15

Produto Misto, Determinante e Volume

Sumário

15.1 Produto Misto e Determinante

O produto misto dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do espaço é o número real

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle.$$

O produto misto de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ nada mais é, pela propriedade (8) do produto vetorial, que o determinante da matriz do tipo 3×3 que tem por linhas as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ na ordem em que são listados. Ou seja,

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$

Interpretação geométrica do produto misto

Sejam A, B, C e D pontos não coplanares e $\mathcal{P}$ o paralelepípedo que tem os segmentos AB, AC e AD como arestas adjacentes.

Considerando o paralelogramo $\mathcal{T}$ de lados adjacentes AB e AC como base de $\mathcal{P}$,

$$\text{Vol}\,(\mathcal{P}) = \text{Área}\,(\mathcal{T}) \cdot h\,,$$

onde h é a altura de $\mathcal{P}$ relativa à base $\mathcal{T}$ (ver Figura 15.1).

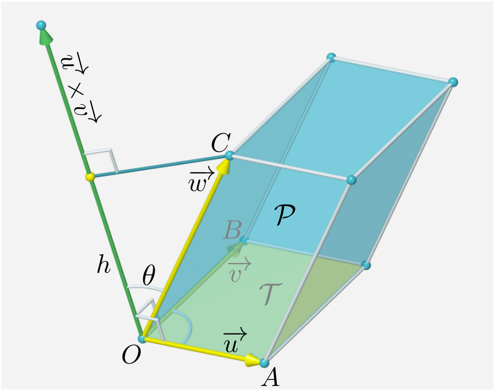

Figura 15.1: Interpretação geométrica do produto misto.

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$, obtemos que Área $(\mathcal{T}) = ||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||$ e $h = ||\overrightarrow{w}|| \cdot |\cos\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})|$.

Portanto,

$$\text{Vol}\,(\mathcal{P}) = ||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|| \cdot ||\overrightarrow{w}|| \cdot |\cos\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})|\,.$$

Ou seja, o volume de $\mathcal{P}$ é o módulo do produto misto dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$:

$$\text{Vol}\,(\mathcal{P}) = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|\,,$$

ou, em termos dos vértices A, B, C e D,

$$\text{Vol}\,(\mathcal{P}) = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|\,.$$

Por outro lado, se os pontos A, B, C e D são coplanares, isto é, se os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ são L.D., o paralelepípedo fica reduzido a um paralelogramo, a um segmento ou a um ponto, tendo, portanto, volume zero. Isto concorda com a propriedade (9) do produto vetorial: se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são L.D., então $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

Proposição 1

(Propriedades do produto misto) Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{w_0}$ vetores do espaço e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

(1) $[\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$;

(2) $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$;
$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w}]$;
$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w_0}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_0}]$;

(3) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$ se, e somente, se, os vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são L.D.. Ou seja, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são L.I.;

(4) O sinal do produto misto muda quando permutamos dois de seus fatores: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}]$.

Demonstração

As propriedades (1), (2), (3) e a primeira identidade da propriedade (4) seguem diretamente das propriedades do produto vetorial e do produto interno.

Precisamos provar as outras identidades da propriedade (4).

Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ os vetores dados num sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ positivo.

Temos:

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle &= x_3(y_1z_2 - y_2z_1) - y_3(x_1z_2 - x_2z_1) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2) \\
&= \langle \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle . \qquad (15.1)
\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = -(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v})$, segue, de 15.1, que

$$\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = -\langle \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle .$$

Logo,

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]. \qquad (15.2)$$

que é a segunda identidade da propriedade (4).

Permutando os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$, obtemos, pelo provado acima, que

$$[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}]. \qquad (15.3)$$

Assim, por 15.2 e 15.3,

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}],$$

que é a terceira identidade da propriedade (4).

Como, consequência, seque que se fizermos duas permutações seguidas dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, o produto misto não se altera:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}].$$

De fato,

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = -(-[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]) = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}],$$
$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -(-[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]) = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}].$$

Exemplo 1

Verifique se os pontos $A = (1,2,1), B = (4,1,2), C = (3,3,3)$ e $D = (0,4,2)$ são coplanares.

Solução. Sejam os vetores $\overrightarrow{AB} = (3,-1,1), \overrightarrow{AC} = (2,1,2)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1,2,1)$.

Pela propriedade (3) do produto misto e pela Observação 9 do Capítulo 14, os pontos A, B, C e D são coplanares se, e somente se,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0\,.$$

Calculando,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-3,-4,5)\,, \end{aligned}$$

obtemos que

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-3,-4,5), (-1,2,1) \rangle = 0\,.$$

Portanto, os pontos A, B, C e D são coplanares. Observe que $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Exemplo 2

Mostre que os vetores $\overrightarrow{u} = (1,0,2)$, $\overrightarrow{v} = (2,1,0)$ e $\overrightarrow{w} = (3,1,1)$ são L.I., e calcule o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$ cujas arestas adjacentes são representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

Solução. Pela propriedade (3), $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são L.I. se, e só se, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$.

Como

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \\ &= 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(-2) - (-4) + 1 \\ &= -6 + 4 + 1 = -1 \neq 0,\end{aligned}$$

os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são L.I. e o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$ é

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P}) = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = |-1| = 1\,.$$

Sendo $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, podemos traduzir as propriedades do produto misto em propriedades do determinante de uma matriz 3×3.

1. Multiplicar uma linha por um número real λ, equivale a multiplicar o determinante por λ:

$$\det(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w}) = \lambda \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,.$$

2. A soma dos determinantes de duas matrizes com duas linhas em comum é o determinante da matriz que tem essas duas linhas comuns e o vetor linha restante igual a soma dos vetores linha correspondentes das duas matrizes:

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,,$$

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w})\,,$$

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_0}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w_0})\,.$$

3. Critério de coplanaridade:

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \iff \overrightarrow{u}\,,\ \overrightarrow{v}\ \text{ e }\ \overrightarrow{w}\ \text{ são coplanares (L.D.)}\,,$$

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0 \iff \overrightarrow{u}\,,\ \overrightarrow{v}\ \text{ e }\ \overrightarrow{w}\ \text{ não são coplanares (L.I.)}\,.$$

4. O sinal do determinante muda quando se permuta duas de suas linhas:

$$\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,,$$

$$\det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,,$$

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,.$$

Como consequência das propriedades (1), (2) e (3), obtemos as seguintes propriedades:

5. Se uma matriz tem duas linhas iguais, seu determinante é igual a zero:

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0\,.$$

6. Se uma linha da matriz é combinação linear das outras duas, o determinante da matriz é zero:

$$\det(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = 0\,.$$

7. O determinante de uma matriz não se altera se trocarmos uma de suas linhas pela soma dela com um múltiplo de outra. Por exemplo,

$$\det(\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,.$$

De fato, pelas propriedades (1), (2) e (5),

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \alpha \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \\ &= \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,.\end{aligned}$$

8. Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ são os vetores num sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, então:

- $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle =$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}\, x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\, y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\, z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

é o desenvolvimento do determinante da matriz segundo a primeira linha;

- $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = -\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle =$

$$= -x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}\, x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\, y_2 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\, z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

é o desenvolvimento do determinante da matriz segundo a segunda linha;

- $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle =$

$$= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}\, x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\, y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\, z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

é o desenvolvimento do determinante da matriz segundo a terceira linha.

No fator $(-1)^{i+j}$, das identidades acima, i indica a $i-$ésima linha e j indica a $j-$ésima coluna, $i, j = 1, 2, 3$.

Sejam $\mathcal{A}$ uma matriz 3×3 e r o elemento de $\mathcal{A}$ que ocupa a $i-$ésima linha e a $j-$ésima coluna. O menor $\mathcal{A}_{ij}$ relativo a esse elemento é o determinante da matriz 2×2 que se obtém omitindo-se a $i-$ésima linha e a $j-$ésima coluna de $\mathcal{A}$. Ou seja, se

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix},$$

então:

$$\mathcal{A}_{11} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_{12} = \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_{13} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix},$$
$$\mathcal{A}_{21} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_{22} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_{23} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix},$$
$$\mathcal{A}_{31} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_{32} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_{33} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Assim, o desenvolvimento do determinante da matriz $\mathcal{A}$ segundo a primeira, a segunda e a terceira linha são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A} &= (-1)^{1+1} x_1\, \mathcal{A}_{11} + (-1)^{1+2} y_1\, \mathcal{A}_{12} + (-1)^{1+3} z_1\, \mathcal{A}_{13}, \\
\det \mathcal{A} &= (-1)^{2+1} x_2\, \mathcal{A}_{21} + (-1)^{2+2} y_2\, \mathcal{A}_{22} + (-1)^{2+3} z_2\, \mathcal{A}_{23}, \\
\det \mathcal{A} &= (-1)^{3+1} x_3\, \mathcal{A}_{31} + (-1)^{3+2} y_3\, \mathcal{A}_{32} + (-1)^{3+3} z_3\, \mathcal{A}_{33}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule o determinante da matriz $\mathcal{A}$, desenvolvendo-o segundo a primeira, a segunda e a terceira linha, onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução.

Temos:

$$\begin{aligned}
\bullet \det \mathcal{A} &= (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 3(1+2) - 2(0-8) + (0-4) = 9 + 16 - 4 = 21,
\end{aligned}$$

$$\bullet \det \mathcal{A} = (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-4) - 2(-3-8) = -1 + 22 = 21\,,$$

$$\bullet \det \mathcal{A} = (-1)^{3+1}\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot (-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(4-1) + (6-0) + (3-0) = 12 + 6 + 3 = 21\,.$$

Exemplo 4

Uma matriz $\mathcal{A}$ é uma matriz diagonal se todos os elementos de $\mathcal{A}$ que não estão na diagonal são iguais a zero. Ou seja, se $\mathcal{A}$ é da forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\ ; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Desenvolvendo o determinante de $\mathcal{A}$ pela primeira linha, obtemos $\det(\mathcal{A}) = (-1)^{1+1}\lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

A matriz identidade I do tipo 3×3 é a matriz diagonal com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Então, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e seu determinante é igual a um.

A matriz transposta da matriz $\mathcal{A}$ é a matriz $\mathcal{A}^T$ cuja $i-$ésima coluna é a $i-$ésima linha da matriz $\mathcal{A}$. Ou seja, se

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

9. O determinante da matriz $\mathcal{A}$ é igual ao determinante de sua matriz transposta $\mathcal{A}^T$.

De fato, pelo desenvolvimento do determinante da matriz $\mathcal{A}^T$ com respeito à sua primeira linha,

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A}^T &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) \\
&= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3y_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2) \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3\, . \end{vmatrix} ,
\end{aligned}$$

obtemos que $\det \mathcal{A}^T = \det \mathcal{A}$.

Portanto, todas as propriedades do determinante com respeito às suas linhas também valem para suas colunas. Em particular:

10. Os vetores coluna da matriz $\mathcal{A}$ são L.I. se, e somente se, $\det(\mathcal{A}) \neq 0$.

11. O determinante da matriz $\mathcal{A}$ pode ser calculado segundo os elementos da:

- 1^a coluna:

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A} &= (-1)^{1+1}x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}x_1\, \mathcal{A}_{11} + (-1)^{2+1}x_2\, \mathcal{A}_{21} + (-1)^{3+1}x_3\, \mathcal{A}_{31} ,
\end{aligned}$$

- 2^a coluna:

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A} &= (-1)^{1+2}y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}y_2 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}y_1\, \mathcal{A}_{12} + (-1)^{2+2}y_2\, \mathcal{A}_{22} + (-1)^{3+2}y_3\, \mathcal{A}_{32} ,
\end{aligned}$$

- 3^a coluna:

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A} &= (-1)^{1+3}z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+3}z_1\, \mathcal{A}_{13} + (-1)^{2+3}z_2\, \mathcal{A}_{23} + (-1)^{3+3}z_3\, \mathcal{A}_{33} .
\end{aligned}$$

O cálculo do determinante de uma matriz $\mathcal{A}$ pelo desenvolvimento segundo uma linha ou uma coluna é muito útil quando a matriz $\mathcal{A}$ tem uma linha ou coluna com um ou dois elementos iguais a zero.

Exemplo 5

Pelo desenvolvimento segundo a terceira linha, que possui um elemento igual a zero, temos

$$\det\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 6 & 7\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} = (-1)^{3+2}\cdot 2\begin{vmatrix}4 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 1\begin{vmatrix}4 & 3\\ 0 & 6\end{vmatrix} = -2\times 28 + 24 = -32\,,$$

e pelo desenvolvimento com respeito à primeira coluna, que tem dois elementos iguais a zero, obtemos

$$\det\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 6 & 7\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 4\begin{vmatrix}6 & 7\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 4(6-14) = -32\,.$$

15.2 Regra de Cramer

Frequentemente enfrentamos a necessidade de resolver um sistema de três equações lineares com três variáveis. Um método para atingir tal objetivo é a Regra de Cramer.

Consideremos o sistema de três equações lineares a três incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1\\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2\\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3\,. \end{cases}$$

A matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$ é chamada matriz do sistema. Sabemos que

$\det\mathcal{A} \neq 0 \Longleftrightarrow$ as linhas de $\mathcal{A}$ são L.I. $\Longleftrightarrow$ as colunas de $\mathcal{A}$ são L.I..

Consideremos os vetores coluna da matriz $\mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3),\ \overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)\ ,$$

e o vetor $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2, d_3)$ formado pelos termos independentes do sistema.

Resolver o sistema acima equivale, então, a determinar os $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}\ ,$$

ou seja, consiste em encontrar os coeficientes de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ mediante os quais o vetor $\overrightarrow{d}$ se escreve como combinação linear desses três vetores.

Aplicando as propriedades do determinante obtidas anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{d},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}) &= \det(x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\\ &= x\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})+y\det(\overrightarrow{b},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})+z\det(\overrightarrow{c},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\\ &= x\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\,.\end{aligned}$$

Portanto, se $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\neq 0$, $x=\dfrac{\det(\overrightarrow{d},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}$.

Analogamente, calculando os determinantes das matrizes $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{d},\overrightarrow{c})$ e $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})$, obtemos:

$$y=\frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{d},\overrightarrow{c})}{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}\quad \text{e} \quad z=\frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})}{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}\,.$$

Estas três fórmulas, que fornecem as incógnitas x,y e z como quocientes de dois determinantes, constituem a regra de Cramer.

Observe que $\det\mathcal{A}=\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$, pois a matriz cujos vetores linha são $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ é a transposta da matriz $\mathcal{A}$.

Embora a regra de Cramer nos dê um método para achar a solução de um sistema, ela é muito trabalhosa. No Capítulo 18 veremos como resolver um sistema de modo bem simples e geométrico.

Exemplo 6

Verifique que o sistema abaixo possui uma única solução e use a regra de Cramer para determiná-la:

$$\begin{cases} x+y+2z=1\\ 2x+3y+3z=2\\ 4x+4y+5z=3\,.\end{cases}$$

Solução. Sejam $\overrightarrow{a}=(1,2,4)$, $\overrightarrow{b}=(1,3,4)$, e $\overrightarrow{c}=(2,3,5)$ os vetores coluna da matriz do sistema e $\overrightarrow{d}=(1,2,3)$ o vetor formado pelos termos independentes.

Calculando, obtemos $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=-3\neq 0$. Portanto, o sistema possui uma solução. Como $\det(\overrightarrow{d},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=0$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{d},\overrightarrow{c})=-1$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})=-1$, temos, pela regra de Cramer, que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det(\overrightarrow{d},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}=\frac{0}{-3}=0\,,\\ y &= \frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{d},\overrightarrow{c})}{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}\,,\\ z &= \frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})}{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

é a única solução do sistema.

15.3 Operações com matrizes

Sejam $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{pmatrix}$ duas matrizes 3×3.

Definimos a soma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ das matrizes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e a multiplicação $\lambda\mathcal{A}$ da matriz $\mathcal{A}$ por um número real λ de maneira análoga à soma de vetores e à multiplicação de um vetor por um escalar.

A saber,

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1+m_1 & b_1+n_1 & c_1+p_1 \\ a_2+m_2 & b_2+n_2 & c_2+p_2 \\ a_3+m_3 & b_3+n_3 & c_3+p_3 \end{pmatrix} \text{ e } \lambda\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ \lambda a_3 & \lambda b_3 & \lambda c_3 \end{pmatrix}.$$

Estas operações possuem as mesmas propriedades das operações com vetores, sendo a matriz nula $\mathcal{O}$, matriz com todos os seus elementos iguais a zero, o elemento neutro da adição.

Estendendo a definição de multiplicação de matrizes 2×2 vista no Capítulo 8, definimos a matriz produto $\mathcal{AB}$ da matriz $\mathcal{A}$ pela matriz $\mathcal{B}$ como sendo a matriz 3×3:

$$\mathcal{AB}=\begin{pmatrix} a_1m_1+b_1m_2+c_1m_3 & a_1n_1+b_1n_2+c_1n_3 & a_1p_1+b_1p_2+c_1p_3 \\ a_2m_1+b_2m_2+c_2m_3 & a_2n_1+b_2n_2+c_2n_3 & a_2p_1+b_2p_2+c_2p_3 \\ a_3m_1+b_3m_2+c_3m_3 & a_3n_1+b_3n_2+c_3n_3 & a_3p_1+b_3p_2+c_3p_3 \end{pmatrix} \tag{15.4}$$

Assim, o $ij-$ésimo elemento da matriz produto $\mathcal{AB}$ é o produto interno do $i-$ésimo vetor linha da matriz $\mathcal{A}$ pelo $j-$ésimo vetor coluna da matriz $\mathcal{B}$.

EXEMPLO 7

Se $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos que $\mathcal{AB}$ é

$$\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot6 & 1\cdot(-1)+2\cdot3+3\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot0 \\ 4\cdot1+5\cdot0+6\cdot6 & 4\cdot(-1)+5\cdot3+6\cdot1 & 4\cdot2+5\cdot1+6\cdot0 \\ 1\cdot1+2\cdot0+1\cdot6 & 1\cdot(-1)+2\cdot3+1\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 19 & 8 & 4 \\ 40 & 17 & 13 \\ 7 & 6 & 4\,. \end{pmatrix}$$

Exemplo 8

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ três vetores no espaço. A matriz de Gram dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é a matriz 3×3

$$\mathcal{G}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle \\ \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle \\ \langle\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\rangle \end{pmatrix}.$$

Se $\overrightarrow{u}=(a_1,b_1,c_1)$, $\overrightarrow{v}=(a_2,b_2,c_2)$ e $\overrightarrow{w}=(a_3,b_3,c_3)$ são os vetores num sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e $\mathcal{A}$ a matriz cujos vetores linha são $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, temos, pela definição do produto de matrizes, que

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{G}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\,.$$

Como, pela propriedade (9) de determinante, $\det\mathcal{A}=\det\mathcal{A}^T$, segue que $(\det\mathcal{A})^2=\det\mathcal{G}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.

Então, se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são linearmente independentes, obtemos que

$$(\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P}))^2 = \det\mathcal{G}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\,,$$

onde $\mathcal{P}$ é o paralelepípedo cujas arestas adjacentes são representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Neste caso, $\det\mathcal{G}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = (\det\mathcal{A})^2$ é um número positivo.

Por exemplo, se AB, AC e AD são lados adjacentes do paralelepípedo $\mathcal{P}$ tais que $||\overrightarrow{AB}||=2$, $||\overrightarrow{AC}||=3$, $||\overrightarrow{AD}||=1$, $\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=30^o$, $\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=45^o$ e $\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=60^o$, então

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P})^2 = \det\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{AB}||^2 & \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle & \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle \\ \langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\rangle & ||\overrightarrow{AC}||^2 & \langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle \\ \langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\rangle & \langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\rangle & ||\overrightarrow{AD}||^2 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P})^2 = \det\begin{pmatrix} 4 & 2\cdot3\cos90^o & 2\cdot1\cos45^o \\ 2\cdot3\cos30^o & 9 & 3\cdot1\cos60^o \\ 2\cdot1\cos45^o & 3\cdot1\cos60^o & 1 \end{pmatrix},$$

$$\iff \text{Vol}\,(\mathcal{P})^2 = \det\begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} & 9 & 3/2 \\ \sqrt{2} & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Vol}\,(\mathcal{P})^2 &= 4\begin{vmatrix} 9 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix} - 3\sqrt{3}\begin{vmatrix} 3\sqrt{3} & 3/2 \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} + \sqrt{2}\begin{vmatrix} 3\sqrt{3} & 9 \\ \sqrt{2} & 3/2 \end{vmatrix} \\ &= 4(9-9/2) - 3\sqrt{3}(3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}/2) + \sqrt{2}(9\sqrt{3}/2 - 9\sqrt{2}) \\ &= 18 - 9 + 9\sqrt{6}/2 + 9\sqrt{6}/2 - 18 = 9(\sqrt{6}-1)\,. \end{aligned}$$

Assim, $\text{Vol}\,(\mathcal{P}) = 3(\sqrt{\sqrt{6}-1})\,.$

O produto de duas matrizes é associativo: $(\mathcal{AB})\cdot\mathcal{C} = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{BC})$; é distributivo: $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC}+\mathcal{BC}$ e $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB}+\mathcal{AC}$, e o elemento neutro do produto é a matriz identidade: $\mathcal{A}I = I\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Mas o produto $\mathcal{AB}$ não é comutativo.

Exemplo 9

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são as matrizes do exemplo 7, temos $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$, pois

$$\mathcal{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 13 & 17 & 19 \\ 10 & 17 & 24 \end{pmatrix}.$$

Apesar do produto de matrizes não ser comutativo, temos

$$\det(\mathcal{AB}) = \det(\mathcal{BA})\,,$$

pois, pela proposição a seguir,

$$\det(\mathcal{AB}) = \det\mathcal{A}\det\mathcal{B} = \det\mathcal{B}\det\mathcal{A} = \det\mathcal{BA}\,.$$

Proposição 2

O determinante da matriz produto $\mathcal{AB}$ é igual ao produto do determinante da matriz $\mathcal{A}$ pelo determinante da matriz $\mathcal{B}$. Ou seja, $\det\mathcal{AB} = \det\mathcal{A}\cdot\det\mathcal{B}$.

Demonstração

Por 15.4, o primeiro, o segundo e o terceiro vetores linha da matriz produto $\mathcal{AB}$ são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w_1} &= a_1\overrightarrow{u_1} + b_1\overrightarrow{u_2} + c_1\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{w_2} &= a_2\overrightarrow{u_1} + b_2\overrightarrow{u_2} + c_2\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{w_3} &= a_3\overrightarrow{u_1} + b_3\overrightarrow{u_2} + c_3\overrightarrow{u_3} \end{aligned}$$

onde $\overrightarrow{u_1} = (m_1, n_1, p_1), \overrightarrow{u_2} = (m_2, n_2, p_2)$ e $\overrightarrow{u_3} = (m_3, n_3, p_3)$ são os vetores linha da matriz $\mathcal{B}$.

Pelas propriedades (1) e (2) do determinante, temos:

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{AB}) &= \det(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) \\
&= \det(a_1\overrightarrow{u_1} + b_1\overrightarrow{u_2} + c_1\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) \\
&= a_1 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) + b_1 \det(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) \\
&\quad + c_1 \det(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3})\,.
\end{aligned} \tag{15.5}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) &= \det(\overrightarrow{u_1}, a_2\overrightarrow{u_1} + b_2\overrightarrow{u_2} + c_2\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{w_3}) \\
&= a_2 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w_3}) + b_2 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{w_3}) \\
&\quad + c_2 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{w_3}) \\
&= b_2 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{w_3}) + c_2 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{w_3})
\end{aligned} \tag{15.6}$$

pois, pela propriedade (5) do determinante, $\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w_3}) = 0$.

E, sendo $\overrightarrow{w_3} = a_3\overrightarrow{u_1} + b_3\overrightarrow{u_2} + c_3\overrightarrow{u_3}$, temos

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{w_3}) &= \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, a_3\overrightarrow{u_1} + b_3\overrightarrow{u_2} + c_3\overrightarrow{u_3}) \\
&= c_3 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \\
&= c_3 \det \mathcal{B}\,,
\end{aligned} \tag{15.7}$$

e

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{w_3}) &= \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, a_3\overrightarrow{u_1} + b_3\overrightarrow{u_2} + c_3\overrightarrow{u_3}) \\
&= b_3 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_2}) \\
&= -b_3 \det \mathcal{B}\,,
\end{aligned} \tag{15.8}$$

pois, pela propriedade (4) do determinante, $\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_2}) = -\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})\,.$

Logo, por 15.6, 15.7 e 15.8,

$$\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) = b_2c_3 \det \mathcal{B} - b_3c_2 \det \mathcal{B} = (b_2c_3 - b_3c_2) \det \mathcal{B}. \tag{15.9}$$

De modo análogo, podemos mostrar que

$$\det(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) = (a_3c_2 - a_2c_3) \det \mathcal{B}\,, \tag{15.10}$$

e

$$\det(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) = (a_2b_3 - a_3b_2)\det\mathcal{B}. \tag{15.11}$$

Concluímos, então, por 15.5, 15.9, 15.10 e 15.11, que

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{AB}) &= (a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2))\det\mathcal{B}\\ &= \det\mathcal{A}\det\mathcal{B}\,.\end{aligned}$$

Se $\mathcal{O}$ é a matriz nula, então $\mathcal{OA} = \mathcal{AO}$. Mas, o produto de duas matrizes não nulas não é necessariamente uma matriz não nula: $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$ e $\mathcal{B} \neq \mathcal{O}$ não implica que $\mathcal{AB} \neq \mathcal{O}$.

Exemplo 10

Sejam as matrizes não nulas $\mathcal{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$. É fácil verificar que $\mathcal{AB} = \mathcal{O}$.

Outra diferença entre o produto de matrizes e o produto de números reais é que dada uma matriz $\mathcal{A}$ não nula do tipo 3×3 pode não existir uma matriz $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = I$. Quando uma tal matriz $\mathcal{B}$ existir, dizemos que $\mathcal{A}$ é invertível e $\mathcal{B}$ é a matriz inversa de $\mathcal{A}$.

A matriz inversa de uma matriz $\mathcal{A}$, caso exista, é única. Com efeito, se $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = I$ e $\mathcal{AC} = \mathcal{CA} = I$, então

$$\mathcal{C} = \mathcal{C} \cdot I = \mathcal{C}(\mathcal{AB}) = (\mathcal{CA})\mathcal{B} = I \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B}\,.$$

Escrevemos, então, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

Proposição 3

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ matrizes 3×3 tais que $\mathcal{AB} = I$. Então, $\mathcal{BA} = I$, ou seja, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

Demonstração

Sendo $\mathcal{BA} = I$, temos, pela proposição 2, que $\det\mathcal{A}\det\mathcal{B} = \det(\mathcal{AB}) = \det I = 1$. Logo, $\det\mathcal{A} \neq 0$. Portanto, os vetores coluna da matriz $\mathcal{A}$, $\overrightarrow{v_1} = (a_1, a_2, a_3), \overrightarrow{v_2} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\overrightarrow{v_3} = (c_1, c_2, c_3)$, são, pela propriedade (10) do determinante, linearmente independentes.

Assim, para todo vetor $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2, d_3)$, existe um único vetor (x, y, z) tal que:

$$x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{d}\,.$$

Ou equivalentemente, o sistema de três equações lineares a três incógnitas,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{15.12}$$

possui uma e apenas uma solução (x, y, z) para quaisquer números reais d_1, d_2 e d_3.

Sejam $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{v_3} = (x_3, y_3, z_3)$ as soluções do sistema 15.12, para $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0), \overrightarrow{d} = \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$, respectivamente.

Então, se $\mathcal{C}$ é a matriz cujos vetores coluna são $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, obtemos que $\mathcal{AC} = I$.

Além disso, como $\mathcal{BA} = I$, temos

$$\mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot I = \mathcal{B}(\mathcal{AC}) = (\mathcal{BA})\mathcal{C} = I \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}\,.$$

Provamos que se $\mathcal{BA} = I$, então $\mathcal{AB} = I$, ou seja, $\mathcal{B}$ é a inversa da matriz $\mathcal{A}$.

Exemplo 11

Uma matriz $\mathcal{A}$ é ortogonal se $\mathcal{AA}^T = I$, ou seja, se sua inversa é a sua transposta. Pelo exemplo 8, $\mathcal{A}$ é ortogonal se, e somente se, a matriz de Gram dos vetores linha da matriz $\mathcal{A}$ é a matriz identidade. Assim, $\mathcal{A}$ é ortogonal se, e só se, seus vetores linha são ortonormais.

Como, pela proposição 3, $\mathcal{A}^T\mathcal{A} = I$, temos que $\mathcal{A}$ é uma matriz ortogonal se, e só se, seus vetores coluna são ortogonais.

Exemplo 12

Encontre a terceira coluna da matriz

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & x \\ 2/3 & -1/3 & y \\ 2/3 & 2/3 & z \end{pmatrix},$$

de modo que a matriz $\mathcal{A}$ seja ortogonal e $\det \mathcal{A} > 0$.

Solução. Sejam $\overrightarrow{v_1} = (1/3, 2/3, 2/3), \overrightarrow{v_2} = (-2/3, -1/3, 2/3)$ o primeiro e o segundo vetores coluna da matriz. Como $||\overrightarrow{v_1}|| = ||\overrightarrow{v_2}|| = 1$ e $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0$, a matriz $\mathcal{A}$ é ortogonal se, e só se, o terceiro vetor coluna $\overrightarrow{v_3} = (x, y, z)$ é unitário e ortogonal aos vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$.

Basta, então, tomar

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_3} &= (x,y,z) = \pm(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\\
&= \pm\left(\begin{vmatrix} 2/3 & 2/3\\ -1/3 & 2/3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3\\ -2/3 & -1/3\end{vmatrix}\right)\\
\iff \overrightarrow{v_3} &= (x,y,z) = \pm(6/9,-6/9,3/9) = \pm(2/3,-2/3,1/3)\,.
\end{aligned}$$

Sendo $\det\mathcal{A}>0$, devemos tomar $\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$, pois $\det(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}) = \langle\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\rangle>0$.

A identidade $\mathcal{AB}=I$ significa que os vetores coluna $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ e (x_3,y_3,z_3) da matriz $\mathcal{B}$ são as únicas soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1=1\\ a_2x_1+b_2y_1+c_3z_1=0\\ a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1=0\end{cases},\qquad \begin{cases} a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2=0\\ a_2x_2+b_2y_2+c_3z_2=1\\ a_3x_2+b_3y_2+c_3z_2=0\end{cases},$$

$$\begin{cases} a_1x_3+b_1y_3+c_1z_3=0\\ a_2x_3+b_2y_3+c_3z_3=0\\ a_3x_3+b_3y_3+c_3z_3=1\end{cases}.$$

Pela regra de Cramer, aplicada a cada um dos sistemas acima, segue que

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}{\det\mathcal{A}}, & y_1 &= \frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{c})}{\det\mathcal{A}}, & z_1 &= \frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_1})}{\det\mathcal{A}},\\
x_2 &= \frac{\det(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}{\det\mathcal{A}}, & y_2 &= \frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{c})}{\det\mathcal{A}}, & z_2 &= \frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_2})}{\det\mathcal{A}},\\
x_3 &= \frac{\det(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}{\det\mathcal{A}}, & y_3 &= \frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{c})}{\det\mathcal{A}}, & z_3 &= \frac{\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_3})}{\det\mathcal{A}},
\end{aligned}$$

onde $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ e $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$ são os vetores coluna da matriz $\mathcal{A}$.

Logo, como $\det(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\mathcal{A}_{11}$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{c})=-\mathcal{A}_{12}$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_1}) = \mathcal{A}_{13}$, $\det(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}) = -\mathcal{A}_{21}$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{c}) = \mathcal{A}_{22}$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_2}) = -\mathcal{A}_{23}$, $\det(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}) = \mathcal{A}_{31}$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{c}) = -\mathcal{A}_{32}$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_3}) = \mathcal{A}_{33}$, obtemos:

$$x_1 = \frac{(-1)^{1+1}\mathcal{A}_{11}}{\det \mathcal{A}}, \quad y_1 = \frac{(-1)^{1+2}\mathcal{A}_{12}}{\det \mathcal{A}}, \quad z_1 = \frac{(-1)^{1+3}\mathcal{A}_{13}}{\det \mathcal{A}},$$

$$x_2 = \frac{(-1)^{2+1}\mathcal{A}_{21}}{\det \mathcal{A}}, \quad y_2 = \frac{(-1)^{2+2}\mathcal{A}_{22}}{\det \mathcal{A}}, \quad z_2 = \frac{(-1)^{2+3}\mathcal{A}_{23}}{\det \mathcal{A}},$$

$$x_3 = \frac{(-1)^{3+1}\mathcal{A}_{31}}{\det \mathcal{A}}, \quad y_3 = \frac{(-1)^{3+2}\mathcal{A}_{32}}{\det \mathcal{A}}, \quad z_3 = \frac{(-1)^{3+3}\mathcal{A}_{33}}{\det \mathcal{A}},$$

onde $\mathcal{A}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, é o $ij-$ésimo menor da matriz $\mathcal{A}$.

Portanto, a matriz inversa da matriz $\mathcal{A}$ é

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\mathcal{A}_{11} & (-1)^{2+1}\mathcal{A}_{21} & (-1)^{3+1}\mathcal{A}_{31} \\ (-1)^{1+2}\mathcal{A}_{12} & (-1)^{2+2}\mathcal{A}_{22} & (-1)^{3+2}\mathcal{A}_{32} \\ (-1)^{1+3}\mathcal{A}_{13} & (-1)^{2+3}\mathcal{A}_{23} & (-1)^{3+3}\mathcal{A}_{33} \end{pmatrix}$$

Exemplo 13

Se a $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, então

$$\mathcal{A}_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad \mathcal{A}_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \mathcal{A}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\mathcal{A}_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad \mathcal{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \mathcal{A}_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\mathcal{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \mathcal{A}_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \mathcal{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

logo, o determinante da matriz $\mathcal{A}$ é $\det \mathcal{A} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \mathcal{A}_{11} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \mathcal{A}_{12} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \mathcal{A}_{13} = -7 + 6 + 5 = 4$, e a sua inversa é

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1\,. \end{pmatrix}$$

Pelos resultados obtidos ao longo deste capítulo, podemos verificar, com facilidade, que as seguintes afirmações a respeito de uma matriz $\mathcal{A}$, com vetores linha $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ e (a_3, b_3, c_3), são equivalentes:

1. Os vetores linha da matriz $\mathcal{A}$ são L.I..
2. O determinante da matriz $\mathcal{A}$ é diferente de zero.
3. Os vetores coluna da matriz $\mathcal{A}$ são L.I..
4. O sistema de três equações lineares,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3\,, \end{cases}$$

possui uma e apenas uma solução para cada $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$.

5. A matriz $\mathcal{A}$ é invertível.

Todas as definições e resultados deste capítulo, envolvendo matrizes e determinante, continuam válidos para matrizes $n \times n$, onde n é um número natural maior ou igual a 2.

15.4 Exercícios

1. Determine para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ o paralelepípedo $\mathcal{P}$ de vértices $A = (1, 1, 1), B = (2, 3, 4), C = (5, 2, -1)$ e $D = (1, 2, m)$ tem volume igual a 14.

2. Considere as matrizes 3×3 abaixo:
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calcule o determinante da:

   (a) matriz $\mathcal{A}$, desenvolvendo-o pela primeira linha e pela segunda coluna.

   (b) matriz $\mathcal{B}$, desenvolvendo-o pela segunda linha e pela terceira coluna.

   (c) matriz $\mathcal{C}$, desenvolvendo-o pela terceira linha e pela segunda coluna.

3. Verifique que os sistemas têm uma única solução e encontre a solução, usando a regra de Cramer:
$$\text{(a)} \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -2y + z = 0 \\ 4x + 3y + 2z = 7 \end{cases}.$$
Resolva também os sistemas colocando uma variável em função das outras e substituindo essa variável nas equações para obter um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas. Qual é o método mais prático ?

4. Obtenha a matriz $\mathcal{E} = (\mathcal{A} + 3\mathcal{B})(2\mathcal{C} - 5\mathcal{D})$, onde
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{D} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Prove que se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são matrizes 3×3, então $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC})$, $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$ e $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$.

6. Considere as matrizes:
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} x & y+z & 1 \\ y & x+z & 1 \\ z & x+y & 1 \end{pmatrix}.$$
Escreva uma linha das matrizes acima como combinação linear das outras linhas e também uma coluna como combinação das demais colunas. Conclua que $\det \mathcal{A} = 0$ e $\det \mathcal{B} = 0$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

7. Verifique quais matrizes do exercício 2 são invertíveis. Neste caso, encontre sua inversa.

8. Determine o vetor (x, y, z) de modo que a matriz $\mathcal{A}$ seja ortogonal e $\det \mathcal{A} < 0$, onde
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ x & y & z \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

9. Seja $\mathcal{P}$ o paralelogramo no plano com vértices nos pontos $A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$. Prove que
$$\text{Área } \mathcal{P} = \det \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Um sistema é homogêneo se é da forma:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$
Mostre que os vetores $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ e (a_3, b_3, c_3) são L.I. se, e somente se, $x = y = z = 0$ é a única solução do sistema.

11. Verifique que o determinante da matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$
é $(z-y)(z-x)(y-x)$. Conclua que as linhas da matriz são LI, se e somente se, x, y e z são três números reais distintos. Uma matriz da forma acima é chamada matriz de Vandermonde do tipo 3×3.

12. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas matrizes 3×3. Prove que $(\mathcal{A}\mathcal{B})^T = \mathcal{B}^T\mathcal{A}^T$ e conclua que se $\mathcal{A}$ é invertível, então $\mathcal{A}^T$ é invertível e $(\mathcal{A}^T)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^T$.

13. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas matrizes 3×3, sendo $\mathcal{B}$ invertível. Prove as afirmações abaixo:

(a) $\det(\lambda\mathcal{A}) = \lambda^3 \det \mathcal{A}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $\det \mathcal{B}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{B}}$.

(c) $(\mathcal{B}^{-1})^{-1} = \mathcal{B}$.

(d) $\det(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A}$.

(e) $\det(\mathcal{B}^T\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A}$, se $\mathcal{B}$ é ortogonal.

(f) $(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B})^n = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^n\mathcal{B}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(g) Se $\mathcal{B}$ é ortogonal, então $\det \mathcal{B} = \pm 1$.

(h) Se $\mathcal{A}^2 = \mathcal{O}$, então $\mathcal{A}$ não é invertível.

14. Seja $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ uma matriz do tipo 3×3. O traço da matriz $\mathcal{A}$ é o número: $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}) = a_1 + b_2 + c_3$.

Mostre que:

(a) $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{B}\mathcal{A})$.

(b) $\mathrm{Tr}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{A})$, se $\mathcal{C}$ é invertível.

(c) $\mathrm{Tr}(\mathcal{D}^T\mathcal{A}\mathcal{D}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{A})$, se $\mathcal{D}$ é ortogonal.

(d) $(\mathrm{Tr}\,\mathcal{A}^T)^2 \leq 3\,\mathrm{Tr}(\mathcal{A}\mathcal{A}^T)$ e a igualdade ocorre se, e só se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A} = \lambda I$.

15. Seja $\mathcal{A}$ uma matriz 3×3 cujos vetores linha $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Prove que

$$|\det \mathcal{A}| \leq ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||,$$

e a igualdade acontece se, e só se, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores dois a dois ortogonais. Interprete geometricamente este resultado.