é, satisfaz às seguintes propriedades:

1. **Reflexividade:** Todo segmento é equipolente a si próprio: $AB \equiv AB$.
2. **Simetria:** Se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.
3. **Transitividade:** Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

Estas propriedades podem ser verificadas usando a Proposição 6 abaixo.

Sendo a equipolência uma relação de equivalência, podemos dividir o conjunto dos segmentos orientados do espaço em subconjuntos chamados **classes de equivalência pela relação de equipolência**, ou simplesmente, **classes de equipolência**. Cada classe de equipolência é denominada um **vetor** do espaço. Usamos a mesma notação adotada para vetores no plano para designar o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes ao segmento AB:

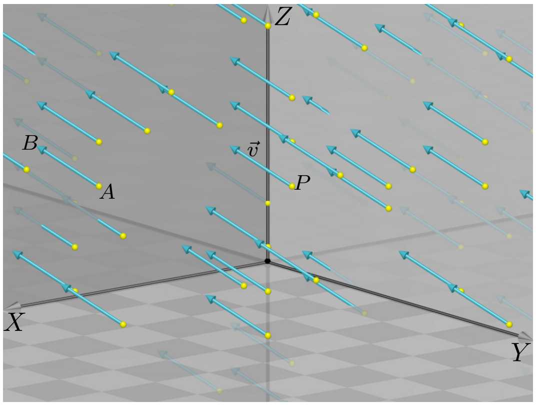

Figura 13.18: Equipolentes ao segmento AB, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \{CD \mid AB \equiv CD\}.$$

Note que,

$$AB \equiv CD \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Como no plano, o vetor representado por um segmento cuja origem é igual à extremidade é chamado **vetor nulo** ou **vetor zero**:

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots.$$

Além disso, todo ponto P do espaço é origem de um segmento orientado representante de um vetor dado $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ qualquer (Figura 13.18).

Ou seja, dado um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto $P \in \mathcal{E}$, existe um único ponto $Q \in \mathcal{E}$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Para verificar esta propriedade, quando A, B e P não são colineares, basta considerar o plano que contém os pontos A, B e P. Neste plano, o problema de determinar o ponto Q já foi resolvido quando estudamos vetores no plano.

Notação: Dado um ponto P no espaço e um vetor $\overrightarrow{v}$, designamos $Q = P + \overrightarrow{v}$ o único ponto do espaço tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Proposição 6

Sejam $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$, $C = (x, y, z)$ e $D = (x', y', z')$ pontos do espaço dados pelas suas coordenadas com respeito a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Então, $AB \equiv CD$ se, e somente se,

$$a' - a = x' - x, \quad b' - b = y' - y \quad \text{e} \quad c' - c = z' - z\,.$$

Demonstração

Temos que $AB \equiv CD$ se, e somente se, o ponto médio AD coincide com o ponto médio BC, ou seja, se, e só se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a+x'}{2}, \frac{b+y'}{2}, \frac{c+z'}{2}\right) = \left(\frac{a'+x}{2}, \frac{b'+y}{2}, \frac{c'+z}{2}\right) \\ \iff & \frac{a+x'}{2} = \frac{a'+x}{2}\,, \quad \frac{b+y'}{2} = \frac{b'+y}{2} \quad \text{e} \quad \frac{c+z'}{2} = \frac{c'+z}{2} \\ \iff & a+x' = a'+x\,, \quad b+y' = b'+y \quad \text{e} \quad c+z' = c'+z \\ \iff & a'-a = x'-x\,, \quad b'-b = y'-y \quad \text{e} \quad c'-c = z'-z\,. \end{aligned}$$

generalizando, assim, o resultado já conhecido no plano.

Definição 7

Sejam $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$ pontos no espaço. Os números reais $a'-a$, $b'-b$ e $c'-c$ são **as coordenadas** do vetor $\overrightarrow{AB}$ no sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Escrevemos:

$$\overrightarrow{AB} = (a'-a, b'-b, c'-c).$$

Observação 8

Pela proposição anterior, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente. Em particular, dado um vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, o ponto $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ satisfaz

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}\,.$$

O vetor $\overrightarrow{OP}$ é o **representante na origem** do vetor $\overrightarrow{v}$.

Exemplo 4

Considere os pontos $A = (1, 4, 0)$, $B = (-1, 1, -1)$ e $C = (3, 5, -10)$. Encontre as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, do ponto D e do ponto P tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$.

Solução. Temos

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (-1-1, 1-4, -1-0) = (-2, -3, -1).$$

Seja $D = (x, y, z)$ o ponto procurado.

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff AB \equiv CD$, temos, pela Proposição 6, que:

$$-1-1 = x-3\,, \quad 1-4 = y-5 \quad -1-0 = z-(-10)\,.$$

Assim, $D = (1, 2, -11)$. E, pela Observação 8, $P = (-2, -3, -1)$ é o ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$.

13.4 Operações com vetores no espaço

Vamos definir agora as operações de adição de vetores no espaço e multiplicação de um vetor espacial por um número real. O processo é análogo ao efetuado para definir estas operações para vetores no plano e as propriedades são basicamente as mesmas, por isso muitos detalhes serão omitidos.

Definição 9

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no espaço $\mathcal{E}$. Seja A um ponto qualquer no espaço e sejam AB e BC segmentos orientados representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente.

O **vetor soma** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, que designamos por $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, é o vetor representado pelo segmento orientado AC.

Note que a soma de dois vetores no espaço recai na soma de vetores num plano, pois os pontos A, B e C estão contidos num mesmo plano do espaço (Figura 13.19).

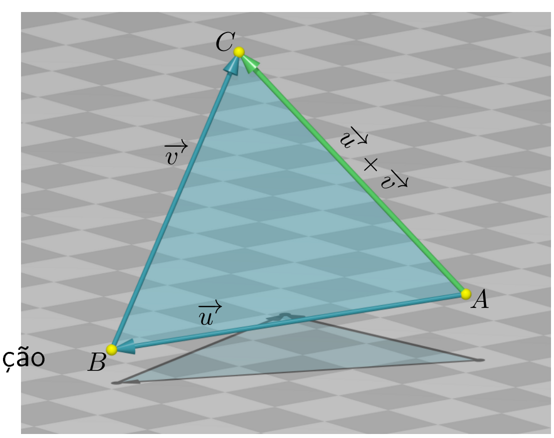

Figura 13.19: Soma de vetores no espaço

Como foi feito para vetores no plano, podemos verificar que a definição do vetor soma não depende da escolha do ponto $A \in \mathcal{E}$. Isto é, o vetor soma está bem definido.

Na prática, a adição de vetores se efetua em relação às coordenadas dos vetores parcelas num sistema de eixos ortogonais fixado.

Seja um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, com respeito ao qual $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b', c')$.

Então, o vetor soma $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ é dado em termos de coordenadas como:

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$$

A demonstração deste fato é análoga àquela feita para vetores no plano.

Exemplo 5

Sejam $A = (3, 2, 0)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (4, 3, 2)$ pontos do espaço. Obtenha o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Solução. Temos,

$$\overrightarrow{AB} = (0-3, 3-2, -2-0) = (-3, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-3, 3-2, 2-0) = (1, 1, 2).$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) = (-2, 2, 0).$$

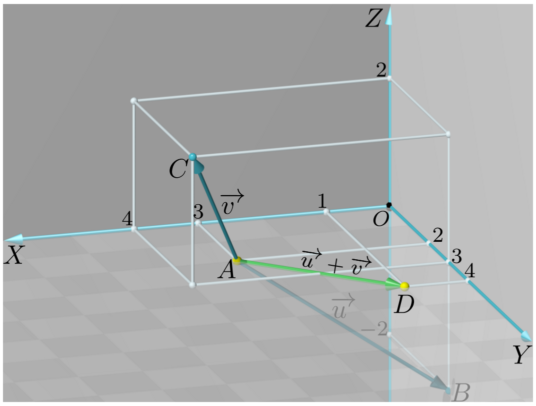

Figura 13.20: Exemplo 5

Além disso, se $D = (d_1, d_2, d_3)$ é a extremidade do representante AD do vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ com origem no ponto A, então $d_1 - 3 = -2$, $d_2 - 2 = 2$ e $d_3 - 0 = 0$. Portanto, $D = (1, 4, 0)$.

Propriedades da adição de vetores no espaço

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço.

1. **Comutatividade:** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

2. **Existência de elemento neutro:** O vetor **zero**, $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$, representado por qualquer segmento nulo, é o único vetor tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ qualquer que seja o vetor $\overrightarrow{u}$. Em coordenadas: $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$.

3. **Existência de inverso aditivo:** Dado um vetor $\overrightarrow{u}$, **existe um único** vetor, que é designado $-\overrightarrow{u}$ e chamado **inverso aditivo** (ou simétrico) de $\overrightarrow{u}$, tal que

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$

Note que se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, então $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$.

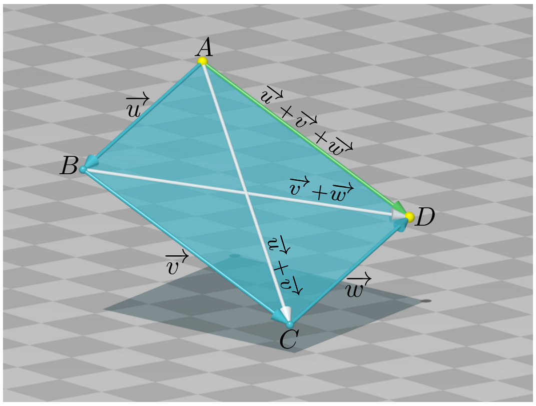

Figura 13.21: Associatividade da adição de vetores

4. **Associatividade:** $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

Definição 10

A **subtração do vetor $\overrightarrow{v}$ pelo vetor $\overrightarrow{u}$** é a soma de $\overrightarrow{v}$ com o inverso aditivo de $\overrightarrow{u}$, que escrevemos $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, então:

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

Sabemos que se A, B, C são pontos não colineares do plano, então o ponto D é o quarto vértice do paralelogramo $ABDC$ se, e somente se, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. No espaço temos a seguinte observação:

Observação 11

Se A, B, C e D são pontos não coplanares no espaço, então

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}, \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF},$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}, \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH},$$

se, e somente se, A, B, C, D, E, F, G e H são os vértices de um paralelepípedo no espaço (Figura 13.22).

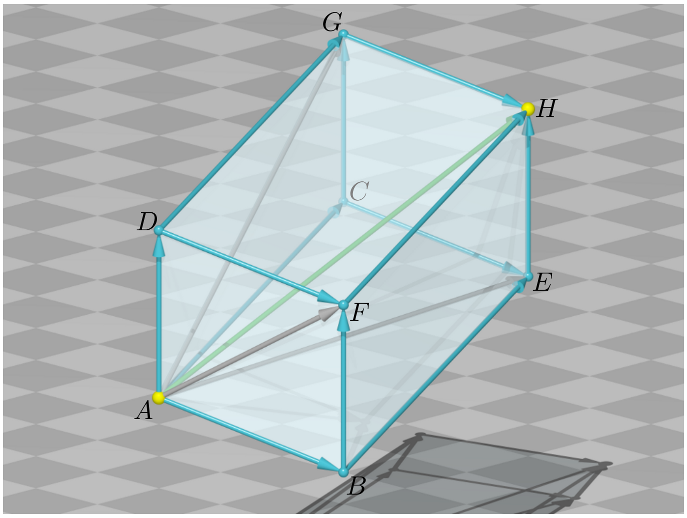

Figura 13.22: Paralelepípedo

A operação de **multiplicação** de um número real por um vetor no espaço se define da mesma forma que no plano.

Definição 12

Sejam $\overrightarrow{AB}$ um vetor do espaço e λ um número real. O **produto de λ por $\overrightarrow{AB}$** é o vetor $\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, tal que:

- A, B e B' são colineares,
- $|AB'| = d(A, B') = |\lambda| \cdot d(A, B) = |\lambda| \cdot |AB|$,
- os segmentos AB e AB' têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Observação 13

Se $\lambda = 0$, então $d(A, B') = 0 \cdot d(A, B) = 0$, isto é, $B' = A$ e, portanto, $0 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Analogamente, $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Na prática, a multiplicação de um escalar por um vetor se efetua em relação a um sistema de eixos ortogonais da mesma forma como foi feito no plano. Ou seja, se $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ é um vetor do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\lambda \cdot \overrightarrow{u} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

Exemplo 6

Sejam $A = (3, 2, 3)$ e $B = (5, 3, 4)$ dois pontos do espaço. Determine as extremidades D, D' e D'' dos representantes CD, CD' e CD'' dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $-2\overrightarrow{AB}$ e $2\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $C = (1, 1, 0)$.

Solução. Em termos de coordenadas, $\overrightarrow{AB} = (5-3, 3-2, 4-3) = (2, 1, 1)$. Logo,

$$-2\overrightarrow{AB} = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 1, -2 \cdot 1) = (-4, -2, -2),$$
$$2\overrightarrow{AB} = (2 \cdot 2, 2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (4, 2, 2).$$

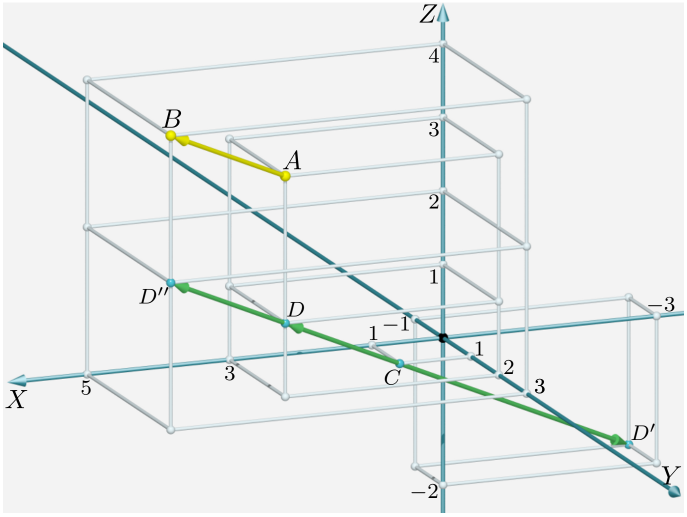

Figura 13.23: Exemplo 6

Como $C = (1, 1, 0)$, as coordenadas dos pontos $D = (d_1, d_2, d_3)$, $D' = (d'_1, d'_2, d'_3)$ e $D'' = (d''_1, d''_2, d''_3)$, satisfazem:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1 - 1 = 2 \\ d_2 - 1 = 1 \\ d_3 - 0 = 1; \end{cases} \qquad \overrightarrow{CD'} = -2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d'_1 - 1 = -4 \\ d'_2 - 1 = -2 \\ d'_3 - 0 = -2; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CD''} = 2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d''_1 - 1 = 4 \\ d''_2 - 1 = 2 \\ d''_3 - 0 = 2. \end{cases}$$

Portanto, $D = (3, 2, 1)$, $D' = (-3, -1, -2)$ e $D'' = (5, 3, 2)$.

Propriedades da multiplicação de um escalar por um vetor

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do espaço e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Escrevendo os vetores em coordenadas, é fácil verificar que a multiplicação de um escalar por um vetor satisfaz às seguintes propriedades.

1. **Associatividade:** $\lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{a}$;
2. **Distributividade:** $\begin{cases} \lambda \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{b} \\ (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{a} \end{cases}$;
3. **Elemento neutro multiplicativo:** $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.

Em particular, o inverso aditivo $-\overrightarrow{u}$ do vetor $\overrightarrow{u}$ se obtém multiplicando $\overrightarrow{u}$ por -1. De fato, $\overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{u} = (1 + (-1))\overrightarrow{u} = 0\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

13.5 Colinearidade e coplanaridade de pontos no espaço

Sabemos que três pontos A, B e C no espaço são colineares se eles pertencem a uma mesma reta. Nesta seção vamos analisar a colinearidade de pontos no espaço usando vetores. Para isso, precisamos da seguinte definição.

Definição 14

O vetor $\overrightarrow{v}$ é **múltiplo** do vetor $\overrightarrow{u}$ quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Observação 15

(a) Todo vetor é múltiplo de si próprio (neste caso, $\lambda = 1$).

(b) O vetor zero $\overrightarrow{0}$ é múltiplo de qualquer vetor.

De fato, dado um vetor arbitrário $\overrightarrow{u}$, temos $\overrightarrow{0} = 0\,\overrightarrow{u}$.

Em contrapartida, nenhum vetor não nulo pode ser múltiplo do vetor zero.

(c) Se $\overrightarrow{v} \neq 0$ e $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, então $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.

Assim, $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$, quando $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos.

Proposição 16

Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores do espaço, então um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro se, e somente se,

$$x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - x_2z_1 = y_1z_2 - y_2z_1 = 0\,.$$

Demonstração

($\Longrightarrow$) Se $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{u}$.
Logo, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda\overrightarrow{u}$, ou seja,

$$x_2 = \lambda x_1\,, \quad y_2 = \lambda y_1\,, \quad z_2 = \lambda z_1\,. \tag{13.2}$$

Multiplicando a primeira das identidades (13.2) por y_1 e a segunda por x_1, obtemos: $y_1x_2 = \lambda x_1y_1 = x_1y_2 \Longrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Multiplicando a primeira das identidades (13.2) por z_1 e a terceira por x_1, obtemos: $x_2z_1 = \lambda x_1z_1 = x_1z_2 \Longrightarrow x_1z_2 - x_2z_1 = 0$.

Finalmente, multiplicando a segunda das identidades (13.2) por z_1 e a terceira por y_1, obtemos: $y_2z_1 = \lambda y_1z_1 = y_1z_2 \Longrightarrow y_1z_2 - y_2z_1 = 0$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que

$$x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - x_2z_1 = y_1z_2 - y_2z_1 = 0.$$

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} = (0,0,0)$, então $\overrightarrow{u} = 0\,\overrightarrow{v}$, isto é, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Assim, podemos supor que $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1) \neq (0,0,0) = \overrightarrow{0}$, isto é, uma coordenada de $\overrightarrow{u}$ é diferente de zero.

Se $x_1 \neq 0$, seja $\lambda = \dfrac{x_2}{x_1}$.

Afirmamos que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

De fato, como $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, segue que $y_2 = \dfrac{x_2}{x_1}\,y_1$. E, uma vez que $x_1z_2 - z_1x_2 = 0$, temos $z_2 = \dfrac{x_2}{x_1}\,z_1$. Logo,

$$\lambda\overrightarrow{u} = \frac{x_2}{x_1}\,(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{x_2}{x_1}\,x_1, \frac{x_2}{x_1}\,y_1, \frac{x_2}{x_1}\,z_1\right) = (x_2, y_2, z_2) = \overrightarrow{v}\,.$$

Os casos $y_1 \neq 0$ e $z_1 \neq 0$ são tratados da mesma maneira.

Observação 17

(a) Para mostrar que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos, basta verificar que um dos números

$$x_1y_2 - x_2y_1, \quad x_1z_2 - x_2z_1 \quad \text{ou} \quad y_1z_2 - y_2z_1\,,$$

é diferente de zero.

(b) Os números $x_1y_2 - x_2y$, $x_1z_2 - x_2z_1$ e $y_1z_2 - y_2z_1$ são os determinantes 2×2 que podem ser formados com as colunas da matriz 2×3

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix},$$

cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Definição 18

Dois vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são **colineares** quando um deles é múltiplo do outro.

Esta definição está bem justificada, pois se $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, então os pontos A, B e C estão sobre uma mesma reta. E, reciprocamente, se A, B e C são pontos distintos numa reta, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \pm\dfrac{d(A,C)}{d(A,B)}$ com sinal positivo, caso B e C estejam do mesmo lado em relação ao ponto A na reta que os contém, e sinal negativo, caso B e C estejam em lados opostos. Portanto,

A, B e C são pontos colineares $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores múltiplos.

Exemplo 7

Verifique se os pontos $A = (-1,1,0)$, $B = (1,1,1)$ e $C = (-2,-1,-1)$ são colineares.

Solução. Como

$$\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3) = (2,0,1),$$
$$\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2, z_2) = (-1,-2,-1),$$

e

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (2)(-2) - (0)(-1) = -4 \neq 0,$$

os pontos dados não são colineares.

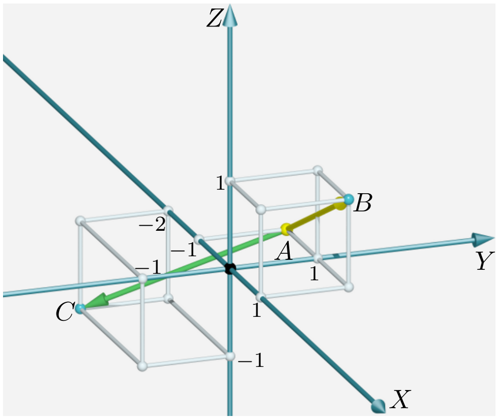

Figura 13.24: Exemplo 7

Exemplo 8

Mostre que os pontos $A = (0,1,0)$, $B = (1,1,1)$ e $C = (-2,1,-2)$ são colineares.

Solução. Temos $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3) = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (y_1, y_2, y_3) = (-2,0,-2)$.

A matriz 2×3 que tem por linhas as coordenadas destes vetores é

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e os determinantes 2×2 formados com as colunas desta matriz são:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 1(0) - (-2)(0) = 0\,,\\
\det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 1(-2) - 1(-2) = 0\,,\\
\det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0(-2) - 1(0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos, ou seja, os pontos A, B e C são colineares. De fato, $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.

Sabemos que três pontos A, B e C não colineares determinam um único plano π no espaço. O teorema abaixo nos permite saber quando um quarto ponto D pertence ou não a este plano.

Definição 19 Um vetor $\overrightarrow{v}$ é uma **combinação linear** dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$, quando é soma de múltiplos desses vetores. Isto é, $\overrightarrow{v}$ é uma combinação linear de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$, se existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{v_n}.$$

Teorema 20 Sejam A, B e C pontos não colineares no espaço e seja π o plano que eles determinam. O ponto D pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AD}$ é **combinação linear** dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Isto é,

$$D \in \pi \iff \text{existem } x, y \in \mathbb{R} \text{ tais que } \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Demonstração

($\Longrightarrow$) Suponhamos primeiro que $D \in \pi$.

Seja r_1 a reta paralela a $\overrightarrow{AC}$ que passa por D e seja r_2 a reta paralela a $\overrightarrow{AB}$ que passa por D.

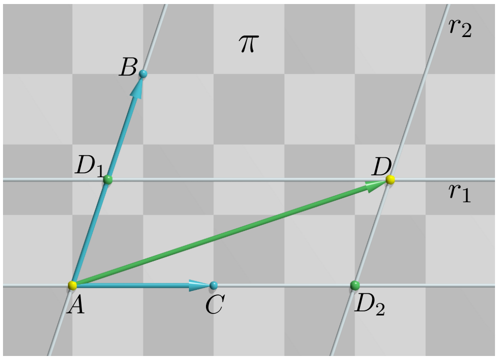

Figura 13.25: A, B, C e D coplanares

Então, r_1 está contida no plano π e intersecta a reta que contém os pontos A e B num ponto D_1. Analogamente, r_2 está contida no plano π e intersecta a reta que contém os pontos A e C num ponto D_2.

Como os pontos A, B e D_1 são colineares, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que
$$\overrightarrow{AD_1} = x\overrightarrow{AB}.$$

Também, como A, C e D_2 são colineares, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que
$$\overrightarrow{AD_2} = y\overrightarrow{AC}.$$

Logo, sendo AD_1DD_2 um paralelogramo,
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que $\overrightarrow{AD}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Isto é, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço tal que a origem O é o ponto A e os eixos OX e OY estejam sobre o plano π. Assim, neste sistema de eixos, $\pi = \pi_{XY}$.

Sendo as terceiras coordenadas de A, B e C iguais a zero e
$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$$
concluímos que a terceira coordenada do ponto D é também igual a zero (Figura 13.26). Logo, $D \in \pi_{XY} = \pi$.

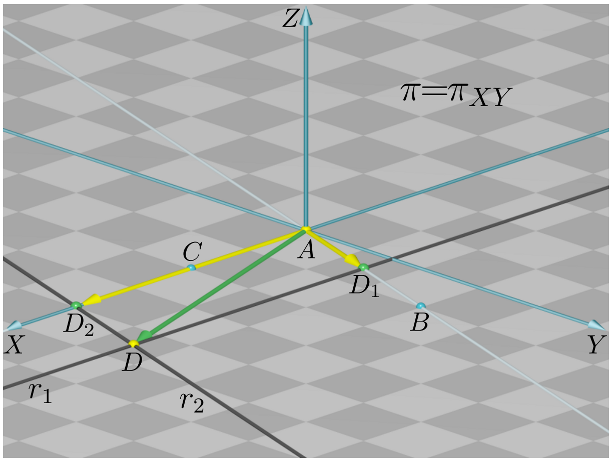

Figura 13.26: Sistema $OXYZ$ e $D \in \pi_{XY}$

Exemplo 9

Sejam $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (3, 4, 6)$, $D = (1, 1, 2)$ e $E = (4, 5, 2)$ pontos do espaço. Mostre que:

(a) A, B e C não são colineares e, portanto, determinam um plano π.

(b) D não pertence ao plano π.

(c) E pertence ao plano π.

Solução. Temos $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,2,3)$, $\overrightarrow{AD} = (0,-1,-1)$ e $\overrightarrow{AE} = (3,3,-1)$.

(a) Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, pois

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Logo, A, B e C não são colineares, determinando, assim, um plano π.

(b) Pelo Teorema 20, $D \in \pi$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$$

ou seja,

$$(0,-1,-1) = x(1,1,1) + y(2,2,3) = (x+2y, x+2y, x+3y).$$

Portanto, os números x e y devem satisfazer ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = -1 \\ x + 3y = -1, \end{cases}$$

o qual é impossível, pois as duas primeiras equações implicam que $0 = -1$.

Concluímos, então, que não existem números reais x e y tais que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Logo, $D \notin \pi$.

(c) De novo, pelo Teorema 20, $E \in \pi$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$$

isto é,

$$(3,3,-1) = x(1,1,1) + y(2,2,3) = (x+2y, x+2y, x+3y).$$

Logo, x e y devem satisfazer, simultaneamente, as equações:

$$x + 2y = 3, \qquad x + 2y = 3, \qquad x + 3y = -1.$$

Como a primeira e a segunda equações são iguais, x e y são a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = -1. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $x = 11$ e $y = -4$. Portanto, $\overrightarrow{AE} = 11\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, e os pontos A, B, C e E são coplanares.

Provaremos agora que quatro pontos não coplanares A, B, C e D determinam o espaço todo, ou melhor, que todo vetor do espaço se expressa de maneira única como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Definição 21

Dizemos que os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ são **linearmente independentes (LI)** quando os pontos A, B, C e D não são coplanares, isto é, não pertencem a um mesmo plano.

Se os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ não são linearmente independentes, dizemos que eles são **linearmente dependentes (LD)**. Neste caso, os pontos A, B, C e D são coplanares.

Teorema 22

Sejam $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ três vetores linearmente independentes do espaço. Então, para cada vetor $\overrightarrow{w}$ do espaço, existem escalares únicos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{v_1} + y\,\overrightarrow{v_2} + z\,\overrightarrow{v_3}. \tag{13.3}$$

Demonstração

Sejam A, B, C, D e P pontos do espaço tais que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP}$. Como os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são LI, os pontos A, B, C e D não são coplanares.

Designamos π_1 o plano que contém os pontos A, B e C, π_2 o plano determinado pelos pontos A, B e D e π_3 o plano que passa pelos pontos A, C e D (figura 13.27).

Sejam π_1', π_2' e π_3' os planos que passam pelo ponto P e são paralelos aos planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente.

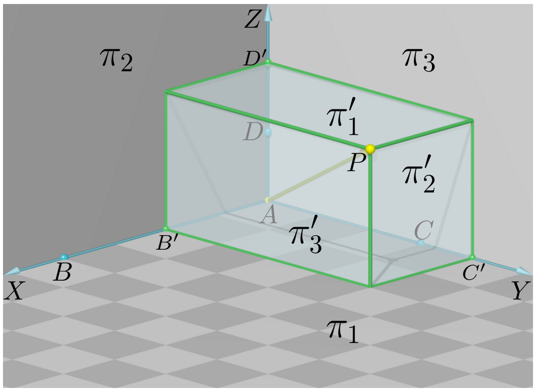

Figura 13.27: Determinando os pontos B', C' e D'

Como a reta que contém os pontos A e D não está contida no plano π_1, ela intersecta o plano π_1' num único ponto D'. Então, $\overrightarrow{AD'} = z\,\overrightarrow{AD}$, para algum número $z \in \mathbb{R}$, o qual é determinado de forma única pelo ponto D' e, portanto, pelo ponto P. Analogamente, a reta que passa por A e C não está contida no plano π_2 e, portanto, intersecta o plano π_2', paralelo a π_2, num único ponto C', de onde concluímos que $\overrightarrow{AC'} = y\,\overrightarrow{AC}$, para algum escalar $y \in \mathbb{R}$, determinado de maneira única pelo ponto P.

Finalmente, a reta que passa pelos pontos A e B não está contida no plano π_3, intersectando, portanto, o plano π_3' num único ponto B'. Assim, existe um escalar x, determinado de maneira única pelo ponto P, tal que $\overrightarrow{AB'} = x\,\overrightarrow{AB}$.

Por causa do paralelismo estabelecido entre os planos, os segmentos AB', AC' e AD' são as arestas de um paralelepípedo no qual os pontos A e P são as extremidades de uma das diagonais. Portanto, pela Observação 11,

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'},$$

ou seja,

$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} + z\,\overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{v_1} + y\,\overrightarrow{v_2} + z\,\overrightarrow{v_3},$$

como queríamos provar.

O Teorema 22 diz que qualquer vetor do espaço se exprime de maneira única como combinação linear de três vetores LI dados. Dizemos, então, que o espaço **tem dimensão três**.

Proposição 23

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI;

(b) todo vetor do espaço se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$;

(c) se $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \alpha'\overrightarrow{u} + \beta'\overrightarrow{v} + \gamma'\overrightarrow{w}$, então $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$;

(d) se $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, então $\alpha = \beta = \gamma = 0$;

(e) nenhum dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é combinação linear dos outros dois;

(f) Todo vetor do espaço se escreve como combinação linear dos vetoers $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

Demonstração

(a)$\Longrightarrow$(b) Segue do Teorema 22

(b)$\Longrightarrow$(c) Por hipótese, todo vetor se escreve de maneira única como combinação linear de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Logo, se $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \alpha'\overrightarrow{u} + \beta'\overrightarrow{v} + \gamma'\overrightarrow{w}$, então $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$.

(c)$\Longrightarrow$(d) Sejam α, β e γ números reais tais que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. Como $0\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, temos, por **(c)**, que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(d)⟹(e) Suponhamos, por absurdo, que o vetor $\overrightarrow{u}$ é uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, ou seja, que existem números reais α e β tais que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}$. Como $1\,\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v} - \beta\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, temos, por **(d)**, que $1 = 0$, uma contradição.

(e)⟹(f) O vetor $\overrightarrow{u}$ nao é múltiplo do vetor $\overrightarrow{v}$, pois, caso contrário, existiria $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$. Como $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + 0\,\overrightarrow{w}$, o vetor $\overrightarrow{u}$ seria uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, contradizendo a hipótese **(e)**.

Assim, como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos e $\overrightarrow{w}$ não é uma combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, temos, pelo Teorema 20, que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são coplanares, ou seja, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI. Logo, pelo Teorema 22, todo vetor se escreve como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

(f)⟹(a) Suponhamos, por absurdo, que $\overrightarrow{u}$ é um múltiplo do vetor $\overrightarrow{v}$. Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$, ou seja, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, os pontos A, B e C são colineares.

Seja D o ponto tal que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$. Como A, B e C são colineares, temos que os pontos A, B, C e D são coplanares. Logo, se o vetor $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AP}$ é combinação linear de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, ou seja, se existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w},$$

segue que

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{AP} = (x\lambda + y)\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}.$$

Portanto, pelo Teorema 20, os pontos A, B, C, D e P são coplanares, ou colineares, caso A, B, C e D sejam colineares. Uma contradição, pois estamos supondo que todo vetor do espaço se escreve como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Assim, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos.

Pelo Teorema 20, se $\overrightarrow{w}$ é coplanar com os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}. \tag{13.4}$$

Seja P um ponto qualquer do espaço. Por hipótese, existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}.$$

Então, por (13.4), temos que

$$\overrightarrow{AP} = (x + \lambda z)\overrightarrow{AB} + (y + \mu z)\overrightarrow{AC},$$

ou seja, o ponto P pertence ao plano que contém os pontos A, B e C. Uma contradição, pois estamos no espaço e não num plano.

Logo, os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são coplanares, ou seja, são vetores LI.

Exemplo 10

Considere os pontos $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,1,2)$, $C = (2,0,1)$ e $D = (1,0,-1)$.

(a) Verifique que O, A, B e C são pontos coplanares.

(b) Mostre que O, A, B e D são pontos não coplanares.

(c) Escreva o vetor $\overrightarrow{w} = (2,6,5)$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$.

Solução.

(a) Observe, primeiro, que os pontos O, A e B não são colineares.

De fato, os vetores $\overrightarrow{OA} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{OB} = (3,1,2)$ não são múltiplos um do outro, pois a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ possui uma submatriz 2×2, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, com determinante diferente de zero.

Para verificar que o ponto C pertence ao plano π determinado pelos pontos O, A e B, devemos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}\,,$$

ou seja,

$$(2,0,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(3,1,2) = (\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta).$$

Logo, α e β devem ser solução do sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 2 & (13.5) \\ \alpha + \beta = 0 & (13.6) \\ \alpha + 2\beta = 1 & (13.7) \end{cases}$$

Da equação (13.6), obtemos que $\alpha = -\beta$. Substituindo na equação (13.5), obtemos $-\beta + 3\beta = 2$, ou seja, $\beta = 1$; portanto, $\alpha = -1$. A equação (13.7) também é satisfeita por $\alpha = -1$ e $\beta = 1$.

Assim, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ e, pelo teorema 20, C pertence ao plano π.

(b) Sabemos que o ponto $D = (1,0,-1)$ pertence ao plano π que contém O, A e B se, e somente se, existem escalares α e β tais que:

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}\,.$$

Isto é, se, e só se, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 & (13.8) \\ \alpha + \beta = 0 & (13.9) \\ \alpha + 2\beta = -1 & (13.10) \end{cases}$$

Da equação (13.9), obtemos $\alpha = -\beta$. Substituindo na equação (13.8), obtemos $\beta = \frac{1}{2}$. Porém, substituindo $\alpha = -\beta$ na equação (13.10), obtemos $\beta = -1$.

Logo, como β não pode assumir dois valores ao mesmo tempo, concluímos que não existem escalares α e β que resolvam as três equações simultaneamente. Portanto, $D \notin \pi$.

(c) Sabemos, do item **(b)**, que os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são LI. Logo, pelo teorema 22, todo vetor do espaço se escreve, de forma única, como combinação linear destes vetores.

Então, para $\overrightarrow{w} = (2, 6, 5)$, existem números reais únicos, x, y e z tais que:

$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OD},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (2, 6, 5) &= x(1, 1, 1) + y(3, 1, 2) + z(1, 0, -1) \\ &= (x + 3y + z, x + y, x + 2y - z). \end{aligned}$$

Desta identidade, obtemos que (x, y, z) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 & (13.11) \\ x + y = 6 & (13.12) \\ x + 2y - z = 5 & (13.13) \end{cases}$$

Pela equação (13.12), $x = 6 - y$. Substituindo $x = 6 - y$ nas equações (13.11) e (13.13), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 6 - y + 3y + z &= 2 \\ 6 - y + 2y - z &= 5, \end{cases} \iff \begin{cases} 2y + z &= -4 \\ y - z &= -1. \end{cases}$$

Somando estas duas equações, temos $3y = -5 \Longrightarrow y = -\dfrac{5}{3}$. Portanto,

$$z = y + 1 = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad x = 6 - y = 6 + \frac{5}{3} = \frac{23}{3}.$$

Assim,

$$\overrightarrow{w} = \frac{23}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$$

é a expressão de $\overrightarrow{w}$ como combinação linear de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$.

13.6 Exercícios

1. Se os pontos $A = (-a, -a, -a)$, $B = (a, -a, -a)$, $C = (-a, -a, a)$ e $D = (a, a, a)$ são vértices de um cubo, determine os outros vértices.

2. Determine quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas, justificando sua resposta.

   (a) Todo ponto do espaço pertence a um plano paralelo ao plano π_{XY}.

   (b) Se A, B e C são pontos coplanares e A, B, D são também coplanares, então A, B, C e D são coplanares.

   (c) Se π é um plano horizontal no sistema $OXYZ$, então π é um plano vertical no sistema $OXZY$.

   (d) Todo ponto do espaço diferente de um ponto P pertence a uma única esfera centrada em P.

3. Verifique que o ponto $P = (2, 2, 3)$ é equidistante dos pontos $A = (1, 4, -2)$ e $B = (3, 7, 5)$. Determine a equação que devem satisfazer as coordenadas de um ponto $P = (x, y, z)$ para que esse ponto seja equidistante dos pontos A e B.

4. Calculando distâncias, mostre que o triângulo $\triangle ABC$,

   (a) é isósceles, se $A = (3, -1, 2)$, $B = (0, -4, 2)$ e $C = (-3, 2, 1)$;

   (b) é retângulo, se $A = (3, -1, 6)$, $B = (-1, 7, -2)$ e $C = (1, -3, 2)$.

5. Determine e interprete geometricamente o conjunto dos pontos equidistantes da origem e do ponto $P = (1, 0, 0)$ que pertencem ao plano vertical que passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$ e $B = (0, 2, 3)$

6. Determine a equação da esfera de centro no ponto $C = (-3, 4, 1)$ que passa pelo ponto $(0, 1, -2)$.

7. Mostre que a equação dada é a equação de uma esfera, determinando o seu centro e o seu raio.

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$;

   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$;

(c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 1 = 0$;

(d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0$.

8. Determine para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ a equação
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + 4\lambda y - 5\lambda = 0$$
representa uma esfera, um ponto ou o conjunto vazio.

9. A esfera $S(C, r)$ de centro no ponto C e raio $r > 0$ divide o espaço em três subconjuntos:

- a própria esfera $S(C, r)$, conjunto dos pontos que distam r do centro C;
- o **interior** da esfera $S(C, r)$, chamado **bola aberta de centro C e raio $r > 0$**, designada $B(C, r)$, que consiste dos pontos cuja distância a C é menor que r;
- o **exterior** da esfera $S(C, r)$ que consiste dos pontos cuja distância a C é maior que r.

(a) Se $C = (x_o, y_o, z_o)$, obtenha a equação da esfera $S(C, r)$ e caracterize o seu interior e o seu exterior mediante inequações.

(b) Verifique se os pontos $P_1 = (3, 2, 1)$, $P_2 = (4, -3, -2)$, $P_3 = (0, 0, -3)$ e $P_4 = (1, -2, 3)$ pertencem à esfera de centro $C = (2, -1, 2)$ e raio 2, ao seu interior ou ao seu exterior.

10. Encontre a interseção da esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 6$ com o conjunto $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 5z^2\}$. Esboçe as curvas de interseção.

11. Considere os pontos $A = (1, 2, 4)$ e $B = (3, 1, 2)$. Encontre a equação do plano vertical π que passa pelos pontos A e B, e determine todos os pontos da reta r paralela ao eixo OZ, contida no plano π, que intersecta o eixo OX.

12. Sejam $A = (-2, 3, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (0, 0, -3)$, $D = (10, -3, 1)$, $E = (-1, 2, 3)$ e $F = (1, 1, 0)$ pontos do espaço.

(a) Determine o ponto G tal que $AC \equiv DG$;

(b) Os pontos E, F e G são colineares? Justifique;

(c) Obtenha o ponto H tal que $AB \equiv HD$;

(d) Os pontos A, B e H são colineares? Justifique.

13. Em relação aos pontos dados no exercício anterior, determine:

(a) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EB}$;

(b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$;

(c) $2(\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{FB} + 3\overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{AB}$.

14. Dados o ponto $A = (1, 1, 1)$ e o vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$, obtenha os pontos C e D de modo que os pontos A, B e C sejam colineares e D pertença ao plano π_{XY}.

15. Verifique se o ponto D pertence ao plano que contém os pontos A, B e C, onde:

(a) $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (2, -\sqrt{2}, 2)$;

(b) $A = (0, 1, -1)$, $B = (3, 1, 1)$, $C = (0, 1, -1)$, $D = (2, 1, 2)$;

(c) $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (3, 3, 0)$, $D = (3, -3, 3)$.

16. Considere o ponto $A = (1, 0, 1)$ e os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 4, 1)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 5, 2)$. Determine os pontos B, C e D, sabendo-se que A, B, C e D são coplanares e D pertence à reta paralela ao eixo OY que passa pelo ponto $P = (3, 2, 7)$

17. Mostre que os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são LI e escreva o vetor $\overrightarrow{w} = (2, 1, 0)$ como combinação linear desses vetores, onde:

(a) $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_3} = (1, 0, 1)$;

(b) $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{v_3} = (1, -1, 1)$.

18. Descreva, por meio de desigualdades, a região do espaço limitada pelo cubo de faces paralelas aos planos coordenados com vértices nos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, -1, 3)$ e $C = (1, 2, 0)$. Encontre, também, os outros vértices do cubo.

19. Se A e B são dois pontos distintos do espaço $\mathcal{E}$, identifique geometricamente o conjunto

$$\mathcal{R} = \{P \in \mathcal{E} \,;\, d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = d(A, B)^2\}.$$

20. Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ três vetores não nulos no espaço. Mostre que se $\overrightarrow{v}$ não é múltiplo de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ não é combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores linearmente independentes.

21. Dados quatro ou mais vetores no espaço, mostre que pelo menos um deles é combinação linear dos demais.

22. Prove o Teorema 22, escolhendo um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ adequado.

◇