17

O Plano no Espaço

Sumário

17.1 Introdução 2
17.2 Equações paramétricas do plano no espaço 2
17.3 Equação cartesiana do plano 15
17.4 Exercícios 21

17.1 Introdução

Um dos axiomas da Geometria Euclidiana Espacial é que "dados três pontos não colineares, existe um e apenas um plano que os contém". Neste capítulo vamos caracterizar analiticamente um plano por meio de suas equações paramétricas e de sua equação cartesiana.

17.2 Equações paramétricas do plano no espaço

Sejam A, B e C três pontos não colineares no espaço e seja π o plano que os contém. Então, pelo Teorema 20 do Capítulo 13,

$$P \in \pi \iff \text{ existem } s, t \in \mathbb{R} \text{ tais que } \overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}\,.$$

Isto é, $P \in \pi$ se, e somente se, satisfaz à seguinte **equação paramétrica** do plano π:

$$P = A + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}\ ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

OBSERVAÇÃO 1

A equação paramétrica de uma reta é determinada a partir da variação de um parâmetro ($t \in \mathbb{R}$), enquanto a equação paramétrica de um plano é caracterizada pela variação de dois parâmetros ($s, t \in \mathbb{R}$). Por isso dizemos que a reta é **unidimensional** e o plano é **bidimensional**.

Consideremos os pontos $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$ e $C = (a'', b'', c'')$ num sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

Substituindo as coordenadas dos pontos $P = (x, y, z)$ e $A = (a, b, c)$ e dos vetores $\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)$ e $\overrightarrow{AC} = (a'' - a, b'' - b, c'' - c)$ na equação paramétrica do plano π, obtemos que:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + s(a' - a, b' - b, c' - c) + t(a'' - a, b'' - b, c'' - c)\ ;\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, as **equações paramétricas** do plano π são:

$$\pi : \begin{cases} x &= a &+ & s\,(a' - a) &+& t\,(a'' - a) \\ y &= b &+ & s\,(b' - b) &+& t\,(b'' - b) \\ z &= c &+ & s\,(c' - c) &+& t\,(c'' - c) \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}\ .$$

Exemplo 1

Determine as equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Solução. Temos $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 0s + (-1)t \\ y = 0 + 1s + 0t \\ z = 0 + 0s + 1t \end{cases} ; s, t \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \quad \pi : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

são as equações paramétricas do plano π.

Exemplo 2

Obtenha, caso exista, o ponto onde o plano π, que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 1)$ e $C = (3, 2, 0)$, intersecta o eixo$-OZ$.

Solução. Determinemos, primeiro, as equações paramétricas do plano π.

Como $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -3)$, as equações paramétricas do plano π são

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s \\ z = 3 - 2s - 3t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

O ponto da interseção de π com o eixo$-OZ$ deve ser um ponto com a primeira e a segunda coordenadas iguais a zero. Isto é,

$$P = (x, y, z) \in \pi \cap \text{eixo} - OZ \iff \begin{cases} x = 1 + s + 2t = 0 \\ y = 2 + s = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema, vemos que $s = -2$. Substituindo este valor na primeira equação, obtemos $t = \dfrac{-1-(-2)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Portanto, $P_0 = \left(0, 0, 3 - 2(-2) - 3\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(0, 0, \frac{11}{2}\right)$ é o ponto de interseção de π com o eixo-OZ.

Definição 2

Dizemos que o vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é **paralelo** ao plano π quando, para qualquer ponto $P \in \pi$, a reta r que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ está contida no plano π.

Observação 3

Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é um vetor paralelo ao plano π, então o vetor $\lambda\overrightarrow{v}$ é paralelo a π para todo $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

A proposição abaixo nos dá maneiras equivalentes de verificar se um vetor é ou não paralelo a um plano.

PROPOSIÇÃO 4

Seja π o plano que passa pelos pontos não colineares A, B e C e $\overrightarrow{v}$ um vetor não nulo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\overrightarrow{v}$ é paralelo ao plano π.

(b) Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ e $P \in \pi$, então $Q \in \pi$.

(c) $\overrightarrow{v}$ é combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

DEMONSTRAÇÃO

(a) $\Longrightarrow$ (b) Se $\overrightarrow{v}$ é paralelo a π e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$, com $P \in \pi$, então $Q \in \pi$, pois o ponto Q pertence à reta que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Seja $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$, onde P e Q são dois pontos distintos de π. Então, existem $s_1, t_1 \in \mathbb{R}$ e $s_2, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = s_1\,\overrightarrow{AB} + t_1\,\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AP} = s_2\,\overrightarrow{AB} + t_2\,\overrightarrow{AC}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -s_1\,\overrightarrow{AB} - t_1\,\overrightarrow{AC} + s_2\,\overrightarrow{AB} + t_2\,\overrightarrow{AC} \\ \Longleftrightarrow\quad &\overrightarrow{v} = (s_2 - s_1)\,\overrightarrow{AB} + (t_2 - t_1)\,\overrightarrow{AC}\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\overrightarrow{v}$ é uma combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Considere o vetor $\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ e P um ponto de π. Sejam $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AP} = s_0\,\overrightarrow{AB} + t_0\,\overrightarrow{AC}$ e $r = \{P + t\overrightarrow{v}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$.

Seja $Q = P + t\,\overrightarrow{v}$ um ponto da reta r. Então, $Q \in \pi$, pois

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP} + t\,\overrightarrow{v} = s_0\,\overrightarrow{AB} + t_0\,\overrightarrow{AC} + t(\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}) \\ \Longrightarrow\quad &\overrightarrow{AQ} = (s_0 + \lambda t)\,\overrightarrow{AB} + (t_0 + \mu t)\,\overrightarrow{AC}\,. \end{aligned}$$

Em particular, os vetores não colineares $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos ao plano π. Com isso, vemos que um plano π é determinado se conhecermos um ponto pertencente a π e duas direções não colineares paralelas a π.

Assim, a **equação paramétrica** do plano π que passa por A e é paralelo aos vetores não colineares $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é

$$\pi : P = A + s\,\overrightarrow{u} + t\,\overrightarrow{v}\,; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Escrevendo em coordenadas, $A = (a, b, c)$, $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $P = (x, y, z)$, obtemos as seguintes equações paramétricas de π:

$$\pi : \begin{cases} x = a + \alpha s + \alpha' t \\ y = b + \beta s + \beta' t \\ z = c + \gamma s + \gamma' t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3

Encontre as equações paramétricas do plano π que passa pelos pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (1,0,1)$ e é paralelo ao vetor $\overrightarrow{DE}$, onde $D = (2,0,1)$ e $E = (0,0,2)$. Verifique se os pontos D e E pertencem ao plano π.

Solução. O vetor $\overrightarrow{DE} = (-2,0,1)$ é paralelo ao plano π, por hipótese, e o vetor $\overrightarrow{AB} = (0,-1,0)$ também é paralelo ao plano π, pois $A, B \in \pi$.

Como $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DE} = (-1,0,-2) \neq (0,0,0)$, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DE}$ não são colineares. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - s \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas do plano π.

Suponhamos que $D = (2,0,1) \in \pi$. Então, existem $s, t, \in \mathbb{R}$ tais que $1 - 2t = 2, 1 - s = 0$ e $1 + t = 1$. Da primeira equação, obtemos $t = -1/2$, e da terceira, $t = 0$, uma contradição. Logo, $D \notin \pi$, e portanto, $E \notin \pi$, pois $\overrightarrow{DE}$ é paralelo ao plano π.

Consideremos a reta $r = \{A + t\overrightarrow{u}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{u}$, e o plano $\pi = \{B + \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}\,;\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ que passa pelo ponto B e é paralelo aos vetores não colineares $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

Sabemos, da Geometria Euclidiana Espacial, que há três possibilidades para a posição relativa entre a reta r e o plano π: $r \subset \pi$, $r \cap \pi = \varnothing$ e $r \cap \pi$ consiste de um único ponto.

Vamos caracterizar analiticamente estas três possibilidades na proposição abaixo.

Proposição 5

Sejam a reta r e o plano π dados acima. Então:

(a) $r \subset \pi$ se, e só se, $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e $A \in \pi$.

(b) $r \cap \pi = \varnothing$ se, e só se, $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e $A \notin \pi$.

(c) $r \cap \pi = \{P\}$ se, e só se, $\overrightarrow{u}$ não é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, isto é, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI.

Demonstração

Sejam C, D e E pontos tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BE}$. Como $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelos ao plano π e $B \in \pi$, segue que $C, D \in \pi$.

Suponhamos que $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Então, existem $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BE} = \lambda_0 \overrightarrow{BC} + \mu_0 \overrightarrow{BD} \tag{17.1}$$

Logo, pelo Teorema 20 do Capítulo 13, $E \in \pi$.

Se, além disso, $A \in \pi$, existem $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{BA} = \lambda_1 \overrightarrow{BC} + \mu_1 \overrightarrow{BD} \tag{17.2}$$

Seja $P = A + t\,\overrightarrow{u} = A + t\,\overrightarrow{BE}$ um ponto de r. Então, como $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{BE}$, temos, por 17.1 e 17.2:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \lambda_1 \overrightarrow{BC} + \mu_1 \overrightarrow{BD} + t(\lambda_0 \overrightarrow{BC} + \mu_0 \overrightarrow{BD}) \\ \Longrightarrow\ & \overrightarrow{BP} = (\lambda_1 + t\lambda_0)\overrightarrow{BC} + (\mu_1 + t\mu_0)\overrightarrow{BD}\,. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 20 do Capítulo 13, $P \in \pi$ (Figura 17.1).

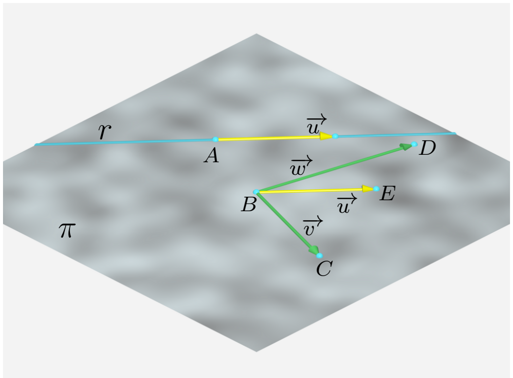

Figura 17.1: $r \subset \pi$

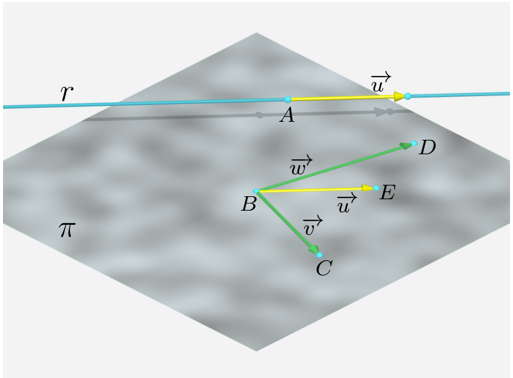

Figura 17.2: $r \parallel \pi$

Suponhamos agora que $A \notin \pi$. Seja F um ponto qualquer de r. Então, pela Proposição 2 do Capítulo 16, $r = \{F + t\,\overrightarrow{u}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$. Logo, se F pertencesse a π, teríamos, pelo provado acima, que $r \subset \pi$, uma contradição, pois $A \notin \pi$.

Provamos, assim, que se $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, então $r \subset \pi$, caso $A \in \pi$, e $r \cap \pi = \varnothing$, caso $A \notin \pi$ (Figura 17.2).

Finalmente, suponhamos que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI. Então, existem $t_0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{BA} = t_0\,\overrightarrow{BE} + \lambda\,\overrightarrow{BC} + \mu\,\overrightarrow{BD}\,. \tag{17.3}$$

Seja $P = A - t_0\,\overrightarrow{BE}$. Então, $P \in r$ e

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = t_0\,\overrightarrow{BE} + \lambda\,\overrightarrow{BC} + \mu\,\overrightarrow{BD} - t_0\,\overrightarrow{BE} \\ \Longrightarrow\ & \overrightarrow{BP} = \lambda\,\overrightarrow{BC} + \mu\,\overrightarrow{BD} \quad \Longrightarrow \quad P \in \pi\,. \end{aligned}$$

Ou seja, $P \in \pi \cap r$. Seja $Q = A + t\,\overrightarrow{BE}$ um ponto de r. Se $Q \in \pi$, existem $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{BQ} = \delta\,\overrightarrow{BC} + \gamma\,\overrightarrow{BD}\,.$$

Logo, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QA} = -t\,\overrightarrow{BE} + \delta\,\overrightarrow{BC} + \gamma\,\overrightarrow{BD}$. Por 17.3, obtemos que $-t = t_0$, $\delta = \lambda$ e $\gamma = \mu$, pois todo vetor se escreve de forma única como combinação linear de três vetores LI. Ou seja, $Q = A - t_0\,\overrightarrow{BE} = P$.

Provamos, assim, que se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI, então $r \cap \pi$ consiste de um único ponto (Figura 17.3).

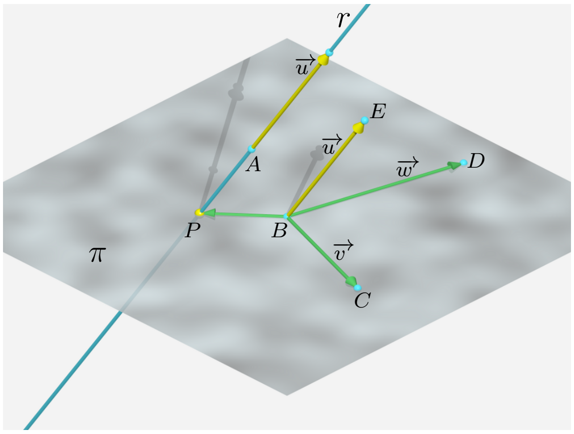

Figura 17.3: $r \cap \pi = \{P\}$

Reciprocamente, se $r \subset \pi$, então $A \in \pi$ e $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, pois, caso contrário, pelo provado acima, $r \cap \pi = \varnothing$, se $A \notin \pi$ e $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, ou $r \cap \pi$ consiste de um único ponto, se $\overrightarrow{u}$ não é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. De modo análogo, podemos mostrar que se $r \cap \pi = \varnothing$, então $A \notin \pi$ e $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, e se $r \cap \pi$ consiste de um único ponto, então $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI.

Observação 6

Em particular, se uma reta r é paralela a um plano π ou está contida num plano π, então todo vetor paralelo a r é também paralelo a π.

Exemplo 4

Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (1, 2, 5)$ e $B = (3, 1, 0)$ e π o plano que contém o ponto $C = (3, -2, 5)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (0, -3, -7)$. Verifique se $r \subset \pi$, $r \cap \pi = \varnothing$ ou $r \cap \pi$ consiste de um único ponto.

Solução. O vetor $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -5)$ é paralelo à reta r. Vamos verificar se $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, isto é, se existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} & (2, -1, -5) = t(1, 1, 1) + s(0, -3, -7) \\ \iff\ & 2 = t,\ -1 = t - 3s \ \text{ e } \ -5 = t - 7s\,. \end{aligned}$$

Como $t = 2$ e $s = 1$ satisfazem às três equações, segue que $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ e, portanto, $\overrightarrow{u}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

Além disso, $A \in \pi$ se, e só se, existem $t, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{CA} = t\,\overrightarrow{v} + s\,\overrightarrow{w} \iff (-2,4,0) = t(1,1,1) + s(0,-3,-7) \\ \iff \; & -2 = t,\ 4 = t - 3s \text{ e } 0 = t - 7s\,. \end{aligned}$$

Pelas duas primeiras equações, $t = -2$ e $s = (t-4)/3 = -2$. Mas, como $t - 7s = -2 + 14 = 12 \neq 0$, obtemos que $A \notin \pi$. Logo, pela proposição 5, $r \cap \pi = \varnothing$, ou seja, r é uma reta paralela ao plano π.

Exemplo 5

Considere a reta r que passa pelo ponto $A = (1,1,1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$ e o plano π que passa pelo ponto $P_0 = (0,2,1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v} = (1,1,2)$ e $\overrightarrow{w} = (3,1,2)$. Decida se $r \subset \pi$, $r \cap \pi = \varnothing$ ou $r \cap \pi$ consiste de um único ponto.

Solução. Como $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (0,4,-2)$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \rangle = 4 - 6 = -2 \neq 0$, segue que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI. Logo, pela Proposição 5, $r \cap \pi$ consiste de um único ponto P.

Sejam $t, s, k \in \mathbb{R}$ tais que $P = (1,1,1) + t\,(2,1,3)$ e $P = (0,2,1) + s\,(1,1,2) + k\,(3,1,2)$. Logo,

$$\begin{aligned} & (1,1,1) + t\,(2,1,3) = (0,2,1) + s\,(1,1,2) + k\,(3,1,2) \\ \iff \; & -t(2,1,3) + s(1,1,2) + k(3,1,2) = (1,-1,0) \\ \iff \; & \begin{cases} -2t + s + 3k = 1 \\ -t + s + k = -1 \\ -3t + 2s + 2k = 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $t = -2$, $s = -3$ e $k = 0$. Portanto, $P = (1,1,1) - 2(2,1,3) = (-3,-1,-5)$ é o ponto de interseção da reta r com o plano π.

Sabemos, da Geometria Euclidiana Espacial, que dois planos π e π' podem ser:

- coincidentes: $\pi = \pi'$;
- paralelos: $\pi \cap \pi' = \varnothing$;
- concorrentes: $\pi \cap \pi'$ é uma reta.

A proposição abaixo caracteriza analiticamente estas três possibilidades.

Proposição 7

Sejam $\pi = \{A + t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}\,;\, t, s \in \mathbb{R}\}$ e $\pi' = \{A' + t\,\overrightarrow{u'} + s\,\overrightarrow{v'}\,;\, t, s \in \mathbb{R}\}$ dois planos no espaço. Então,

(a) $\pi = \pi'$ se, e só se, $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são combinações lineares de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e $A' \in \pi$.

(b) $\pi \cap \pi' = \varnothing$ se, e só se, $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são combinações lineares de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e $A' \notin \pi$.

(c) $\pi \cap \pi'$ é uma reta se, e só se, $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI ou $\overrightarrow{v'}$, $\overrightarrow{u}$ e , $\overrightarrow{v}$ são LI.

Demonstração

Suponhamos que $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são combinações lineares de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Então, existem λ_1, μ_1, λ_2, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u'} &= \lambda_1 \overrightarrow{u} + \mu_1 \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{v'} &= \lambda_2 \overrightarrow{u} + \mu_2 \overrightarrow{v}\,. \end{aligned} \tag{17.4}$$

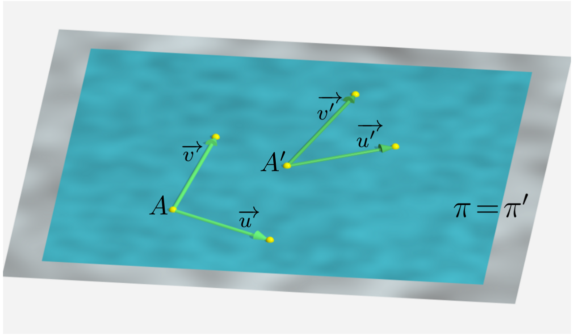

Figura 17.4: **(a)** $\pi = \pi'$

Se $A' \in \pi$, existem $t_0, s_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AA'} = t_0\,\overrightarrow{u} + s_0\,\overrightarrow{v}$. Seja $P = A' + t\,\overrightarrow{u'} + s\,\overrightarrow{v'}$ um ponto em π'. Logo,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'P} = t_0\,\overrightarrow{u} + s_0\,\overrightarrow{v} + t\,\overrightarrow{u'} + s\,\overrightarrow{v'} \\ \iff\; & \overrightarrow{AP} = t_0\,\overrightarrow{u} + s_0\,\overrightarrow{v} + t(\lambda_1\overrightarrow{u} + \mu_1\overrightarrow{v}) + s(\lambda_2\overrightarrow{u} + \mu_2\overrightarrow{v}) \\ \iff\; & \overrightarrow{AP} = (t_0 + t\lambda_1 + s\lambda_2)\overrightarrow{u} + (s_0 + t\mu_1 + s\mu_2)\overrightarrow{v}\,. \end{aligned}$$

Então, $P \in \pi$. Provamos, assim, que $\pi' \subset \pi$. Portanto, $\pi = \pi'$ (Figura 17.4).

Suponhamos agora que $A' \notin \pi$. Queremos provar que $\pi \cap \pi' = \varnothing$. Suponhamos que exista um ponto B que pertença aos planos π e π'. Pelo provado acima, teríamos

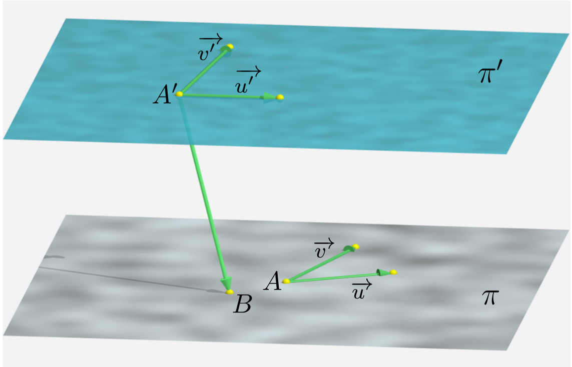

Figura 17.5: **(b)** $\pi \cap \pi' = \varnothing$

$$\pi = \{B + t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}\,;\, t, s \in \mathbb{R}\} \text{ e } \pi' = \{B + t\,\overrightarrow{u'} + s\,\overrightarrow{v'}\,;\, t, s \in \mathbb{R}\}\,.$$

Como $A' \in \pi'$, existem $s_1, t_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{A'B} = t_1\overrightarrow{u'} + s_1\overrightarrow{v'}\,.$$

Mas, por 17.4, teríamos

$$\overrightarrow{A'B} = (t_1\lambda_1 + s_1\lambda_2)\overrightarrow{u} + (t_1\mu_1 + s_1\mu_2)\overrightarrow{v} \Longrightarrow A' \in \pi\,,$$

uma contradição. Logo, $\pi \cap \pi' = \varnothing$, isto é, π e π' são planos paralelos.

Finalmente, suponhamos que $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores LI. Então, existem $\lambda_0, \mu_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{v'} = \lambda_0\overrightarrow{u'} + \mu_0\overrightarrow{u} + \delta_0\,\overrightarrow{v}\,.$$

Consideremos o vetor $\overrightarrow{w} = -\lambda_0\,\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{v'} = \mu_0\,\overrightarrow{u} + \delta_0\,\overrightarrow{v}$. Como $\overrightarrow{w}$ é combinação linear de $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ e é combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, segue, pela Proposição 4, que $\overrightarrow{w}$ é paralelo aos planos π e π'. Observe também que $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$.

Sejam $k, t, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{u'} + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}\,.$$

Consideremos o ponto $P = A' - k\overrightarrow{u'}$. Então, pela Proposição 4, $P \in \pi'$. Sendo

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'P} = k\overrightarrow{u'} + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} - k\overrightarrow{u'} \\ \Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

obtemos que P também pertence ao plano π.

Seja o ponto Q tal que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ}$. Como $P \in \pi \cap \pi'$ e $\overrightarrow{w}$ é paralelo ao planos π e π', temos, pela Proposição 4, que $Q \in \pi \cap \pi'$. Além disso, $Q \neq P$, pois $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$. Então, a reta

$$r = \{P + t\,\overrightarrow{PQ}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$$

está contida na interseção de π e π'. Precisamos agora mostrar que $\pi \cap \pi' = r$ (Figura 17.6).

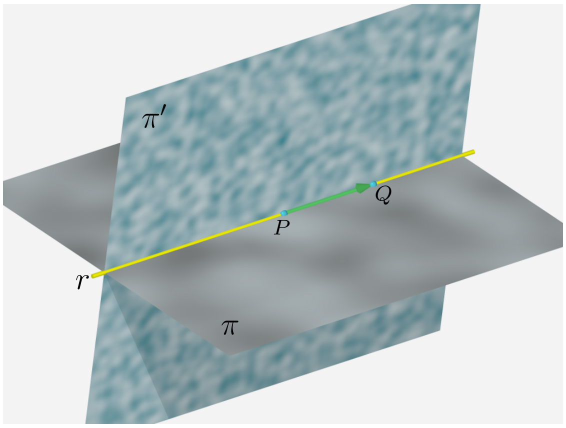

Figura 17.6: **(c)** $\pi \cap \pi' = r$

Suponhamos que exista um ponto R na interseção de π e π' tal que $R \notin r$. Neste caso, $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ seriam vetores não colineares e paralelos aos planos π e π'. Logo, pela Proposição 4 e pelo provado acima, teríamos

$$\pi = \{P + t\,\overrightarrow{PQ} + s\,\overrightarrow{PR}\ ;\ t, s \in \mathbb{R}\} = \pi'\,,$$

uma contradição, pois, por hipótese, $\overrightarrow{u'}$ não é combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Da mesma maneira podemos verificar que se $\overrightarrow{v'}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI, então $\pi \cap \pi'$ é uma reta.

Reciprocamente, se $\pi = \pi'$, então $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são combinações lineares de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e $A' \in \pi$, pois, caso contrário, teríamos que $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são combinações lineares de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e $A' \notin \pi$ ou $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI ou $\overrightarrow{v'}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI. No primeiro caso, pelo provado acima, teríamos $\pi \cap \pi' = \varnothing$, e no segundo e no terceiro casos, $\pi \cap \pi'$ seria uma reta, uma contradição.

De modo análogo, podemos verificar que se π e π' são paralelos, então $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são combinações lineares de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e $A' \notin \pi$, e se $\pi \cap \pi'$ é uma reta, então $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI ou $\overrightarrow{v'}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI

Exemplo 6

Sejam os planos $\pi_1 = \{(1,2,-1) + t(1,3,1) + s(4,2,2)\,;\, s,t \in \mathbb{R}\}$, $\pi_2 = \{(2,6,1) + t(-2,4,0) + s(9,7,5)\,;\, s,t \in \mathbb{R}\}$ e $\pi_3 = \{(3,1,1) + t(2,1,-5) + s(5,5,3)\,;\, s,t \in \mathbb{R}\}$. Verifique se os planos π_1 e π_2 e os planos π_1 e π_3 são coincidentes, paralelos ou se interseptam ao longo de uma reta. Neste caso, determine a reta de interseção.

Solução. Sejam os vetores $\overrightarrow{u_1} = (1,3,1)$ e $\overrightarrow{v_1} = (4,2,2)$ paralelos ao plano π_1, $\overrightarrow{u_2} = (-2,4,0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (9,7,5)$ paralelos ao plano π_2 e $\overrightarrow{u_3} = (2,1,-5)$ e $\overrightarrow{v_3} = (5,5,3)$ paralelos ao plano π_3.

Como $\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1} = (4,2,-10)$, temos que $[\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}] = \langle \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1} \rangle = (-2)\cdot 4 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-10) = 0$ e $[\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}] = \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1} \rangle = 9 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot (-10) = 0$. Então, $\overrightarrow{u_2}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são combinações lineares de $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{v_1}$. De fato, $\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{v_1}$.

Logo, pela Proposição 7, $\pi_1 = \pi_2$ ou $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. Sejam $A_1 = (1,2,-1)$ um ponto do plano π_1, $A_2 = (2,6,1)$ um ponto do plano π_2 e $A_3 = (3,1,1)$ um ponto do plano π_3. Vamos verificar se A_1 pertence ou não ao plano π_2. Suponhamos que A_1 pertença ao plano π_2. Então, existiriam $t, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
& A_1 = A_2 + t\,\overrightarrow{u_2} + s\,\overrightarrow{v_2} \\
\iff\ & \overrightarrow{A_2A_1} = t\,\overrightarrow{u_2} + s\,\overrightarrow{v_2} \\
\iff\ & (-1,-4,-2) = t(-2,4,0) + s(9,7,5) \\
\iff\ & \begin{cases} -2t + 9s = -1 \\ 4t + 7s = -4 \\ 5s = -2\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pela última equação, $s = -2/5$. Substituindo na primeira e na segunda equações obteríamos, respecitvamente, $t = \dfrac{1+9s}{2} = -\dfrac{13}{10}$ e $t = \dfrac{-4-7s}{4} = -\dfrac{3}{10}$, uma contradição. Logo, $A_1 \notin \pi$ e, pela Proposição 7, π_1 é paralelo ao plano π_2.

Vamos agora analisar a posição relativa dos planos π_1 e π_2.

Temos $[\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}] = \langle \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1} \rangle = 2{\cdot}4 + 1{\cdot}2 + (-5){\cdot}(-10) = 60 \neq 0$. Logo, pela Proposição 7, $\pi_1 \cap \pi_3$ é uma reta r. Sejam $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{v_3} = \lambda\, \overrightarrow{u_3} + \mu\, \overrightarrow{u_1} + \delta\, \overrightarrow{v_1}$$
$$\iff \begin{cases} 5 = 2\lambda + \mu + 4\delta \\ 5 = \lambda + 3\mu + 2\delta \\ 3 = -5\lambda + \mu + 2\delta\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\lambda = 0$ e $\mu = \delta = 1$. Então, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_1}$ é um vetor paralelo ao plano π_3 e ao plano π_1. Portanto, $\overrightarrow{v_3}$ é um vetor paralelo à reta r.

Sejam agora $\lambda', \mu', \delta' \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda'\, \overrightarrow{u_3} + \mu'\, \overrightarrow{u_1} + \delta'\, \overrightarrow{v_1}$$
$$\iff \begin{cases} 2 = 2\lambda' + \mu' + 4\delta' \\ -1 = \lambda' + 3\mu' + 2\delta' \\ 2 = -5\lambda' + \mu' + 2\delta'\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\lambda' = -\dfrac{14}{60}$ e $\mu' = -\dfrac{48}{60}$ e $\delta' = \dfrac{49}{60}$. Logo,

$$A_3 - \lambda' \overrightarrow{u_3} = A_1 + \mu'\, \overrightarrow{u_1} + \delta'\, \overrightarrow{v_1}$$

é um ponto pertencente a π_1 e a π_2, ou seja, $B = A_3 - \lambda' \overrightarrow{u_3} = (3,1,1) + \dfrac{14}{60}(2,1,-5) = \left(\dfrac{208}{60}, \dfrac{74}{60}, -\dfrac{10}{60}\right)$ é um ponto da reta r. Assim,

$$r = \left\{ \left(\frac{104}{30}, \frac{37}{30}, -\frac{5}{30}\right) + t(5,5,3)\,;\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores não múltiplos e A um ponto do espaço. Dizemos, então, que

$$\pi_A = \{A + t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}\,;\, t, s \in \mathbb{R}\}$$

é o plano gerado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ que passa pelo ponto A.

Pela Proposição 7, $\pi_A = \pi_{A'}$, se , e só se, $A' \in \pi\ (A \in \pi')$, e $\pi_A \cap \pi_{A'} = \varnothing$ se, e só se, $A' \notin \pi\ (A \notin \pi')$.

Observação 8

Seja π o plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não colineares que passa pelo ponto A. Se $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são vetores não colineares paralelos ao plano π, então, pela Proposição 4, $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são combinações lineares de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Logo, pela Proposição 7, π é também o plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ que passa por um ponto B qualquer de π, ou seja,

$$\pi = \{A + s\,\overrightarrow{u} + t\,\overrightarrow{v}\,;\, s,t \in \mathbb{R}\} = \{B + s\,\overrightarrow{u'} + t\,\overrightarrow{v'}\,;\, s,t \in \mathbb{R}\}$$

Em particular, um vetor $\overrightarrow{w}$ é paralela ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{w}$ é combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, quaisquer que sejam os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não colineares paralelos a π.

Observação 9

Um vetor $\overrightarrow{u}$ é perpendicular ou normal a um plano π, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \pi$, quando $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ para qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo ao plano π.

Sejam $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores não colineares paralelos ao plano π. Então, $\overrightarrow{u} \perp \pi$ se, e só se, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v_2}$, pois, pela Observação 8, todo vetor paralelo a π é uma combinação linear de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

Logo, como $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, todo múltiplo do vetor $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ é um vetor normal ao plano π .

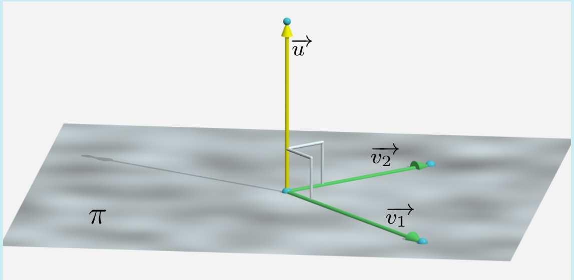

Figura 17.7: Vetor $\overrightarrow{u}$ normal ao plano π

Vamos mostrar que a recíproca também vale. De fato, como $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ são vetores LI, existem números reais α, β e γ tais que

$$\overrightarrow{u} = \alpha\,\overrightarrow{v_1} + \beta\,\overrightarrow{v_2} + \gamma(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})\,.$$

Sendo $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0$, obtemos que

$$0 = \alpha \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle + \beta \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle$$
$$0 = \alpha \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle + \beta \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle\,.$$

Logo, $\alpha = \beta = 0$, pois o determinante da matriz do sistema

$$\begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle & \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \\ \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle & \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle \end{pmatrix}$$

é igual a $||\overrightarrow{v_1}||^2||\overrightarrow{v_2}||^2 - \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^2 = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||^2$ e é, portanto, diferente de zero. Assim, $\overrightarrow{u} = \delta(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})$, ou seja, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.

Provamos, então, que $\overrightarrow{u} \perp \pi$ se, e só se, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$. Em particular, $\overrightarrow{w_1} \times \overrightarrow{w_2}$ e $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ são múltiplos quaisquer que sejam os vetores $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ não colineares paralelos a π.

OBSERVAÇÃO 10

Sejam P_0 um ponto e $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vetores não colineares. Então,

$$\pi_t = \{P_0 + t(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) + \lambda\,\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{v}\,;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

é a família de todos os planos gerados pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ (Verifique !). Observe que $\pi_t = \pi_{t'}$ se, e só se, $t = t'$ e π_t é paralelo a $\pi_{t'}$ se, e só se, $t \neq t'$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, π_t é o plano desta família que passa pelo ponto $P_t = P_0 + t(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$, pertencente à reta r perpendicular a π que passa pelo ponto P_0.

EXEMPLO 7

Seja π um plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (4, 1, 2)$. Determine a reta r perpendicular a π que passa pela origem e o ponto P da reta r tal que $\{P + t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}\,;\ t, s \in \mathbb{R}\}$ é o plano gerado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ que passa pelo ponto $A = (1, 1, 1)$.

Solução. Como $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (1, 10, -7)$, temos, pela Observação 9, que r é a reta paralela ao vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ que passa pela origem, ou seja,

$$r = \{\lambda(1, 10, -7)\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

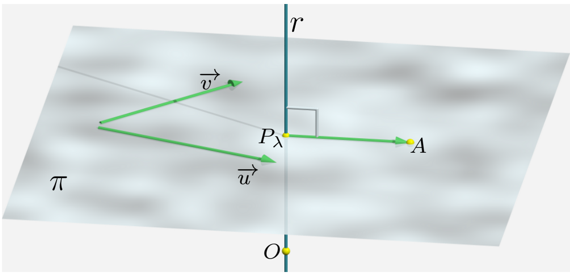

Figura 17.8: Representação gráfica da situação do Exemplo 7

Pela Observação 10,

$$\pi_\lambda = \{\lambda(1, 10, -7) + t(1, 2, 3) + s(4, 1, 2)\,;\ \lambda, s, t \in \mathbb{R}\}$$

é a família dos planos gerados pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Então, $A \in \pi_\lambda$ se, e só se, existem $\lambda, t, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1, 1, 1) = \lambda(1, 10, -7) + t(1, 2, 3) + s(4, 1, 2)\,,$$

ou seja, se, e só se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o vetor $\overrightarrow{AP_\lambda}$, onde $P_\lambda = (\lambda, 10\lambda, -7\lambda)$, é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{w} = (1, 10, -7)$, normal ao plano π.

Logo, $\lambda = 4/150$ e portanto, $P = P_{4/150} = (4/150, 40/150, -28/150)$, pois:

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{AP_\lambda}, \overrightarrow{w}\rangle = 0 &\iff \langle (1-\lambda, 1-10\lambda, 1+7\lambda), (1,10,-7)\rangle = 0\\ &\iff (1-\lambda) + 10(1-10\lambda) - 7(1+7\lambda) = 0\\ &\iff 4 - 150\lambda = 0\\ &\iff \lambda = 4/150\,.\end{aligned}$$

17.3 Equação cartesiana do plano

Agora vamos aplicar a noção de produto interno para determinar a equação cartesiana de um plano no espaço.

Seja π o plano que passa pelo ponto A e é normal ao vetor $\overrightarrow{u}$. Então:

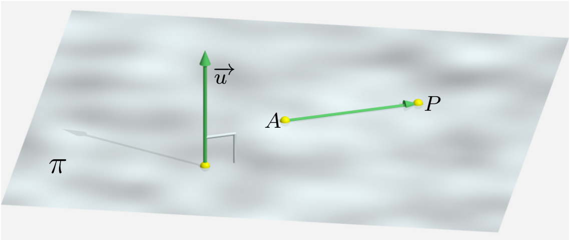

Figura 17.9: $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u} \iff P \in \pi$

$$P \in \pi \iff \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u} \iff \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}\rangle = 0$$

Escrevendo a última condição em termos das coordenadas dos elementos envolvidos,

$$A = (x_0, y_0, z_0)\,, \quad \overrightarrow{v} = (a,b,c) \quad \text{e} \quad P = (x,y,z)\,,$$

em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ fixado, obtemos:

$$\begin{aligned}P = (x,y,z) \in \pi &\iff \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}\rangle = 0\\ &\iff \langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), (a,b,c)\rangle = 0\\ &\iff a\,(x-x_0) + b\,(y-y_0) + c\,(z-z_0) = 0\\ &\iff ax+by+cz = ax_0+by_0+cz_0\,.\end{aligned}$$

Portanto, $P = (x,y,z) \in \pi$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem à **equação cartesiana** de π:

$$\pi : ax + by + cz = d$$

onde $\overrightarrow{u} = (a,b,c) \perp \pi$ e d é calculado sabendo que π passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\boxed{d = ax_0 + by_0 + cz_0}$$

Exemplo 8

Determine a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A = (1,1,2)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (1,2,-3)$.

Solução. Como $\overrightarrow{u} = (1,2,-3) \perp \pi$, temos $\pi : 1\,x + 2\,y + (-3)\,z = d$, onde

$$d = 1\,(1) + 2\,(1) + (-3)\,(2) = -3.$$

Portanto,

$$\pi : x + 2y - 3z = -3$$

é a equação cartesiana do plano π.

Exemplo 9

Obtenha as equações paramétricas do plano $\pi : x + 3y - z = 2$.

Solução. Para determinar as equações paramétricas do plano π, devemos encontrar três pontos de π que não sejam colineares.

Fazendo $y = z = 0$ na equação cartesiana de π, obtemos $x = 2$. Portanto, o ponto $A = (2, 0, 0)$ pertence ao plano π.

Fazendo agora $x = y = 0$ na equação de π, obtemos $z = -2$. Portanto, o ponto $B = (0, 0, -2)$ pertence ao plano π.

Finalmente, tomando $x = 0$ e $y = 1$, obtemos $z = 1$. Portanto, $C = (0, 1, 1) \in \pi$.

Devemos verificar agora que A, B e C não são colineares.

Para isso, consideremos os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$.

Como $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, concluímos que A, B e C não são colineares.

Logo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores não colineares paralelos a π.

Assim, como o plano π passa por $A = (2, 0, 0)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$,

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - 2s - 2t \\ y = t \\ z = -2s + t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas do plano π.

Exemplo 10

Considere os pontos $A = (1, -1, 3)$ e $B = (5, 3, 1)$ e plano $\pi : y + z = 1$. Encontre o conjunto r dos pontos equidistantes de A e B que pertencem ao plano π.

Solução. No Capítulo 11, vimos que o conjunto dos pontos equidistantes de A e B são os pontos do plano π' normal ao vetor $\overrightarrow{AB} = (4, 4, -2)$ que passa pelo ponto médio $M = \dfrac{A + B}{2} = (3, 1, 2)$ do segmento AB. Logo, a equação cartesiana de π' é

$$\begin{aligned} & \pi' : 4x + 4y - 2z = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 12 \\ \iff & \qquad \pi' : 2x + 2y - z = 6\,. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Se, além disso, $y = -z + 1$, obtemos, substituindo em 17.5, que $x = \dfrac{z - 2y + 6}{2} = \dfrac{z - 2(-z+1) + 6}{2} = \dfrac{3}{2}z + 2\,.$

Assim, $r = \left\{ \left(\dfrac{3}{2}z + 2, -z + 1, z \right) \; ; \; z \in \mathbb{R} \right\}$, que é a reta paralela ao vetor $\left(\dfrac{3}{2}, -1, 1 \right)$ que passa pelo ponto $P = (2, 1, 0)$.

Observação 11

Seja $ax + by + cz = d$ a equação cartesiana do plano π que passa por três pontos A, B e C não colineares.

Como o vetor $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$ deve ser penpendicular ao plano π, e, pontanto, aos vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$, basta tomar, pela Observação 9, $\overrightarrow{w} = (a, b, c) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

O número real d é calculado sabendo que os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$ pertencem ao plano π. Isto é:

$$d = ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_2 + by_2 + cz_2 = ax_3 + by_3 + cz_3.$$

Exemplo 11

Encontre a equação cartesiana e as equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1, -1, 3)$, $B = (4, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$.

Solução. Como $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 0)$ são vetores paralelos ao plano π e não são múltiplos um do outro, pois $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$, segue que:

$$\pi : P = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \; ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

isto é,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 3s + t \\ y = -1 + s + 2t \; ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,, \\ z = 3 - 2s \end{cases}$$

são equações paramétricas do plano π.

Para determinar a equação cartesiana de π, devemos achar um vetor perpendicular a π.

Sendo, pela Observação 11,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= (4, -2, 5)\,,\end{aligned}$$

um vetor normal ao plano π, a equação cartesiana de π tem a forma:

$$4x - 2y + 5z = d\,,$$

onde d é calculado sabendo que $A = (1, -1, 3) \in \pi$:

$$d = 4(1) - 2(-1) + 5(3) = 21\,.$$

Portanto, a equação cartesiana do plano π é

$$4x - 2y + 5z = 21\,.$$

Exemplo 12

Determine a equação cartesiana do plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Solução. Das equações paramétricas de π, obtemos o ponto $A = (-1, 1, 3)$ pertencente a π e os vetores $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 1, 2)$ não colineares e paralelos ao plano π.

Para determinar a equação cartesiana de π, como já sabemos que $A \in \pi$, basta achar um vetor $\overrightarrow{u}$ perpendicular a π.

Pela Observação 11, basta tomar

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= (-2, -2, 3).\end{aligned}$$

Assim, a equação cartesiana de π tem a forma:

$$\pi : -2x - 2y + 3z = d\,,$$

onde $d = -2(-1) - 2(1) + 3(3) = 9$, pois $A \in \pi$. Portanto, a equação cartesiana do plano é

$$\pi : -2x - 2y + 3z = 9\,.$$

Proposição 12

Sejam $r = \{A + t\,\overrightarrow{u}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ uma reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\pi : ax + by + cz = d$ um plano normal ao vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$. Então,

(a) $r \subset \pi$ se, e só se, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $A \in \pi$.
(b) $r \cap \pi = \varnothing$ se, e só se, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $A \notin \pi$.
(c) $r \cap \pi$ consiste de um único ponto se, e só se, $\overrightarrow{u}$ não é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v}$.

Demonstração

Suponhamos que o vetor $\overrightarrow{u}$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v}$. Seja $P = (x, y, z) = A + t\,\overrightarrow{u}$ um ponto de r. Então, $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{u}$ e, portanto,

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle t\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0,$$

ou seja, $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Se, além disso, $A \in \pi$, temos $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$. Logo, por $ax + by + cz = d$ para todo ponto $P = (x, y, z) \in r$, isto, é $r \subset \pi$ (Figura 17.10).

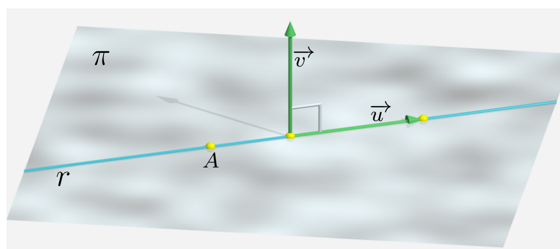

Figura 17.10: $r \subset \pi$

Mas, se $A \notin \pi$, $ax_0 + by_0 + cz_0 \neq d$. Portanto, $ax + by + cz \neq d$ para todo ponto $P = (x, y, z) \in r$. Neste caso, $r \cap \pi = \varnothing$, ou seja, r é uma reta paralela ao plano π (Figura 17.11).

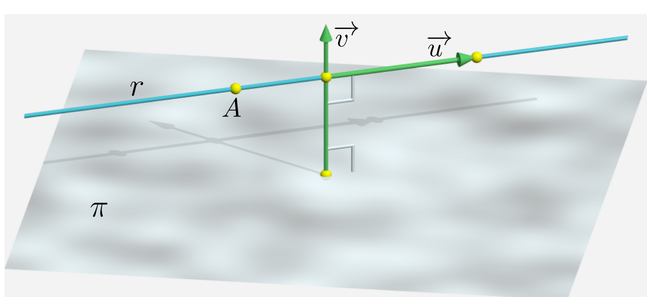

Figura 17.11: $r \parallel \pi$

Suponhamos agora que $\overrightarrow{u}$ não é ortogonal a $\overrightarrow{v}$ $(\Longleftrightarrow \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \neq 0)$.

Seja $P = A + t\,\overrightarrow{u} = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma)$ um ponto da reta r. Então, $P \in \pi$ se, e só se,

$$\begin{aligned} & a(x_0 + t\alpha) + b(y_0 + t\beta) + c(z_0 + t\gamma) = d \\ \Longleftrightarrow\quad & t(a\alpha + b\beta + c\gamma) = d - (ax_0 + by_0 + cz_0) \end{aligned}$$

Como $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, obtemos que $t_0 = \dfrac{d - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{(a\alpha + b\beta + c\gamma)}$ é o único parâmetro $t \in \mathbb{R}$ para o qual o ponto $P = A + t\,\overrightarrow{u}$ pertence ao plano π. Assim, $r \cap \pi = \{P_0\}$, onde $P_0 = A + t_0\overrightarrow{u}$ (Figura 17.12).

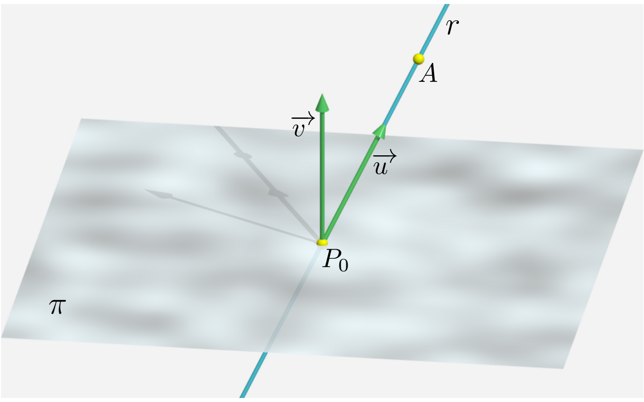

Figura 17.12: $r \cap \pi = \{P_0\}$

Reciprocamente, suponhamos que $r \subset \pi$. Então, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $A \in \pi$, pois, caso contrário, teríamos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $A \notin \pi$ ou $\overrightarrow{u}$ não é ortogonal a $\overrightarrow{v}$. No primeiro caso, teríamos, pelo provado acima, que $r \cap \pi = \varnothing$ e, no segundo caso, $\pi \cap r$ consistiria de um único ponto, uma contradição.

Analogamente, podemos verificar que se $r \cap \pi = \varnothing$, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $A \notin \pi$ e que se $r \cap \pi$ consiste de um único ponto, então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são ortogonais.

Exemplo 13

Sejam a reta $r = \{A + t\,\overrightarrow{u}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ e o plano $\pi : x + y - 2z = 2$, onde $A = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{u} = (3, 5, 4)$. Mostre que a reta r é paralela ao plano π e determine a equação cartesiana do plano π' que contém a reta r e o ponto $B = (2, 4, 1)$.

Solução. Seja $\overrightarrow{v} = (1, 1, -2)$ o vetor normal ao plano π. Como $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 0$ e $A \notin \pi$, pois $1 + 1 - 2 \cdot 1 = 0 \neq 2$, temos, pela Proposição 12, que a reta r é paralela ao plano π.

Seja π' o plano que contém a reta r e o ponto B e seja $C = A + \overrightarrow{u} = (4, 6, 5)$ outro ponto de r (Figura 17.13). Então, A, B e C são três pontos de π' não colineares, pois

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12, -4, -4) \neq (0, 0, 0)\,.$$

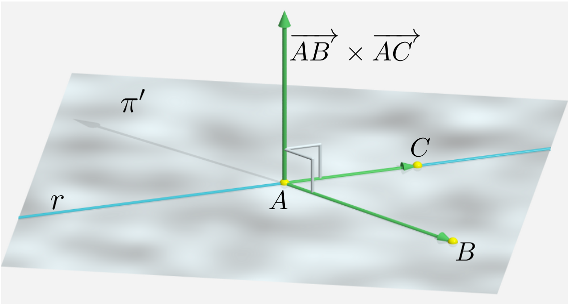

Figura 17.13: Representação gráfica de π'

Pela Observação 11, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12, -4, -4)$ é um vetor normal ao plano π'. Logo, a equação cartesiana de π' é da forma

$$\pi' : 12x - 4y - 4z = d\,,$$

onde $d = 12 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 4$, pois $A = (1,1,1) \in \pi'$. Assim, a equação cartesiana de π' é $3x - y - z = 1$.

O estudo da posição relativa entre dois planos π_1 e π_2 dados por suas equações cartesianas será feito no próximo capítulo. Veremos que a verificação de qual posição π_1 ocupa em relação ao plano π_2, assim como encontrar a reta de interseção, no caso em que π_1 e π_2 são concorrentes, é bem mais simples, quando π_1 e π_2 são representados por suas equações cartesianas.

17.4 Exercícios

1. Sejam os pontos $A = (1,2,4), B = (4,6,3), C = (-2,0,5), P = (1,1,0)$, $Q = (4,3,-1)$ e $R = (10,1,1)$, e π o plano que passa pelos pontos A, B e C. Encontre as equações paramétricas de π. Verifique se os pontos P, Q e R pertencem a π e se o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é paralelo a π.

2. Obtenha as equações paramétricas dos planos π_1, π_2, π_3 e π_4, onde:

   (a) π_1 é o plano que passa pelos pontos $A = (1,1,4), B = (6,5,4)$ e $C = (-2,0,2)$.

   (b) π_2 é o plano que passa pelo ponto $D = (1,1,1)$ e é paralelos aos vetores $\overrightarrow{u} = (2,3,-2)$ e $\overrightarrow{v} = (8,5,2)$.

   (c) π_3 é o plano que passa pelos pontos $E = (1,2,0)$ e $F = (4,6,1)$ e é paralelos ao vetor $\overrightarrow{w} = (4,3,-2)$.

   (d) π_4 é o plano que passa pelo ponto $G = (0,3,0)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u'} = (2,3,-2)$ e $\overrightarrow{v'} = (8,5,2)$.

3. Seja a reta r que passa pelos pontos $P = (-2,0,-1)$ e $Q = (-3,2,5)$. Mostre que se $r \subset \pi_i$, $r \parallel \pi_i$ ou $r \cap \pi_i$ é um ponto, onde π_i, $i = 1,2,3,4$, são os planos do exercício 2. Caso $r \cap \pi_i$ seja um ponto, determine esse ponto.

4. Verifique se os planos π_1 e π_i, $i = 2,3,4$, do exercício 2, são coincidentes, paralelos ou se intersectam ao longo de uma reta. Caso $\pi_1 \cap \pi_i$ seja uma reta, determine-a.

5. Obtenha as equações cartesianas dos planos π_i, $i = 1, 2, 3, 4$, do exercício 2.

6. Encontre as equações paramétricas e cartesiana do plano π normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, 2, 4)$ que contém o ponto $P = (2, 1, 1)$.

7. Considere os planos $\pi_1 : x - y + 2z = 0, \pi_2 : 2x + 3z = -1$ e $\pi_3 : -2x + 2y - 4z = -20$ e a reta r que passa pelos pontos $A = (3, 1, 4)$ e $B = (4, 0, 3)$. Decida se $r \subset \pi_i$, $r \parallel \pi_i$ ou r corta o plano π_i num ponto, para $i = 1, 2, 3$ Caso $r \cap \pi_i$ seja um ponto, obtenha esse ponto.

8. Seja a reta r que passa pelo ponto $P = (4, 4, 3)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, -1, -2)$. Determine as equações paramétricas e cartesiana do plano π que contém a reta r e o ponto $Q = (0, 3, 1)$.

9. Sejam r a reta que passa pelo ponto $A = (1, 4, 2)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, 1, 2)$ e s a reta que passa pelos pontos $B = (6, 1, 0)$ e $C = (4, -1, -4)$. Mostre que r e s são retas paralelas e obtenha as equações paramétricas e cartesiana do plano que as contém.

10. Para que valores de A e D, a reta $r = \{(3 + 4t, 1 - 4t, -3 + t)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ está contida no plano $\pi : Ax + 2y - 4z + D = 0$.

11. Ache o ponto simétrico Q do ponto $P = (1, 3, -4)$ em relação ao plano $\pi : 3x + y - 2z = 0$.

12. Do ponto $P = (5, 4, -7)$ é traçada uma perpendicular ao plano π. Se o pé desta perpendicular é o ponto $Q = (2, 2, -1)$, encontre a equação cartesiana de π.

13. Considere o ponto $A = (1, 1, 2)$ e os vetores $\overrightarrow{u} = (2, 1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (3, 2, 1)$. Encontre um vetor $\overrightarrow{w}$ unitário de modo que $r = \{A + \lambda\,\overrightarrow{w}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ seja a reta que passa por A e é perpendicular a família de planos gerados pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Determine as equações cartesianas dos planos gerados $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, $\pi_\lambda = \{A + \lambda\,\overrightarrow{w} + s\,\overrightarrow{u} + t\,\overrightarrow{v}\,;\, s, t \in \mathbb{R}\}$ dos plano gerados por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, de modo que $d(Q_\lambda, A) = \sqrt{26}$, onde $Q_\lambda = A + \lambda\,\overrightarrow{w}$.

14. Indentifique, geometricamente, o conjunto $\{A + t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}\,;\, t, s \in \mathbb{R}\}$, onde $A = (1, 2, 3), B = (4, -1, 6)$ e $C = (2, 1, 4)$.

15. Mostre que o conjunto $\pi = \{(-x+3y+7z, x+2y+8z+3, x-y-z+1\,;\, x,y,z \in \mathbb{R})\}$ é um plano. Obtenha uma equação paramétrica para π e, também, sua equação cartesiana.

16. Sejam o ponto $A = (a, 2a, a)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, e as retas $r_1 = \{(2s, 3s+1, s+1)\,;\, s \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{(2t+1, t+2, -t+2)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$. Encontre $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $C \in r_1$ de modo que $\overrightarrow{AC}$ seja perpendicular à reta r_2 e $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{2}$. Mostre também que os pontos A e C e a reta r_2 não são coplanares.

17. Considere o plano π gerado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 4, 1)$ que contém o ponto $A = (-1, 0, 2)$ e a reta r paralela ao vetor $\overrightarrow{w} = (3, 0, -1)$ que passa pelo ponto $B = (-1, 6, 4)$. Encontre a equação cartesiana de π, mostre que r está contida em π e obtenha a reta ℓ, contida em π, que passa pelo ponto B e é perpendicular a r.

18. Ache as extremidades do diâmetro da esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0$ que é perpendicular ao plano $\pi : 5x - y + 2z = 17$.

19. Determine as equações das esferas de raio $\sqrt{17}$, com centro pertencente ao plano $\pi : 2x+y+z = 3$, que contém os pontos $A = (2, 3, 1)$ e $B = (4, 1, 3)$.

20. **(Teorema das três perpendiculares)** Seja Q o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano π e R o pé da perpendicular baixada de Q sobre uma reta r contida em π. Mostre que o vetor $\overrightarrow{PR}$ é perpendicular à reta r.

21. Seja π o plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não colineares que passa pelo ponto A. Prove que se π' é um plano paralelo a π, então um vetor $\overrightarrow{w}$ é paralelo a π' se, e só se, $\overrightarrow{w}$ é paralelo a π. Conclua que π' é o plano gerado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ que passa por um ponto B qualquer de π', ou seja,

$$\pi' = \{B + t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}\,;\, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

E, reciprocamente, se $B \notin \pi$, então o plano $\pi' = \{B + t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}\,;\, t, s \in \mathbb{R}\}$ é paralelo ao plano π.