14

Produto interno e produto vetorial no espaço

Sumário

14.1 Produto interno

As noções de norma e produto interno de vetores no espaço são completamente análogas às correspondentes noções já estudadas para vetores no plano. No entanto, por motivos de completeza, vamos rever estes conceitos considerando vetores no espaço, omitindo, porém, a maioria dos detalhes.

Definição 1

A **norma** ou **comprimento** do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número:

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(A, B)$$

Como foi visto no plano, este número real não negativo independe do segmento AB escolhido para representar o vetor $\overrightarrow{v}$.

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais. Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, então as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ coincidem com as coordenadas do ponto P.

Logo, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)$, então $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ e

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(O, P) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Como no plano, um vetor $\overrightarrow{v}$ no espaço é **unitário** se sua norma é igual a 1. Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, o vetor $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$, chamado o **normalizado** de $\overrightarrow{v}$, é um vetor unitário e possui a mesma direção e sentido do vetor $\overrightarrow{v}$.

Assim, todo vetor $\overrightarrow{v}$ no espaço se escreve na forma $\lambda\overrightarrow{u}$ para algum escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e um vetor $\overrightarrow{u}$ unitário.

Exemplo 1

Sejam P um ponto no espaço $\mathcal{E}$ e $r > 0$. Como $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$ para todo $Q \in \mathcal{E}$, temos que a esfera S de centro P e raio r é o conjunto

$$S = \{Q \in \mathcal{E}\,;\, \|\overrightarrow{PQ}\| = r\}.$$

Outro conceito importante e necessário para definirmos o produto interno é o de **ângulo** entre dois vetores do espaço:

Definição 2

O **ângulo** $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ entre dois vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ não nulos é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC, medido no plano π_{ABC} que contém os pontos A, B e C.

Note que a medida do ângulo entre dois vetores recai na medida do ângulo entre dois vetores no plano. Além disso, $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in [0, \pi]$.

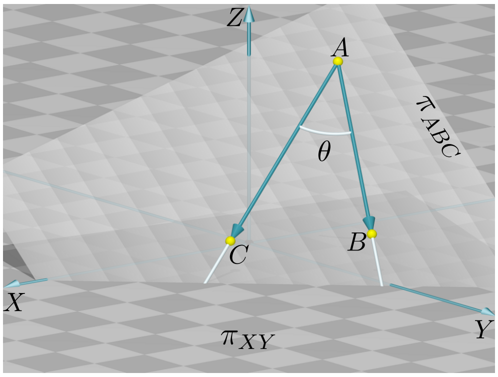

Figura 14.1: Ângulo $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ são vetores colineares, isto é, se A, B e C são pontos colineares, então:

- $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0^o$ se B e C estão do mesmo lado em relação a A na reta que os contêm;
- $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 180^o$ se B e C estão em lados opostos em relação a A na reta que os contêm.

Tendo os conceitos de norma e ângulo, definimos o produto interno entre dois vetores no espaço da mesma forma como foi feito para vetores no plano:

Definição 3

O **produto interno** entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ no espaço, é o número real

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta, & \text{se} \quad \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ e } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}, \end{cases}$$

onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Como o ângulo que um vetor $\overrightarrow{u} \neq 0$ faz com ele mesmo é igual a zero segue, da definição anterior, que:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

para qualquer vetor $\overrightarrow{u}$ no espaço. Este número é sempre não negativo, e é igual a zero se, e somente se, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Por um cálculo análogo ao efetuado para o produto interno no plano, obtemos a seguinte proposição que caracteriza o produto interno em termos das coordenadas dos vetores com respeito a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

Proposição 4

Se $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ são vetores no espaço, então,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

A seguinte proposição é consequência da Proposição 4 e das propriedades das operações entre números reais.

PROPOSIÇÃO 5 O produto interno de vetores no espaço satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$;

(2) $\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$;

(3) $\langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$;

(4) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$;

(5) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$.

para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$.

A noção de perpendicularidade entre dois vetores no espaço é a mesma que no plano.

DEFINIÇÃO 6 O vetor $\overrightarrow{u}$ é **perpendicular** ou **ortogonal** ao vetor $\overrightarrow{v}$, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, quando o ângulo entre eles é reto ou quando um dos vetores é o vetor nulo. Da definição de produto interno segue que:

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0.$$

EXEMPLO 2 Determine os valores de x e y de modo que o vetor $\overrightarrow{u} = (x, y, 1)$ tenha norma igual a $\sqrt{3}$ e seja perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 3, 4)$.

Solução. Temos que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ se, e só se,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle (x, y, 1), (1, 3, 4) \rangle = x + 3y + 4 = 0 \iff x = -3y - 4\,.$$

Por outro lado,

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2 + 1 = 3 \iff x^2 + y^2 = 2\,. \tag{14.1}$$

Substituindo $x = -3y - 4$ na equação (14.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
(-3y-4)^2 + y^2 = 2 &\iff 10y^2 + 24y + 14 = 0 \\
&\iff y = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 560}}{20} \\
&\iff y = -\frac{28}{20} = -\frac{7}{5} \text{ ou } y = \frac{-24+4}{20} = -1.
\end{aligned}$$

O problema possui então duas soluções:

- $y_1 = -\frac{7}{5} \Longrightarrow x_1 = \frac{21}{5} - 4 = \frac{1}{5} \Longrightarrow \overrightarrow{u_1} = \left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, 1\right)$;
- $y_2 = -1 \Longrightarrow x_2 = 3 - 4 = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{u_2} = (-1, -1, 1)$.

14.2 Produto vetorial

O produto interno de dois vetores, como vimos, é um número real e tem sentido tanto no plano quanto no espaço.

Já o produto vetorial de dois vetores, que definiremos abaixo, só faz sentido no espaço e dá como resultado um outro vetor.

O produto vetorial, como o produto interno, também pode ser definido geometricamente, se estabelecermos sua **norma**, sua **direção** e seu **sentido**. Mas, para facilitar a dedução de suas principais propriedades, ele será definido algebricamente. Posteriormente, investigaremos o seu significado geométrico.

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e consideremos os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Definição 7

O produto vetorial de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$ é o vetor

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Um dispositivo prático para determinar o produto vetorial consiste em calcular o "determinante simbólico" da matriz 3×3 cujos elementos da primeira linha são os vetores $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$, os elementos da segunda linha são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ e os da terceira são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}.$$

Proposição 8

Propriedades do Produto Vetorial: Para quaisquer vetores no espaço $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

(1) $< \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} > = < \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} > = 0$, isto é, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$.

(2) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ se, e só se, um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro. Ou seja, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos se, e só se, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

(3) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \operatorname{sen}\theta$, onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

(4) Se $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ são LI.

(5) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$

(6) $(\lambda\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\,(u \times \overrightarrow{v})$.

(7) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.

(8) $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, onde

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \tag{14.2}$$

é a matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ $\overrightarrow{w}$, na ordem em que são listados.

(9) $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores LD. Consequentemente, $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \neq \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores LI.

Demonstração

(1) Temos:

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} > &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)x_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)y_1 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_1 \\ &= x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 + x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos mostrar que $< \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} > = 0$.

(2) Pela Proposição 16 do Capítulo 13, sabemos que um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro se, e só se,

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja, se, e só se,

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0).$$

Em particular, $\overrightarrow{0} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ para todo vetor $\overrightarrow{u}$.

(3) Temos:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 &= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= {y_1}^2{z_2}^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + {y_2}^2{z_1}^2 + {x_1}^2{z_2}^2 - 2x_1x_2z_1z_2 \\
&\quad +{x_2}^2{z_1}^2 + {x_1}^2{y_2}^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + {x_2}^2{y_1}^2 \\
&= {x_1}^2({y_2}^2 + {z_2}^2) + {y_1}^2({x_2}^2 + {z_2}^2) + {z_1}^2({x_2}^2 + {y_2}^2) \\
&\quad -2x_1x_2y_1y_2 - 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
&= {x_1}^2({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) + {y_1}^2({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) \\
&\quad +{z_1}^2({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) - {x_1}^2{x_2}^2 - {y_1}^2{y_2}^2 \\
&\quad -{z_1}^2{z_2}^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
&= ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) \\
&\quad -({x_1}^2{x_2}^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + {y_1}^2{y_2}^2 \\
&\quad +2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) + {z_1}^2{z_2}^2) \\
&= ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) \\
&\quad -((x_1x_2 + y_1y_2)^2 + 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) + {z_1}^2{z_2}^2) \\
&= ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) \\
&\quad -(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2.
\end{aligned} \tag{14.3}$$

Como $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \cos\theta$, segue que:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 \, \cos^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 \, \operatorname{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \operatorname{sen}\theta$.

(4) Sejam O, A, B e C pontos no espaço tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OC}$. Como $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos, pela propriedade **(2)**, que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos, ou seja, os pontos O, A e B não são colineares.

Seja π o plano que passa pelos pontos O, A e B. Suponhamos, por absurdo, que os vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ não são LI. Então, o ponto C pertence ao plano π.

Pelo Teorema 20 do Capítulo 13, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Logo, pela Proposição 5 e pela propriedade **(1)**,

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 &= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \rangle \\
&= \lambda\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \mu\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

uma contradição, pois, por hipótese, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}\,(\Longleftrightarrow \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \neq 0)$.

(5) Temos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= -(y_2z_1 - y_1z_2, -(x_2z_1 - x_1y_2), x_2y_1 - x_1y_2) \\
&= -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})
\end{aligned}$$

(6) Como $\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, temos:

$$\begin{aligned}
& (\lambda\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} \\
= \; & ((\lambda y_1)z_2 - y_2(\lambda z_1), -((\lambda x_1)z_2 - x_2(\lambda z_1)), (\lambda x_1)y_2 - x_2(\lambda y_1)) \\
= \; & \lambda(y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1) \\
= \; & \lambda(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\,.
\end{aligned}$$

A outra identidade, $\overrightarrow{u} \times (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\,(u \times \overrightarrow{v})$, prova-se de maneira análoga.

(7) Sendo $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = (x_1 + x_3, y_1 + y_3, z_1 + z_3)$, temos:

$$\begin{aligned}
& (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{v} \\
= \; & ((y_1 + y_3)z_2 - y_2(z_1 + z_3), -((x_1 + x_3)z_2 - x_2(z_1 + z_3)), \\
& (x_1 + x_3)y_2 - x_2(y_1 + y_3)) \\
= \; & (y_1z_2 - y_2z_1 + y_3z_2 - y_2z_3, -(x_1y_2 - x_2z_1 + x_3z_2 - x_2z_3), \\
& x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_2 - x_2y_3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1y_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1) \\
&\quad +(y_3z_2 - y_2z_3, -(x_3z_2 - x_2z_3), x_3y_2 - x_2y_3) \\
&= \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, podemos verificar que

$$\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}.$$

(8) Temos:

$$
\begin{aligned}
&\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \\
&= \langle (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\
&= x_3(y_1z_2 - y_2z_1) - y_3(x_1z_2 - x_2z_1) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)\,.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, o determinante da matriz (14.2), quando desenvolvido pela regra de Sarrus, nós dá

$$
\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \left| \begin{array}{ccc:cc} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{array} \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_3y_2z_1 - y_3z_2x_1 - z_3x_2y_1 \\
&= x_3(y_1z_2 - y_2z_1) - y_3(x_1z_2 - x_2z_1) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

(9) Sejam A, B e C pontos do plano tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$.

Suponhamos que $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$**:** pela propriedade **(2)**, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos, ou seja, os pontos O, A e B são colineares. Logo, os pontos O, A, B e C são coplanares ($\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LD).

Caso 2. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$**:** neste caso, os pontos O, A e B não são colineares. Seja π o único plano que os contêm.

Pela propriedade **(4)**, os vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ são LI.

Logo, pelo Teorema 22 do Capítulo 13, existem $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \delta(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}).$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \delta(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\rangle \\ &= \lambda\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\rangle + \mu\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle + \delta\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\rangle \ . \\ &= \delta\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 \end{aligned}$$

pois, pela propriedade **(1)**, $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\rangle = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$.

Como $\delta\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 = 0$ e $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \neq 0$, segue que $\delta = 0$, ou seja,

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}.$$

Portanto, pelo Teorema 20 do Capítulo 13, o ponto C pertence ao plano π, ou seja, os pontos O, A, B e C são coplanares ($\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$ são vetores LD).

Reciprocamente, suponhamos que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LD.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos, então $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle = 0$, pois, pela propriedade **(2)**, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos, sabemos que os pontos O, A e B não são colineares.

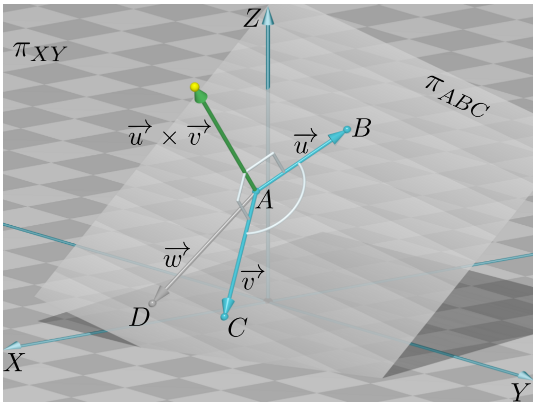

Figura 14.2: Propriedade (9)

Seja π o plano que passa por O, A e B. Como $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ não são LI, o ponto C pertence ao plano π. Pelo Teorema 22 do Capítulo 13, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Portanto, pela Proposição 5 e pela propriedade **(1)**,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle &= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\rangle \\ &= \lambda\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\rangle + \mu\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle = 0. \end{aligned}$$

Observação 9

Sejam A, B, C e D quatro pontos do espaço. Pelas propriedades **(2)** e **(9)**, temos, respectivamente, que:

- A, B e C são colineares se, e só se, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$. Ou seja, A, B e C não são colineares se, e só se, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$.

• A, B, C e D são coplanares se, e só se, $\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0$. Então, A, B, C e D são não coplanares se, e só se, $\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle \neq 0$

14.2.1 Interpretação geométrica da norma do produto vetorial

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} \neq \overrightarrow{0}$ vetores não colineares.

Seja C o ponto tal que o quadrilátero $\mathcal{P} = OACB$ é um paralelogramo.

Considerando o segmento OA como base, a altura de $\mathcal{P}$ é

$$h = \|\overrightarrow{OB}\| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

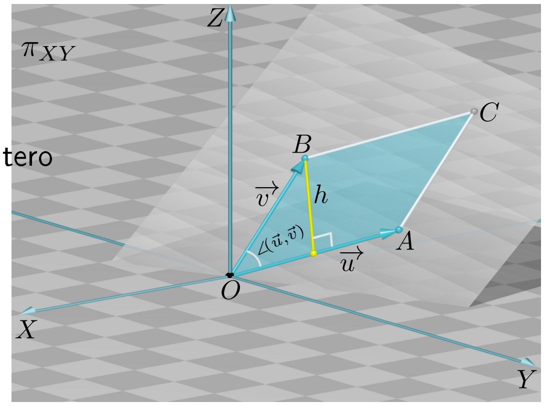

Figura 14.3: Paralelogramo $\mathcal{P} = OACB$ de altura h

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Área}\,(\mathcal{P}) &= \|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{OB}\| \operatorname{sen}\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \operatorname{sen}\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &= \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|. \end{aligned}$$

Ou seja, a norma do produto vetorial de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ **é a área do paralelogramo** que tem os segmentos OA e OB como lados adjacentes.

Note que se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares, ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então o paralelogramo $\mathcal{P}$ fica reduzido a um segmento ou a um ponto (paralelogramo degenerado) e tem, portanto, área zero. Como, nestes casos, pela propriedade (2), $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = 0$, a interpretação geométrica continua válida.

Observação 10

A identidade (ver (14.3))

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2$$

nos diz que o quadrado da área do paralelogramo $\mathcal{P}$ cujos lados adjacentes são AB e AC, onde $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle & \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \\ \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle & \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \end{pmatrix}$$

chamada **matriz de Gram** de ordem 2. Ou seja,

$$(\text{Área}\ (\mathcal{P}))^2 = \det \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle & \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \\ \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle & \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \end{pmatrix}$$

A vantagem desta fórmula é que ela serve para calcular tanto a área de um paralelogramo no plano quanto no espaço e independe do sistema de eixos ortogonais adotado.

Pela propriedade **(2)**, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ se, e só se, um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro. Caso contrário, pela propriedade **(1)**, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é um vetor não nulo perpendicular ao plano π gerado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Isto nos dá a direção do produto vetorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. E, pela propriedade **(3)**, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é um vetor de comprimento igual a $\|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|\ \operatorname{sen}\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ou seja, igual a área do paralelogramo construído sobre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Como existem apenas dois vetores de mesma direção e mesma norma (ele e o seu inverso aditivo), o produto vetorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ fica determinado se escolhermos o seu sentido.

O sentido escolhido, na definição, para o produto vetorial é tal que

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 > 0.$$

Mas este sentido depende do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ escolhido. Portanto, o produto vetorial, como definido acima, fica determinado geometricamente a menos de seu sentido.

É possível dar uma definição geométrica para o produto vetorial, isto é, podemos escolher geometricamente o sentido do produto vetorial. Vejamos:

Definição 11

Seja $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ um terno ordenado de vetores LI. Dizemos que $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é um terno **positivamente orientado** se ele satisfaz a regra da mão direita, ou seja, ao esticarmos os dedos indicador, médio, anular e mínimo na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_1}$ e depois fecharmos a mão na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_2}$, o polegar esticado apontará na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_3}$.

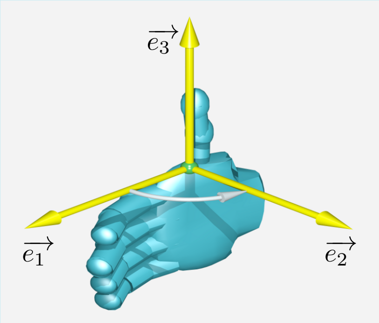

Figura 14.4: Regra da mão direita

Da definição acima, o produto vetorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ ficaria determinado geometricamente se estabelecêssemos, em sua definição, que o terno ordenado

$\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\}$ é positivo.

Teríamos então de provar que esta definição geométrica coincide, como de fato acontece, com a definição dada em coordenadas, desde que $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ seja também um terno positivo. Mas isso não será feito, por ser muito trabalhoso e pelo fato de o sentido do produto vetorial não importar nas aplicações que faremos no texto.

Exemplo 3

Determine o produto vetorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, onde $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (2, -1, 1)$.

Solução. Temos:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = 5\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_3}\,.$$

Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (5, 5, -5)\,.$

Exemplo 4

Sejam $P_0 = (1, -1, 2)$, $P = (1, 3, 1)$ e $Q = (2, -1, 0)$ pontos do espaço. Calcule a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ que tem como arestas adjacentes os segmentos P_0P e P_0Q.

Solução. Sendo $\overrightarrow{P_0P} = (0, 4, -1)$ e $\overrightarrow{P_0Q} = (1, 0, -2)$, temos:

$$\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = (-8, -1, -4).$$

Portanto,

$$\text{Área}\,(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q}\| = \|(-8, -1, -4)\| = \sqrt{64 + 1 + 16} = 9\,.$$

Exemplo 5

Encontre os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais os vetores $\overrightarrow{u} = (2, 0, t)$ e $\overrightarrow{v} = (t, 0, 2)$ sejam colineares.

Solução. Sabemos que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares se, e somente se, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Calculando, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} 0 & t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ t & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= 0\,\overrightarrow{e_1} - (4 - t^2)\,\overrightarrow{e_2} + 0\,\overrightarrow{e_3} \\ &= (t^2 - 4)\,\overrightarrow{e_2}\,. \end{aligned}$$

Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (0, t^2 - 4, 0) = (0,0,0) = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $t^2 - 4 = 0$, ou seja, se, e somente se, $t = 2$ ou $t = -2$.

Observação 12 Já provamos que o produto vetorial não é comutativo(propriedade **(6)**). É importante também observar que **o produto vetorial não é associativo**, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 6 Sejam $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{v} = (1,0,2)$ e $\overrightarrow{w} = (1,0,0)$ vetores no espaço. Mostre que

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}).$$

Solução. Como,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\
&= 4\,\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 2\,\overrightarrow{e_3} = (4,1,-2), \\
\Longrightarrow (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\
&= -2\,\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} = (0,-2,-1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\
&= 2\,\overrightarrow{e_2} = (0,2,0), \\
\Longrightarrow \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\
&= -6\,\overrightarrow{e_1} + 2\,\overrightarrow{e_3} = (-6,0,2),
\end{aligned}$$

segue que $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

Exemplo 7 Considere os pontos $O = (0,0,0), P = (1,2,0)$, $Q = (3,1,1)$ e $R = (1,-1,1)$ e os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{w} = OR$.

(a) Determine a altura relativa à base de lados OP e OQ do paralelepípedo $\mathcal{P}$ que tem por vértices O, P, Q e R.

(b) Calcule a área do triângulo $\mathcal{T}$ de vértices P, Q e R.

(c) Encontre a área externa do tetraedro σ cujos vértices são O, P, Q e R.

Solução. **(a)** A altura h do paralelepípedo $\mathcal{P}$, tomando como base o paralelogramo de lados adjacentes OP e OQ, é:

$$h = \|\overrightarrow{w}\| \left|\cos\angle(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\right| = \|\overrightarrow{w}\| \frac{|\langle\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle|}{\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{|\langle\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle|}{\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|}\,.$$

Sendo

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = (2,-1,-5)\,,$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\| &= \sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}\,, \\ \langle\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle &= \langle(2,-1,-5),(1,-1,1)\rangle = 2+1-5 = -2\,, \end{aligned}$$

obtemos $h = \dfrac{|-2|}{\sqrt{30}} = \dfrac{2}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

(b) O triângulo $\mathcal{T}$ tem por arestas adjacentes os segmentos PQ e PR. Logo, a sua área é

$$\text{Área}\,(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|\,.$$

Como $\overrightarrow{PQ} = (2,-1,1)$ e $\overrightarrow{PR} = (0,-3,1)$, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= (2,-2,6) \end{aligned}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área}\,(\mathcal{T}) &= \frac{\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-2)^2+6^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} \end{aligned}.$$

(c) A área externa do tetraedro σ de vértices O, P, Q e R é a soma das áreas dos triângulos $\triangle OPQ$, $\triangle OPR$, $\triangle OQR$ e $\triangle PQR = \mathcal{T}$, a última das quais calculamos no item **(b)**.

Calculemos as áreas dos outros três triângulos:

$$\begin{aligned} \text{Área}\,(\triangle OPQ) &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{30}\,; \\ \text{Área}\,(\triangle OPR) &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}\|\,; \\ \text{Área}\,(\triangle OQR) &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\|\,. \end{aligned}$$

Como

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = (2, -1, -3)\,,$
- $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = (2, -2, -4)\,,$

segue que:

$$\text{Área}\,(\triangle OPR) = \frac{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,;$$

$$\text{Área}\,(\triangle OQR) = \frac{\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2}.$$

Logo, a área do tetraedro σ é:

$$\begin{aligned} \text{Área}\,(\sigma) &= \text{Área}\,(\triangle OPQ) + \text{Área}\,(\triangle OPR) + \text{Área}\,(\triangle OQR) + \text{Área}\,(\triangle PQR) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{30} + \frac{1}{2}\sqrt{14} + \frac{1}{2}\sqrt{24} + \frac{1}{2}\sqrt{44} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{30} + \sqrt{14} + \sqrt{24} + \sqrt{44}\right)\,. \end{aligned}$$

O objetivo do próximo exemplo é mostrar como se obtém os dois vetores unitários tais que cada um faz um ângulo θ_1 com o vetor $\overrightarrow{u}$ e um ângulo θ_2 com o vetor $\overrightarrow{v}$, sendo $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não múltiplos.

Não daremos uma fórmula geral, que pode ser deduzida seguindo os passos que faremos para resolver o exemplo numérico abaixo, porque o que interessa não é só a solução, mas também como se chega a ela.

EXEMPLO 8

Determine os dois vetores unitários $\overrightarrow{z}$ de modo que cada um deles faça um ângulo de $60°$ com o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 2, -1)$ e um ângulo de $45°$ com o vetor $\overrightarrow{v} = (0, 1, -1)$.

Solução. Como os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos, pois

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = (-1, 2, 2) \neq (0, 0, 0),$$

temos, pela propriedade **(4)** do produto vetorial, que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ são LI.

Então, pelo Teorema 22 do Capítulo 13, existem números reais α, β e γ tais que

$$\overrightarrow{z} = \alpha \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} + \beta \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} + \gamma \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}.$$

Fazendo o produto interno de $\overrightarrow{z}$ com os vetores $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ e $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$, obtemos, respectivamente, que:

- $\langle \overrightarrow{z}, \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \rangle = \alpha + \beta \dfrac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}$;
- $\langle \overrightarrow{z}, \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \rangle = \alpha \, \dfrac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|} + \beta$,

pois $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$, pela propriedade **(1)** do produto vetorial.

Pela definição do produto interno e pelo fato de $\overrightarrow{z}$ ser um vetor unitário, segue que:

$$\langle \overrightarrow{z}, \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \rangle = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \langle \overrightarrow{z}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \rangle = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, sendo

$$\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\langle (2,2,-1), (0,1,-1) \rangle}{\sqrt{4+4+1}\,\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha = 0$ e $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Logo,

$$\overrightarrow{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} + \gamma \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}.$$

Como, além disso, $\overrightarrow{z}$ é unitário, temos que

$$1 = \langle \overrightarrow{z}, \overrightarrow{z} \rangle = \langle \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} + \gamma \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}, \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} + \gamma \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|} \rangle = \frac{1}{2} + \gamma^2$$

$$\iff \gamma^2 = \frac{1}{2} \iff \gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1,2,2)}{3} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right),$$

e

$$\overrightarrow{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1,2,2)}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

são os dois vetores unitários procurados.

14.3 Exercícios

1. Sejam os vetores
$$\overrightarrow{v_1} = (-1,-1,0),\quad \overrightarrow{v_2} = (-1,3,4),\quad \overrightarrow{v_3} = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}),$$
$$\overrightarrow{v_4} = (1,-1,8),\quad \overrightarrow{v_5} = (0,0,\tfrac{1}{8}),\quad \overrightarrow{v_6} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0).$$

   (a) Calcule os produtos internos de todos os pares de vetores distintos listados.

   (b) Identifique os pares de vetores ortogonais, os vetores unitários e normalize os não unitários.

   (c) Ache o cosseno dos ângulos $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$ e $\angle(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.

   (d) Determine $\langle 3\overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_6}, 2(\overrightarrow{v_4} + \overrightarrow{v_1})\rangle$, usando o item (a) e as propriedades do produto interno.

2. Se $\overrightarrow{u} = (1,2,-3)$ e $\overrightarrow{v} = (2,1,-3)$, determine os vetores unitários colineares ao vetor $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$.

3. Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u} = (2,3,1)$ e $\overrightarrow{v} = (3,2,-3)$.

4. Sejam α, β e γ os ângulos que o vetor não nulo $\overrightarrow{u}$ faz com os eixos coordenados OX OY e OZ, respectivamente. Mostre que:
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

5. A **projeção ortogonal** do vetor $\overrightarrow{u}$ na direção do vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ é o vetor $\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u}) = \dfrac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v}$, ou, simplesmente $\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \overrightarrow{v}$, quando $\overrightarrow{v}$ é unitário. Calcule $\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u})$, onde:

   (a) $\overrightarrow{u} = (1,1,-1)$ e $\overrightarrow{v} = (0,-1,-2)$;

   (b) $\overrightarrow{u} = (0,2,3)$ e $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$;

   (c) $\overrightarrow{u} = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{v} = (0,1,0)$.

6. Calcule $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ e determine a área do paralelogramo cujos lados adjacentes são representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, onde:

   (a) $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$ e $\overrightarrow{v} = (-1,0,1)$;

   (b) $\overrightarrow{u} = (0,2,3)$ e $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$;

(c) $\overrightarrow{u} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$;

(d) $\overrightarrow{u} = (-1, -1, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 1, 2)$.

7. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do espaço.

(a) Verifique a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|.$$

Mostre que a desigualdade de Cauchy-Schwarz torna-se uma identidade se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos um do outro.

(b) Prove, usando o item (a), a **desigualdade triangular**

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \, .$$

Conclua que $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ se, e só se, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u}$ é um múltiplo positivo de $\overrightarrow{v}$.

8. Considere os pontos $A = (1, 1, 3)$, $B = (-2, 2, 4)$, $C = (2, -1, 5)$, $D = (-6, 5, 3)$, $E = (-5, 3, 5)$ e $F = (2, 2, 2)$. Verifique, usando as propriedades do produto vetorial, que os pontos:

(a) A, B e C não são colineares;

(b) A, B C e D são coplanares;

(c) A, B e E são colineares;

(d) A, B, C e F não são coplanares.

9. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras, e quais são falsas? Justifique.

(a) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \neq 0 \iff \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

(b) $\left\| \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right\| = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{u}$ é unitário.

(c) Se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, para todo vetor $\overrightarrow{v}$ do espaço, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(d) Os vetores $\overrightarrow{u} = (x, 2, 4)$ e $\overrightarrow{v} = (x, -2x, 3)$ não são ortogonais para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) Existe um número real λ para o qual a área do paralelogramo $ABDC$ de vértices $A = (1, 4, 1)$, $B = (2, 3, 2)$ e $C = (4, 5, \lambda)$ é igual a 4.

(f) Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores LI no espaço, então os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ também são LI.

(g) Se as coordenadas dos vértices de um paralelogramo no espaço são números inteiros, então sua área é um número inteiro.

10. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no espaço tais que $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Mostre que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

11. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores LI no espaço e seja $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Mostre que:

(a) $|\operatorname{sen}\theta| = \left\| \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} - \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}\cos\theta \right\|$;

(b) $\|\overrightarrow{v} - \operatorname{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$;

(c) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v} - \operatorname{Proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}\|$.

12. Use o exercício anterior para calcular a área do paralelogramo $ABCD$, onde:

- $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (1, 1, 1)$;
- $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-1, -1, -1)$;
- $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 0)$.

(Não é necessário conhecer o vértice D).

13. Considere os vetores $\overrightarrow{u} = (1, -1, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (4, 0, -3)$. Obtenha os dois vetores unitários tais que cada um faz um ângulo de 30° com o vetor $\overrightarrow{u}$ e um ângulo θ_0 com o vetor $\overrightarrow{v}$, onde $\cos\theta_0 = 2/5$.

14. Sejam $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ vetores não nulos mutuamente ortogonais no espaço.

(a) Mostre que $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são vetores LI.

(b) Então, por (a), todo vetor $\overrightarrow{w}$ se escreve, de maneira única, como combinação linear de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{w} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3}$. Verifique que

$$\lambda_i = \frac{\langle \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{w} \rangle}{\|\overrightarrow{v_i}\|^2},\ i = 1, 2, 3.$$

Em particular $\lambda_i = \langle \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{w} \rangle$, $i = 1, 2, 3$, quando $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são ortonormais, isto é, ortogonais e unitários.

Dizemos que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathcal{B}}$ são as **coordenadas** do vetor $\overrightarrow{w}$ em relação ao terno ordenado $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ ortogonal (ou ortonormal) de vetores.

(c) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 1, -2)$ em relação ao terno ordenado ortogonal $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, onde $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 0, 1)$ e $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 0)$.

(d) Obtenha as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{w}$ com respeito ao terno ordenado ortogonal do item (c), sabendo que $\|\overrightarrow{w}\| = 4$, $\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_1}) = 30°$, $\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_2}) = 60°$ e $\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_3}) = 45°$.

(e) Encontre um vetor $\overrightarrow{v_3}$ de modo que $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ seja um terno ordenado ortonormal de vetores, onde $\overrightarrow{v_1} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\overrightarrow{v_2} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(f) Ache as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = (0, 1, 3)$ em relação à terno ordenado ortonormal $\mathcal{B}$ do item anterior.

(g) Determine o vetor $\overrightarrow{w}$ tal que $\|\overrightarrow{w}\| = 4$, $\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_1}) = 30°$, $\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_2}) = 60°$ e $\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_3}) = 45°$, onde $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ é o terno ordenado ortonormal do item (e).

Exercícios Complementares

15. Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ vetores do espaço. Prove, supondo que $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são vetores não nulos, que:

(a) $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ se, e só se, todo vetor perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ é também perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

(b) $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ se, e só se, todo vetor perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ é também perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

(c) se $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são LI e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_3} \rangle = 0$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(d) o determinante da **matriz de Gram de ordem 3**,

$$\begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle & \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle & \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3} \rangle \\ \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle & \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle & \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle \\ \langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1} \rangle & \langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2} \rangle & \langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3} \rangle \end{pmatrix}$$

é diferente de zero se, e só se, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são LI.

16. Mostre, para quaisquer $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores do espaço, que:

(a) $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{u}$;

(b) $\langle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}\rangle = \langle\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{z}\rangle$;

(c) $\langle\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{z}\rangle = \det\begin{pmatrix}\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle & \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{z}\rangle \\ \langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle & \langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}\rangle\end{pmatrix}$.

Conclua, do item (c), que

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 = \det\begin{pmatrix}\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \\ \langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle\end{pmatrix},$$

fato já provado no texto.

(Indicação: para provar os itens (a) e (b), basta desenvolver os dois lados da identidade, usando coordenadas, e verificar que são iguais. Esta maneira é muito trabalhosa. Outra maneira, bem mais simples, consiste em escolher um sistema de eixos ortogonais conveniente).

◇