16

A Reta no Espaço

Sumário

16.1 Introdução

Neste capítulo vamos caracterizar analiticamente os pontos de uma reta no espaço por meio de suas equações paramétricas e de sua equação simétrica. No espaço, uma equação na forma $ax + by + cz = d$, que generaliza a equação de uma reta $ax+by = c$ no plano, não representa uma reta e sim um plano, como veremos no próximo capítulo.

16.2 Equações paramétricas da reta no espaço

Sejam A e B dois pontos distintos no espaço e seja r a reta que os contém. Então,

$$P \in r \iff \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB}\,.$$

O ponto P pode ser visto como sendo a translação do ponto A pelo vetor $\overrightarrow{AP}$, isto é, $P = A + \overrightarrow{AP}$. Portanto, $P \in r$, se e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$P = A + t\overrightarrow{AB}\,.$$

Assim, a reta r é caracterizada pela equação

$$r : P = A + t\,\overrightarrow{AB}\,; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

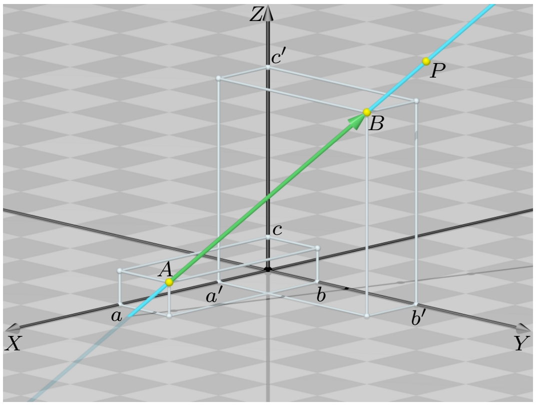

Figura 16.1: Reta r passando por A e B

chamada **equação paramétrica** da reta r com **parâmetro** t.

Sejam os pontos $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$ num sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

Escrevendo o ponto P em coordenadas, temos que:

$$\begin{aligned}
& P = (x, y, z) \in r \\
\iff\ & (x, y, z) = (a, b, c) + t(a' - a, b' - b, c' - c)\,, \quad t \in \mathbb{R} \\
\iff\ & (x, y, z) = (a + t(a' - a), b + t(b' - b), c + t(c' - c))\,, \quad t \in \mathbb{R} \\
\iff\ & x = a + t(a' - a)\,, \quad y = b + t(b' - b)\,, \quad z = c + t(c' - c)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Isto é, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, suas coordenadas x, y e z satisfazem as **equações paramétricas** da reta r que passa por $A = (a, b, c)$

e $B=(a',b',c')$:

$$r:\begin{cases} x = a + t\,(a'-a) \\ y = b + t\,(b'-b) \; ; \quad t\in\mathbb{R}\,. \\ z = c + t\,(c'-c) \end{cases}$$

Exemplo 1

Determine as equações paramétricas da reta r que contém os pontos $A=(1,0,0)$ e $B=(0,1,1)$.

Solução. O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$.

Logo,

$$r:\begin{cases} x = 1+t(-1) \\ y = 0+t(1) \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 0+t(1) \end{cases}, \text{ ou seja, } \quad r:\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

são as equações paramétricas da reta r.

Seja $P_t = A + t\,\overrightarrow{AB}$ um ponto da reta r que passa pelos pontos A e B. Temos

$$d(A,P_t) = |t|\,d(A,B) \quad \text{e} \quad d(B,P_t) = |1-t|\,d(A,B)\,.$$

Logo, P_t pertence ao segmento AB se, e só se,

$$d(A,B) = d(A,P_t) + d(P_t,B) = (|t|+|1-t|)d(A,B)\,,$$

ou seja, $|t|+|1-t|=1$. É fácil verificar que isto ocorre se, e só se, $t\in[0,1]$. Neste caso, P_t é o ponto do segmento orientado AB que o divide na razão $\dfrac{t}{1-t}$. Então, $AB=\{A+t\,\overrightarrow{AB}\;;\;t\in[0,1]\}$. Além disso, $\{A+t\,\overrightarrow{AB}\;;\;t\geq 0\}$ é o conjunto dos pontos da semirreta $\overrightharpoon{AB}$ e $\{A+t\,\overrightarrow{AB}\;;\;t\leq 0\}$ é o conjunto dos pontos da semirreta de origem A oposta à semirreta $\overrightharpoon{AB}$.

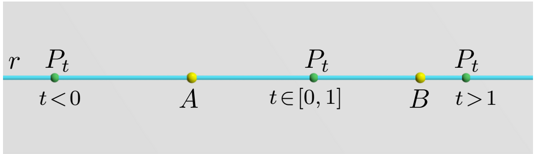

Figura 16.2: Posição do ponto P_t na reta r

Exemplo 2

Encontre o ponto do segmento orientado AB que o divide na razão $1/2$, onde $A=(1,0,2)$ e $B=(-1,2,1)$.

Solução. Temos $\overrightarrow{AB}=(-2,2,-1)$. Então, o ponto $P=A+t\,\overrightarrow{AB}$, $t\in[0,1]$, divide o segmento AB na razão $1/2$ se, e só se, $\dfrac{t}{1-t}=\dfrac{1}{2}$. Ou seja, $2t=1-t \iff 3t=1 \iff t=1/3\,.$ Assim,

$$P = (1,0,2) + \frac{1}{3}(-2,2,-1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

é o ponto do segmento AB tal que $d(P,B) = 2d(P,A)$.

Definição 1 Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é paralelo a uma reta r quando, para quaisquer dois pontos A e B de r, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Assim, um ponto P pertence à reta r que passa por A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$r : P = A + t\overrightarrow{v}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em termos de coordenadas, se $A = (a,b,c)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \,; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

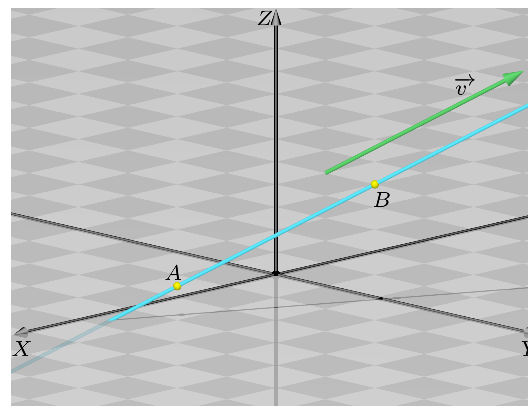

Figura 16.3: Vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo à reta r

Exemplo 3 Determine se os pontos $P = (1,1,1)$ e $Q = (0,-1,0)$ pertencem à reta r que passa pelo ponto $A = (1,1,-1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,2,-1)$.

Solução. As equações paramétricas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \;\; ; t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Logo, $P = (1,1,1) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1,1,1) = (1+t, 1+2t, -1-t),$$

isto é, se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz às três identidades

$$1 = 1 + t,\ 1 = 1 + 2t \text{ e } 1 = -1 - t,$$

Das duas primeiras, obtemos $t = 0$, e da terceira, $t = -2$, uma contradição. Portanto, $P \notin r$.

Analogamente, $Q = (0,-1,0) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0,-1,0) = (1+t, 1+2t, -1-t),$$

isto é, se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz, simultaneamente, às identidades

$$0 = 1 + t, \quad -1 = 1 + 2t \quad \text{e} \quad 0 = -1 - t,$$

Da primeira identidade, obtemos $t = -1$, valor que satisfaz às outras duas identidades. Portanto, $Q \in r$.

Sejam $r_1 = \{A + t\overrightarrow{v}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{B + s\overrightarrow{w}\,;\, s \in \mathbb{R}\}$ duas retas no espaço.

As retas r_1 e r_2 podem ser coplanares ou não. Se r_1 e r_2 não são coplanares, dizemos que ela são **reversas**. Neste caso, $r_1 \cap r_2 \neq 0$. Se elas são coplanares, r_1 e r_2 podem ser:

(1) coincidentes: $r_1 = r_2$;

(2) paralelas: $r_1 \cap r_2 = \varnothing$;

(3) concorrentes: $r_1 \cap r_2$ consiste de um único ponto.

Proposição 2

As retas r_1 e r_2 são:

(a) coincidentes se, e só se, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são múltiplos e $B \in r_1$ (ou $A \in r_2$) ;

(b) paralelas se, e só se, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são múltiplos e $B \notin r_1$ (ou $A \notin r_2$) ;

(c) concorrentes se, e só se, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são múltiplos e $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$;

(d) reversas se, e só se, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são múltiplos e $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

Demonstração

Suponhamos que os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não nulos são múltiplos, isto é, que existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{v}$.

Consideremos os pontos $A' \in r_1$ e $B' \in r_2$ tais que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{w}$. Então, $\overrightarrow{BB'} = \lambda\overrightarrow{AA'}$.

Suponhamos também que $B \in r_1$. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = t_0\,\overrightarrow{AA'}$. Se P é um ponto da reta r_2, então $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BB'}$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $P \in r_1$, pois

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = t_0\,\overrightarrow{AA'} + t\overrightarrow{BB'} = t_0\,\overrightarrow{AA'} + \lambda t\overrightarrow{AA'} = (t_0 + \lambda t)\overrightarrow{AA'}\,.$$

Assim, $r_1 \subset r_2$. Logo, $r_1 = r_2$.

Se $B \notin r_1$, então A, A' e B são pontos não colineares. Seja π o único plano que os contém e seja C o ponto tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BB'}$. Como $\overrightarrow{BB'} = \lambda\overrightarrow{AA'}$, segue que $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AA'}$. Portanto, o ponto C pertence à reta r_1 e é diferente de A, pois $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BB'} \neq 0$. Assim,

$$r_1 = \{A + t\,\overrightarrow{AC}\ ;\ t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad r_2 = \{B + s\,\overrightarrow{AC}\ ;\ s \in \mathbb{R}\}\,.$$

As retas r_1 e r_2 não se intersectam. De fato, se existesse P tal que $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP} = s\,\overrightarrow{AC}$, teríamos

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = (t-s)\overrightarrow{AC} \implies B \in r_1\,,$$

uma contradição.

As retas r_1 e r_2 são coplanares. Com efeito, um ponto P pertence ao plano π se, e só se, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}\,.$$

Se $P \in r_1$, então $\overrightarrow{AP} = t_0\,\overrightarrow{AC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + t_0\,\overrightarrow{AC}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Logo, $P \in \pi$.

Se $P \in r_2$, existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{BP} = t_1\overrightarrow{AC}$. Assim, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + t_1\overrightarrow{AC}$, e, portanto, $P \in \pi$. Como r_1 e r_2 são coplanares e não se intersectam, obtemos que r_1 e r_2 são retas paralelas.

Provaremos agora que se r_1 e r_2 são coincidentes ou paralelas, então $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são múltiplos.

Se $r_1 = r_2$, então $B, B' \in r_1$ e, portanto, existem $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AB} = t_0\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{AB'} = t_1\overrightarrow{v}$. Logo, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = -t_0\overrightarrow{v} + t_1\overrightarrow{v} = (t_1 - t_0)\overrightarrow{v}$, isto é, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos.

Se r_1 e r_2 são paralelas, existe um único plano π que as contém.

Seja C o único ponto do plano π tal que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA'}$. Suponhamos que os vetores $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BB'}$ não são múltiplos. Então, os pontos B, B' e C não são colineares e π é o único plano que os contém. Como $A \in \pi$, existem $t_0, s_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{BA} = t_0\overrightarrow{BC} + s_0\overrightarrow{BB'}\,.$$

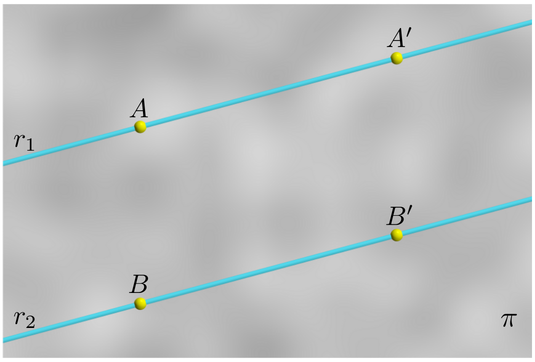

Figura 16.4: Retas r_1 e r_2 paralelas no plano π

Sejam o ponto $P = A + t_0\,\overrightarrow{BC} = A + t_0\,\overrightarrow{AA'}$ pertencente a r_1 e o ponto $Q = B + s_0\,\overrightarrow{BB'}$ pertencente a r_2. Sendo $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + s_0\,\overrightarrow{BB'} + t_0\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{O}$, obtemos que $P = Q$. Logo, $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$, uma contradição. Provamos, assim, que se r_1 e r_2 são paralelas, então $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são múltiplos.

Se r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas, então $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são múlitplos.

De fato, se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ fossem múltiplos, teríamos, pelo provado acima, que r_1 e r_2 seriam coincidentes ou paralelas.

E reciprocamente, se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são múltiplos, então r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas, pois, caso contrário, r_1 e r_2 seriam coincidentes ou paralelas e pelo, provado acima, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ seriam múltiplos.

Exemplo 4

Considere as retas $r_1 = \{A + t\,\overrightarrow{AB}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{C + s\,\overrightarrow{CD}\ ;\ s \in \mathbb{R}\}$, onde $A = (2, 3, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (4, 2, 1)$ e $D = (6, 4, -3)$. Verifique se as retas são coincidentes, paralelas, concorrentes ou reversas.

Solução. Temos $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 2)$ e $\overrightarrow{CD} = (2, 2, -4)$. Como $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são múltiplos. Logo, pela proposição 2, r_1 e r_2 são coincidentes ou paralelas. Vamos verificar agora se o ponto $C = (4, 2, 1)$, pertencente a r_2, pertence ou não à reta r_1. Suponhamos que $C \in r_1$. Então, existe $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned} & (4,2,1) = (2,3,1) + t(-1,-1,2) \\ \iff\ & 4 = 2 - t, 2 = 3 - t, 1 = 1 + 2t \\ \iff\ & t = -2, t = 1 \text{ e } t = 0\,, \end{aligned}$$

uma contradição. Logo, $C \notin r_1$ e, portanto, r_1 e r_2 são paralelas.

Exemplo 5

Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$ e seja $\mathcal{S}$ a superfície definida pela equação $\mathcal{S} : z = x^2 + y^2$. Determine os pontos de r pertencentes a $\mathcal{S}$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$, a equação paramétrica da reta r é:

$$r : P = A + t\,\overrightarrow{AB}\ ;\ t \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}\,.$$

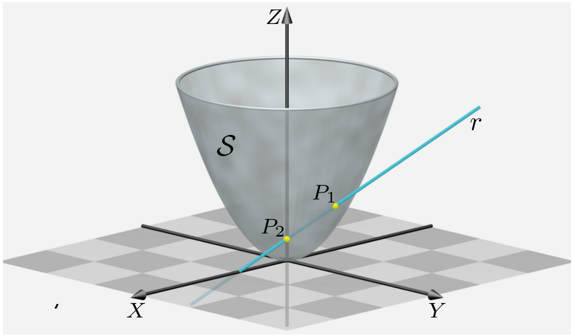

Figura 16.5: Interseção $r \cap \mathcal{S} = \{P_1, P_2\}$

Então, $P \in r \cap \mathcal{S}$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem às equações paramétricas de r e a equação de $\mathcal{S}$ simultaneamente.

Como
$P \in r \Longleftrightarrow P = (1-t, t, t)$,
para algum $t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} P = (1-t,t,t) \in \mathcal{S} &\Longleftrightarrow t = (1-t)^2 + t^2 \\ &\Longleftrightarrow t = 1 - 2t + t^2 + t^2 \\ &\Longleftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow t = \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{9-8}\right) \\ &\Longleftrightarrow t = 1 \ \text{ ou } \ t = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Temos, portanto, duas soluções: $P_1 = (0,1,1)$ e $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Logo, $r \cap \mathcal{S} = \{P_1, P_2\}$.

16.3 Equação simétrica da reta no espaço

Consideremos as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (a,b,c)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,. \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

Quando as três coordenadas do vetor direção $\overrightarrow{v}$ são diferentes de zero, podemos colocar em evidência o parâmetro t em cada uma das equações:

$$t = \frac{x-a}{\alpha}\,, \qquad t = \frac{y-b}{\beta} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{z-c}{\gamma}\,.$$

Portanto, $P = (x,y,z) \in r$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem:

$$r : \frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}\,.$$

Esta expressão é chamada **equação simétrica** da reta r.

Quando a reta r é dada por dois de seus pontos $A = (a,b,c)$ e $B = (a',b',c')$, o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (a'-a, b'-b, c'-c)$, paralelo a r, tem suas três coordenadas não nulas se, e somente se, os pontos A e B não pertencem a um plano paralelo a um dos planos coordenados (isto é, $a' \neq a$, $b' \neq b$ e $c' \neq c$).

Neste caso, podemos expressar a reta r por meio de sua equação simétrica:

$$r : \frac{x-a}{a'-a} = \frac{y-b}{b'-b} = \frac{z-c}{c'-c}\,.$$

Atenção!

Se a reta r é paralela a algum dos planos coordenados, então ela não pode ser representada por uma equação simétrica.

Exemplo 6

Determine, caso seja possível, a forma simétrica da equação da reta r que passa pelos pontos dados.

(a) $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 4, 4)$.

(b) $A = (1, 0, 1)$ e $B = (1, 2, 3)$.

Solução.

(a) Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 1)$ tem todas suas coordenadas diferentes de zero, a reta r pode ser expressa pela equação simétrica:

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}\,,$$

ou seja,

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = z - 3\,.$$

(b) Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 2)$ é paralelo ao plano π_{YZ}, pois tem a primeira coordenada igual a zero, a reta r não pode ser representada por uma equação simétrica.

As equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}, \qquad \text{ou seja,} \qquad r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Neste exemplo, observe que o vetor $\overrightarrow{v} = (0, 1, 1) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ é também paralelo à reta r. Portanto,

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} ;\quad t \in \mathbb{R}\,.$$

são também equações paramétricas para a mesma reta r.

Exemplo 7

Considere a reta r_1 que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$ e a reta

$$r_2 : \frac{3x-6}{9} = \frac{2y+4}{2} = \frac{-z+3}{2} .$$

Verifique se as retas r_1 e r_2 são coincidentes, paralelas, concorrentes ou reversas.

Solução. A reta r_2 pode ser escrita na forma simétrica

$$r_2 : \frac{x-2}{3} = y+2 = \frac{z-3}{-2} .$$

Logo, $B = (2, -2, 3)$ é um ponto da reta r_2 e $\overrightarrow{v} = (3, 1, -2)$ é um vetor paralelo a r_2.

Como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos, pois

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-5, 1, -7) \neq (0, 0, 0) . \end{aligned}$$

r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas.

Seja $P = (1, 0, 1) + t(2, 3, -1) = (1 + 2t, 3t, 1 - t)$ um ponto de r_1. Então, $P \in r_2$ se, e só se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1+2t-2}{3} = 3t+2 = \frac{1-t-3}{-2} .$$

Pela identidade $\frac{2t-1}{3} = 3t+2$, obtemos $t = -1$. Mas, como $3t+2 = -1 \neq \frac{1}{2} = \frac{1-t-3}{-2}$, segue que não existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $P = (1 + 2t, 3t, 1 - t) \in r_2$.

Logo, r_1 e r_2 são retas reversas.

16.4 Exercícios

1. Determine equações paramétricas e simétrica, caso exista, da reta r que:

   (a) passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$.

   (b) passa pelo ponto $C = (2, 2, 4)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, 2, 0)$.

   (c) passa pelos pontos $A = (2, 4, 6)$ e $B = (3, 4, 5)$.

   (d) passa pelo ponto $C = (3, -1, 4)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 3)$.

2. Encontre o ponto de interseção da reta r com o plano π, onde r é a reta que passa pelos pontos $A = (3, 2, 1)$ e $B = (4, 1, 2)$ e π é o plano vertical

que contém os pontos $C=(3,4,5)$ e $D=(2,2,6)$.

3. Considere as retas $r_1=\{A+t\overrightarrow{AB}\,;\,t\in\mathbb{R}\}$, $r_2=\{C+t\overrightarrow{CD}\,;\,t\in\mathbb{R}\}$, $r_3=\{E+t\overrightarrow{EF}\,;\,t\in\mathbb{R}\}$ e $r_4=\{G+t\overrightarrow{GH}\,;\,t\in\mathbb{R}\}$, onde $A=(1,1,1), B=(3,4,2), C=(3,4,5), D=(-7,-10,-7), E=(1,1,0)$ e $F=(-4,-6,-6)$.

   Verifique se as retas r_i e r_j, $i\neq j$, $i,j=1,2,3,4$, são coincidentes, paralelas, concorrentes ou reversas.

4. Seja P um ponto do segmento AB tal que $d(P,A)=3d(P,B)$. Obtenha o parâmetro t de modo que $P=A+t\overrightarrow{AB}$. Se $A=(1,3,1)$ e $B=(6,8,2)$, encontre o ponto P.

5. Sejam A,B e C três pontos não colineares e um ponto P pertencente ao segmento AM tal que $d(A,P)=4d(P,M)$, onde M é o ponto médio do segmento BC. Encontre $t,s\in\mathbb{R}$ tais que
$$P=A+t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}\,.$$
   Determine o ponto P quando $A=(1,0,1)$, $B=(2,3,4)$ e $C=(1,4,2)$.

6. Considere as retas $\ell=\{A+t\overrightarrow{AB}\,;\,t\in\mathbb{R}\}$ e $r=\{C+t\overrightarrow{CD}\,;\,t\in\mathbb{R}\}$, onde $A=(5,1,2), B=(9,0,1), C=(4,1,3)$ e $D=(-2,2,6)$. Mostre que as retas se intersectam em apenas um ponto P. Esse ponto P pertence ao segmento AB e\ou ao segmento CD?

7. Verifique quais pares de retas r e s são coincidentes e quais são paralelas, onde:

   (a) $r:\{(t,t+1,2t)\,;\,t\in\mathbb{R}\}$ e $s:\{(-t,-t+2,-2t+1)\,;\,t\in\mathbb{R}\}$.

   (b) $r:\{(4t+4,2t+3,-2t)\,;\,t\in\mathbb{R}\}$ e $s:\dfrac{x}{2}=y-1=-z+2$.

   (c) $r:\{(6t-8,2t+4,-2t+3)\,;\,t\in\mathbb{R}\}$ e $s:\dfrac{3x-3}{9}=y-1=-z$.

8. Obtenha a equação paramétrica da reta s que passa pelo ponto $P=(5,0,-3)$ e é paralela à reta $r:\dfrac{x+6}{3}=\dfrac{-y-2}{8}=\dfrac{4-3z}{9}$.

9. Encontre a equação simétrica da reta r que contém a mediana AM do triângulo ABC, onde $A=(-2,3,1), B=(1,6,3)$ e $C=(-1,5,1)$.

10. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (2, 1, 3)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2, 4)$. Quais dos pontos $P = (1, -1, -1)$ e $Q = (4, 5, 8)$ pertencem à reta r ?

11. Considere os pontos $A = (3, 1, 4)$, $B = (6, -1, 2)$e $C = (0, 3, 2)$. Determine o ponto de interseção da reta r que passa pelos pontos A e B com o plano π paralelo ao plano π_{XZ} que contém o ponto C.

12. Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos de uma reta r. Prove que

$$r = \{A + t\overrightarrow{AB}\ ;\ t \in \mathbb{R}\} = \{C + s\overrightarrow{CD}\ ,\ s \in \mathbb{R}\}.$$

13. Um conjunto $\mathcal{C}$ é convexo quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de $\mathcal{C}$ está contido em $\mathcal{C}$. Mostre que a bola aberta $B(A, r)$ e a bola fechada $B[A, r]$ de centro A e raio r são conjuntos convexos.

14. Sejam r_1 e r_2 duas retas no espaço que se cortam no ponto P. Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos, diferentes de P, tais que $A, B \in r_1$ e $C, D \in r_2$. Suponha que A pertence ao segmento PB e C pertence ao segmento PD. Mostre que o vetor $\overrightarrow{AC}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{BD}$ se, e só se, $\dfrac{||\overrightarrow{PA}||}{||\overrightarrow{PB}||} = \dfrac{||\overrightarrow{PC}||}{||\overrightarrow{PD}||}$.

15. Sejam $r_1 = \{A + t\overrightarrow{v}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{B + t\overrightarrow{w}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ duas retas no espaço. Prove que:

(a) $r = s$ se, e só se, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v}$ são mútiplos de $\overrightarrow{w}$.

(b) $r \parallel s$ se, e só se, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são mútiplos , mas $\overrightarrow{AB}$ não é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

(c) r e s são concorrentes se, e só se, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são mútiplos e $\overrightarrow{AB}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

(d) r e s são reversas se, e só se, $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{AB}$ são L.I..