18

Sistemas de equações lineares com três variáveis

Sumário

18.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar os sistemas de equações lineares com três variáveis tanto do ponto de vista algébrico quanto geométrico.

Uma **equação linear nas variáveis x, y e z** é uma equação da forma

$$ax + by + cz = d, \tag{18.1}$$

onde a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ são constantes, sendo pelo menos um dos números a, b ou c diferentes de zero. As constantes a, b e c são os **coeficientes** e a constante d é o **termo independente** da equação (18.1).

Um **sistema de n equações lineares a três variáveis** é um conjunto de n equações do tipo (18.1):

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_nx & + & b_ny & + & c_nz & = & d_n. \end{array} \right. \tag{18.2}$$

Um terno ordenado de números reais $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ é uma **solução** do sistema (18.2) se $a_kx_0 + b_ky_0 + c_kz_0 = d_k$, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

Como os pontos do espaço são representados por ternos ordenados de números reais, em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, dizemos também que **um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é uma solução do sistema** (18.2) quando o terno ordenado de suas coordenadas (x_0, y_0, z_0) é uma solução. O conjunto de todas as soluções de (18.2) é o **conjunto solução do sistema**. Dizemos que o sistema (18.2) é

- **determinado** quando possui uma única solução;
- **indeterminado** quando possui mais de uma solução;
- **impossível** quando não possui soluções.

18.2 Sistemas de duas equações lineares com três variáveis

No Capítulo 17 vimos que cada uma das equações do sistema (18.2) é a equação de um plano.

Para $n = 1$, o conjunto solução do sistema (18.2) é o plano representado pela equação $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$.

Para $n = 2$, o conjunto solução $\mathcal{S}$ do sistema:

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \end{cases} \tag{18.3}$$

é o conjunto dos pontos que pertencem, simultaneamente, aos planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$. Ou seja, $\mathcal{S} = \pi_1 \cap \pi_2$.

O estudo do sistema (18.3) será feito analisando as equivalências entre as possíveis posições relativas dos planos π_1 e π_2 e as possíveis relações algébricas dos coeficientes e dos termos independentes das equações do sistema.

Do ponto de vista algébrico, as possibilidades para os vetores normais $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ aos planos π_1 e π_2, respectivamente, e os termos independentes d_1 e d_2 são:

(A1) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$ e $d_2 = \lambda\, d_1$;

(A2) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$, mas $d_2 \neq \lambda\, d_1$;

(A3) Os vetores $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_1}$ não são colineares.

Por outro lado, pela Proposição 7 do Capítulo 17, há exatamente três posições relativas possíveis entre os planos π_1 e π_2:

(G1) π_1 e π_2 são coincidentes: $\pi_1 = \pi_2$;

(G2) π_1 e π_2 são paralelos: $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$;

(G3) π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta ℓ: $\pi_1 \cap \pi_2 = \ell$.

Proposição 1

As posições relativas **(G1)**, **(G2)** e **(G3)** entre os planos π_1 e π_2 são equivalentes, respectivamente, às alternativas algébricas **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** para os vetores $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ e os termos independentes d_1 e d_2 das equações do sistema (18.3).

Demonstração

(A1)$\Longrightarrow$(G1) Se $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$ e $d_2 = \lambda d_1$, a equação do plano π_2 é obtida multiplicando por λ ambos os membros da equação do plano π_1. Consequêntemente, um ponto que satisfaz a primeira deve, necessariamente, satisfazer a segunda e, reciprocamente. Portanto, um ponto pertence ao plano π_1 se, e só se, pertence ao plano π_2. Ou seja, os planos π_1 e π_2 coincidem e o conjunto solução do sistema é: $\mathcal{S} = \pi_1 = \pi_2$ (Figura 18.1).

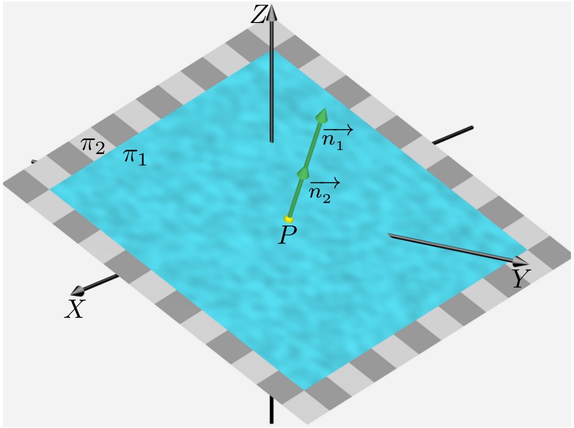

Figura 18.1: $\mathcal{S} = \pi_1 = \pi_2$

(A2)$\Longrightarrow$(G2) Suponhamos que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$ e $d_2 \neq \lambda d_1$. Então, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π_1 se, e só se,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 &\iff \lambda a_1x + \lambda b_1y + \lambda c_1z = \lambda d_1 \\ &\iff a_2x + b_2y + c_2z = \lambda d_1. \end{aligned} \tag{18.4}$$

Como $d_2 \neq \lambda d_1$, temos, por (18.4), que $P \notin \pi_2$. Logo, $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, ou seja, π_1 e π_2 são planos paralelos e $\mathcal{S} = \varnothing$ (Figura 18.2).

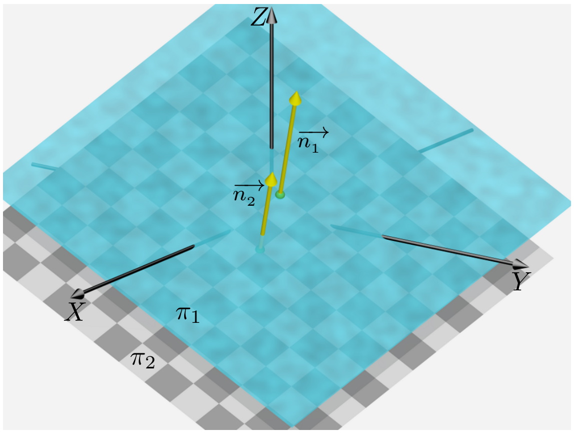

Figura 18.2: $\mathcal{S} = \varnothing$, pois $\pi_1 \parallel \pi_2$

(A3)$\Longrightarrow$(G3) Neste caso, a hipótese implica que $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \neq (0, 0, 0)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que a última coordenada $D = a_1b_2 - a_2b_1$ do produto vetorial $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ é diferente de zero. O sistema (18.3) pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2z. \end{cases}$$

Sendo o determinante $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ da matriz do sistema acima diferente de zero, ele pode ser resolvido de forma única para cada valor de z:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{D}\left[(d_1 - c_1z)b_2 - (d_2 - c_2z)b_1\right] \\ y &= \tfrac{1}{D}\left[(d_2 - c_2z)a_1 - (d_1 - c_1z)a_2\right]. \end{aligned}$$

Portanto, os planos π_1 e π_2 se intersectam ao longo da reta

$$\ell : \begin{cases} x = \frac{1}{D}(d_1b_2 - d_2b_1) + \frac{1}{D}(b_1c_2 - b_2c_1)t \\ y = \frac{1}{D}(d_2a_1 - d_1a_2) + \frac{1}{D}(a_2c_1 - a_1c_2)t; \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = t \end{cases}$$

que é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{D}(b_1c_2 - b_2c_1)\,,\, \frac{1}{D}(a_2c_1 - a_1c_2)\,,\, 1\right)$. Multiplicando o vetor $\overrightarrow{u}$ por D, obtemos que ℓ é uma reta paralela ao produto vetorial $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ (Figura 18.3).

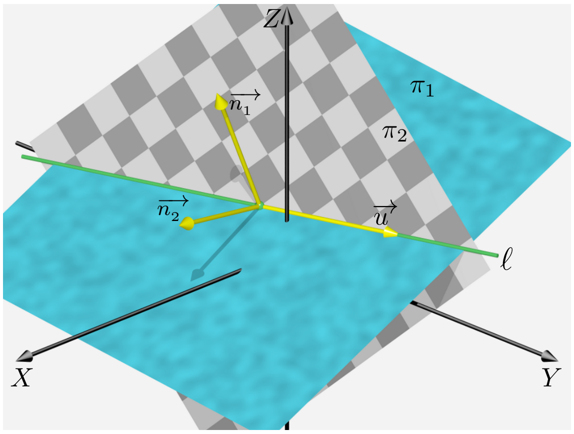

Figura 18.3: $\mathcal{S} = \pi_1 \cap \pi_2 = \ell$

Reciprocamente, **(G1)$\Longrightarrow$(A1)**, **(G2)$\Longrightarrow$(A2)** e **(G3)$\Longrightarrow$(A3)**, porque as condições **(G1)**, **(G2)** e **(G3)** se excluem mutuamente e as alternativas **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** esgotam todas as possibilidades.

Suponhamos, por exemplo, que vale **(G1)**, isto é, que os planos π_1 e π_2 coincidem. Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$ e $d_2 = \lambda d_1$, pois, caso contrário, valeria **(A2)** ou **(A3)**. Mas se valesse **(A2)**, teríamos que π_1 e π_2 seriam paralelos, uma contradição, e se valesse **(A3)**, π_1 e π_2 se intersectariam ao longo de uma reta, novamente uma contradição.

OBSERVAÇÃO 2

Além de ser descrita por suas equações paramétricas ou simétricas, como vimos no Capítulo 16, a equivalência **(A3)**$\Longleftrightarrow$**(A3)** nos dá outra maneira de representar analiticamente uma reta no espaço. Ou seja, uma reta r pode ser caracterizada como o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas são as soluções do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \end{cases}$$

se os vetores $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$, normais aos planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, não são múltiplos um do outro.

Neste caso, $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ é um vetor paralelo à reta r. Para determinar as equações paramétricas de r, basta obter um ponto A qualquer que satisfaz ao sistema. Feito isso,

$$r = \{A + t\,(\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2})\ ;\ t \in \mathbb{R}\}\,.$$

EXEMPLO 1

Determine o conjunto solução $\mathcal{S}$ dos sistemas.

(a) $$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 1. \end{cases}$$

Solução. As equações correspondem aos planos $\pi_1 : x + y + 2z = 2$ perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 2)$ e $\pi_2 : \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 1$ perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Como $\overrightarrow{n_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{n_1}$ e $1 = d_2 = \dfrac{1}{2}d_1 = \dfrac{1}{2}2$, os planos são coincidentes e, portanto, $\mathcal{S} = \pi_1 = \pi_2$. Logo, o sistema é indeterminado, com um número infinito de soluções.

(b) $$\begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ \frac{1}{3}x + y + z = 0. \end{cases}$$

Solução. Nesse sistema, as equações correspondem aos planos $\pi_1 : x + 3y + 3z = 1$ e $\pi_2 : \dfrac{1}{3}x + y + z = 0$, normais aos vetores $\overrightarrow{n_1} = (1, 3, 3)$ e $\overrightarrow{n_2} = \left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$, respectivamente. Sendo $\overrightarrow{n_2} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{n_1}$ e $0 = d_2 \neq \dfrac{1}{3}d_1 = \dfrac{1}{3}1 = \dfrac{1}{3}$, os planos π_1 e π_2 são paralelos. Logo, o sistema não possui solução, isto é, o sistema é impossível.

(c) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y + z = -2. \end{cases}$

Solução. As equações do sistema representam os planos $\pi_1 : x+y+2z = 0$ e $\pi_2 : x+y+z = -2$ perpendiculares aos vetores $\overrightarrow{n_1} = (1,1,2)$ e $\overrightarrow{n_2} = (1,1,1)$, respectivamente. Como os vetores $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ não são múltiplos, temos que $\pi_1 \cap \pi_2 = \ell$ é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (-1,1,0)$. Fazendo $x = 0$ nas equações, obtemos $y = -4$ e $z = 2$. Logo, $A = (0,-4,2) \in \ell$. Assim, $\ell = \mathcal{S} = \{(-t,-4+t,2)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ e, portanto, o sistema é indeterminado, com um número infinito de soluções.

Exemplo 2

Mostre que, para todo $m \in \mathbb{R}$, a solução do sistema abaixo é uma reta r_m :

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 1 \\ x + my + z = 2. \end{cases} \tag{18.5}$$

Obtenha, caso exista, $m \in \mathbb{R}$ de modo que a reta r_m seja perpendicular ao plano $\pi : x - z = 0$. Caso afirmativo, determine o ponto P de interseção da reta r com o plano π.

Solução. Sejam $\overrightarrow{n_1} = (m,1,2)$ e $\overrightarrow{n_2} = (1,m,1)$ os vetores normais aos planos $\pi_1 : mx+y+2z = 1$ e $\pi_2 : x+my+z = 2$.

Como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= (1-2m, -m+2, m^2-1) \neq (0,0,0), \end{aligned}$$

temos, pela Proposição 1, que a solução do sistema é uma reta r_m paralela ao vetor $\overrightarrow{u}$, para todo $m \in \mathbb{R}$.

Para que a reta r_m seja perpendicular ao plano π, o vetor $\overrightarrow{u}$ deve ser um múltiplo do vetor $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$, normal a π. Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} -m+2 & m^2-1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1-2m & m^2-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1-2m & -m+2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= (m-2, m(2-m), m-2) = (0,0,0). \end{aligned}$$

Segue que $m = 2$ e $\overrightarrow{u} = (1-4, -2+2, 4-1) = (-3,0,3)$. Fazendo $x = 0$ e $m = 2$ em (18.5), obtemos o sistema

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2y + z - 2, \end{cases}$$

cuja solução é $y = 1$ e $z = 0$. Logo, $A = (0,1,0) \in r_2$ e as equações paramétricas de r_2 são

$$r_2 : \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t. \end{cases}$$

Seja $r_2 \cap \pi = \{P\}$. Então, $P = (-3t, 1, 3t)$ e as coordenadas $x = -3t$, $y = 1$ e $z = 3t$ de P satisfazem à equação de π :

$$x - z = -3t - 3t = 0$$
$$\iff t = 0.$$

Assim, $P = A = (0,1,0)$ é o ponto de interseção de r_2 com π (Figura 18.4).

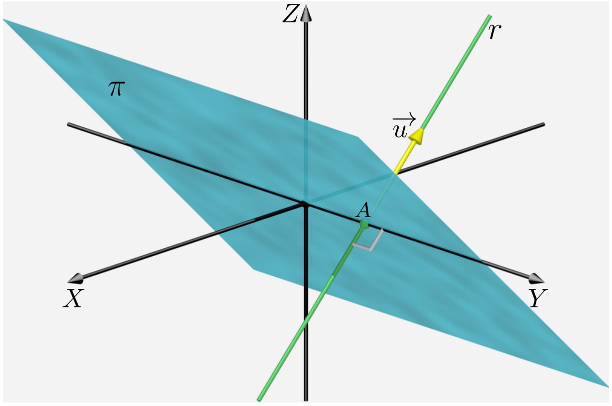

Figura 18.4: $r \perp \pi$, com $r \cap \pi = \{A\}$

18.3 Sistemas de três equações lineares com três variáveis

Consideremos agora um sistema de três equações lineares com três variáveis x, y, z:

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3. \end{cases} \tag{18.6}$$

As equações do sistema (18.6) representam os planos $\pi_k : a_kx + b_ky + c_kz = d_k$, normais aos vetores $\overrightarrow{n_k} = (a_k, b_k, c_k)$, $k = 1, 2, 3$.

Do ponto de vista geométrico, existem oito possibilidades para a posição relativa entre os planos π_1, π_2 e π_3:

(G1) Os três planos coincidem: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$;

(G2) Dois dos planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles: $\pi_1 = \pi_2$ e $\pi_3 \cap \pi_1 = \varnothing$;

(G3) Os planos são paralelos dois a dois: $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \varnothing$ e $\pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$;

(G4) Dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta ao longo de uma reta ℓ: $\pi_1 = \pi_2$ e $\pi_3 \cap \pi_1 = \ell$;

(G5) Dois dos planos são paralelos e o terceiro os intersecta segundo retas paralelas ℓ_1 e ℓ_2: $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \ell_1$ e $\pi_2 \cap \pi_3 = \ell_2$;

(G6) Os três planos são distintos e se intersectam ao longo de uma reta ℓ: $\pi_1 \neq \pi_2$, $\pi_1 \neq \pi_3$, $\pi_2 \neq \pi_3$ e $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \ell$;

(G7) Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas entre si: $\pi_1 \cap \pi_2 = \ell_1$, $\pi_2 \cap \pi_3 = \ell_2$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \ell_3$, $\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$;

(G8) Os três planos têm um único ponto em comum: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$;

Por outro lado, sob o ponto de vista algébrico, há apenas oito alternativas possíveis a respeito dos vetores linha $\overrightarrow{n_i} = (a_i, b_i, c_i)$ e os termos independentes d_i, $i = 1, 2, 3$, das equações do sistema (18.6):

(A1) Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_3} = \mu\overrightarrow{n_1}$, $d_2 = \lambda d_1$ e $d_3 = \mu d_1$;

(A2) Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_3} = \mu\overrightarrow{n_1}$ e $d_2 = \lambda d_1$, mas $d_3 \neq \mu d_1$;

(A3) Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_3} = \mu\overrightarrow{n_1}$, mas $d_2 \neq \lambda d_1$, $d_3 \neq \mu d_1$ e $d_3 \neq \dfrac{\mu}{\lambda} d_2$;

(A4) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$ e $d_2 = \lambda d_1$, mas $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_3}$ não são múltiplos;

(A5) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$, mas $d_2 \neq \lambda d_1$ e $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_3}$ não são múltiplos;

(A6) Nenhum dos vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ é múltiplo do outro, mas existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{n_3} = \lambda\overrightarrow{n_1} + \mu\overrightarrow{n_2}$ e $d_3 = \lambda d_1 + \mu d_2$;

(A7) Os vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ são dois a dois não colineares, mas existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{n_3} = \lambda\overrightarrow{n_1} + \mu\overrightarrow{n_2}$ e $d_3 \neq \lambda d_1 + \mu d_2$;

(A8) Os vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ são LI.

PROPOSIÇÃO 3

As posições relativas $\overline{\textbf{G1}} - \overline{\textbf{G8}}$ entre os três planos π_1, π_2 e π_3 representados pelas equações correspondentes do sistema (18.6) equivalem, respectivamente, às alternativas algébricas $\overline{\textbf{A1}} - \overline{\textbf{A8}}$ para os vetores linha $\overrightarrow{n_i} = (a_i, b_i, c_i)$ e os termos independentes d_i, $i = 1, 2, 3$, das equações do sistema (18.6).

DEMONSTRAÇÃO

As equivalências $\overline{\textbf{Ai}} \Longleftrightarrow \overline{\textbf{Gi}}$, $i = 1, \ldots, 5$, seguem diretamente das equivalências **(Aj)**$\Longleftrightarrow$**(Bj)**, $j = 1$, 2, 3, da Proposição 1, aplicadas aos pares de planos π_1 e π_2, π_1 e π_3, π_2 e π_3, do sistema (18.6). (Figuras 18.5 a 18.9).

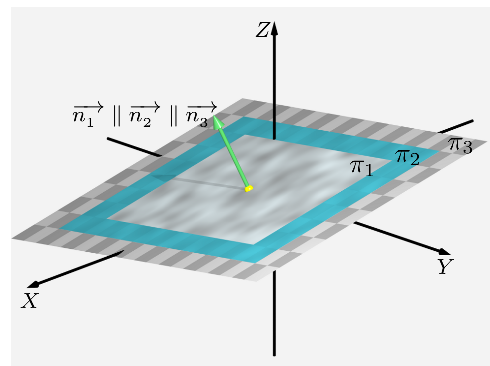

Figura 18.5: $\overline{\text{G1}}$: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

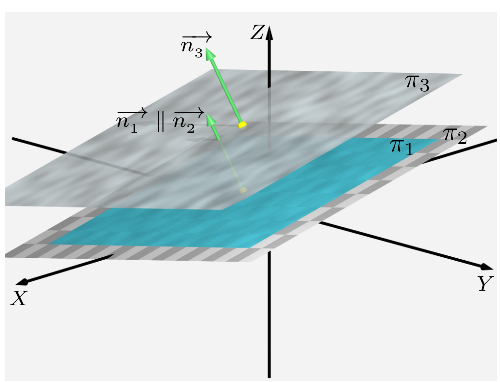

Figura 18.6: $\overline{\text{G2}}$: $\pi_1 = \pi_2$ e $\pi_1 \parallel \pi_3$

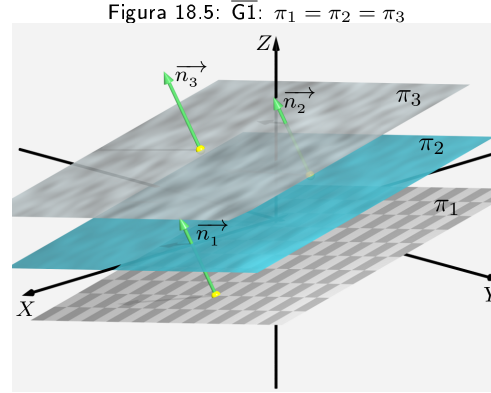

Figura 18.7: $\overline{\text{G3}}$: $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \parallel \pi_3$ e $\pi_2 \parallel \pi_3$

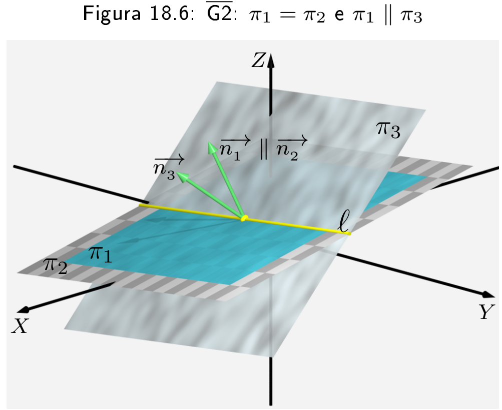

Figura 18.8: $\overline{\text{G4}}$: $\pi_1 = \pi_2$ e $\pi_1 \cap \pi_3 = \ell$

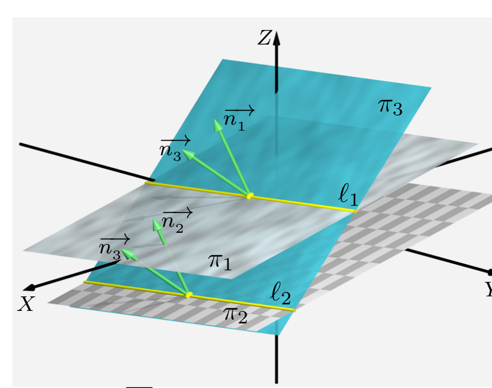

Figura 18.9: $\overline{\text{G5}}$: $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \ell_1 \parallel \ell_2 = \pi_2 \cap \pi_3$

Resta, ainda, mostrar as equivalências $\overline{\text{Ai}} \Longleftrightarrow \overline{\text{Gi}}$, $i = 6, 7, 8$.

$\overline{\text{A6}}\implies\overline{\text{G6}}$ Suponhamos que os vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ são dois a dois não colineares. Pela implicação **G3 $\implies$ A3** da Proposição 1, os planos π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta ℓ.

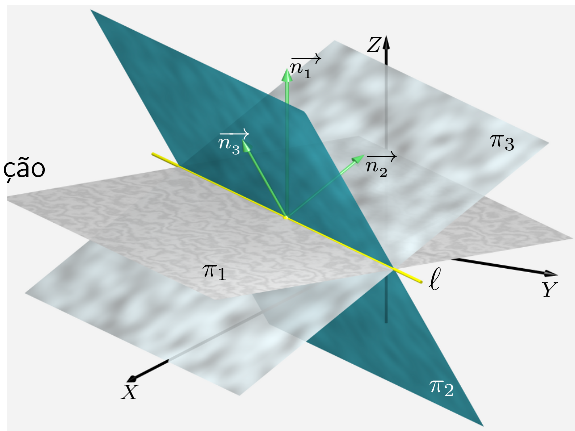

Figura 18.10: $\overline{\text{G6}}$: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \ell$

Sejam $P = (x, y, z)$ um ponto da reta $\ell = \pi_1 \cap \pi_2$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned}
& a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\
\implies\ & \lambda a_1x + \lambda b_1y + \lambda c_1z = \lambda d_1 \quad \text{e} \quad \mu a_2x + \mu b_2y + \mu c_2z = \mu d_2 \\
\implies\ & (\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2)z = \lambda d_1 + \mu d_2.
\end{aligned}$$

Se, além disso, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{n_3} = \lambda\overrightarrow{n_1} + \mu\overrightarrow{n_2}$ e $d_3 = \lambda d_2 + \mu d_1$, então $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ e, portanto, $P \in \pi_3$. Logo, $\ell \subset \pi_3$. Como os planos π_1 e π_3, pela Proposição 1, também se intersectam ao longo de uma reta e $\ell \subset \pi_1 \cap \pi_3$, obtemos que $\pi_1 \cap \pi_3 = \ell$. Então, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \ell$ (Figura 18.10).

$\overline{\text{A7}}\implies\overline{\text{G7}}$ Pelo provado acima, π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta ℓ_1 e essa reta não intersecta o plano π_3, pois, por hipótese, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{n_3} = \lambda\overrightarrow{n_1} + \mu\overrightarrow{n_2}$, mas $d_3 \neq \lambda d_1 + \mu d_2$. Logo, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$.

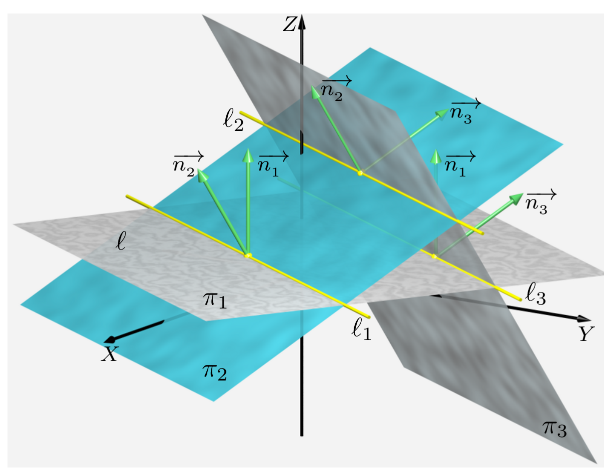

Figura 18.11: $\overline{\text{G7}}$: $\pi_1 \cap \pi_2 = \ell_1$, $\pi_2 \cap \pi_3 = \ell_2$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \ell_3$, $\ell_1 \parallel \ell_2$, $\ell_2 \parallel \ell_3$ e $\ell_1 \parallel \ell_3$

Sejam ℓ_2 e ℓ_3 as retas tais que $\pi_2 \cap \pi_3 = \ell_2$ e $\pi_1 \cap \pi_3 = \ell_3$. Como $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$, segue que $\ell_1 \cap \ell_2 = \ell_1 \cap \ell_3 = \ell_2 \cap \ell_3 = \varnothing$, ou seja, as retas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são duas a duas paralelas.

$\overline{\text{A8}}\implies\overline{\text{G8}}$ Como os vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ são LI, temos que

$$[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}] = \langle \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3} \rangle \neq 0.$$

Em particular, nenhum desses vetores é múltiplo do outro. Logo, pela Observação 2, $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. E, sendo $\langle \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3} \rangle \neq 0$, temos, pela Proposição 13 do Capítulo 17, que $r \cap \pi_3$ consiste de um único ponto P. Logo $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$ (Figura 18.12).

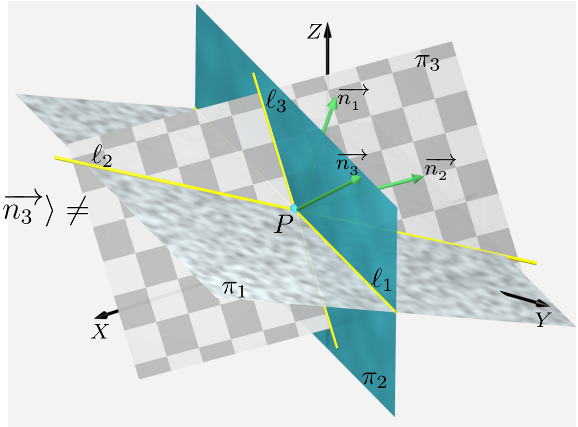

Figura 18.12: Posição $\overline{\text{G8}}$

Uma vez que as posição relativas $\overline{\text{G1}}$ – $\overline{\text{G8}}$ dos planos π_1, π_2 e π_3 se excluem mutuamente e as alternativas algébricas $\overline{\text{A1}}$ – $\overline{\text{A8}}$ esgotam todas as possibilidades, as implicações $\overline{\text{Gi}} \Longrightarrow \overline{\text{Ai}}$, para todo $i = 1, \ldots, 8$, são também verdadeiras.

Suponhamos, por exemplo que vale $\overline{\text{G8}}$, isto é, que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ consiste de um único ponto. Então, nenhum dos vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ é múltiplo do outro, pois, caso contrário, satisfariam a uma das condições dadas por $\overline{\text{A1}}$ – $\overline{\text{A5}}$ e o sistema seria, portanto, impossível ou indeterminado. Não pode ocorrer também que um dos vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ seja combinação linear dos outros dois, pois, neste caso, teríamos, pelas implicações $\overline{\text{A6}} \Longrightarrow \overline{\text{G6}}$ e $\overline{\text{A7}} \Longrightarrow \overline{\text{G7}}$, que o sistema seria indeterminado ou impossível. Assim, como nenhum dos vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ é combinação linear dos outros dois, obtemos que eles são LI.

Observação 4

Um sistema de três equações lineares com três incógnitas é **homogêneo** quando todos os termos independentes são iguais a zero:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases} \tag{18.7}$$

Note que um sistema linear homogêneo sempre possui a **solução trivial** $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Então, decorre da Proposição 3, que o sistema (18.7) possui apenas a solução trivial se, e só se, o determinante da matriz A do sistema é diferente de zero, isto é, se, e só se, os seus vetores linha são LI.

Equivalentemente, o sistema homogêneo possui uma solução não trivial se, e só se, $\det A = 0$. Neste caso, o conjunto solução são os pontos do plano π_1 que passa pela origem, quando $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$, e são os pontos da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ que passa pela origem, nos outros casos, onde $\pi_i : a_i x + b_i y + c_i z = 0$, $i = 1, 2, 3$, são os planos representados pela equações do sistema.

Antes de darmos alguns exemplos, provaremos a seguinte aplicação geométrica da equivalência $\overline{\text{A8}} \Longleftrightarrow \overline{\text{G8}}$.

Proposição 5

Por quatro pontos não coplanares no espaço passa uma única esfera.

Demonstração

Se existir uma esfera $\mathcal{S}$ de centro P_0 e raio $R > 0$ que passa pelos pontos não coplanares A, B, C e D, devemos ter $d(A, P_0) = d(B, P_0) = d(C, P_0) = d(D, P_0) = R$, ou seja, o centro P_0 da esfera $\mathcal{S}$ é um ponto equidistante dos pontos A, B, C e D.

Sejam π_1 o conjunto dos pontos equidistantes de A e B, π_2 o conjunto dos pontos equidistantes de A e C e π_3 o conjunto dos pontos equidistantes de A e D. Pelo Exemplo 3, do Capítulo 13, π_1 é o plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$ que passa pelo ponto médio do segmento AB, π_2 é o plano normal ao vetor $\overrightarrow{AC}$ que contém o ponto médio do segmento AC e π_3 é o plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AD}$ que contém o ponto médio do segmento AD.

Como os pontos A, B, C e D não são coplanares, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são LI. Logo, pela equivalência $\overline{\text{A8}} \Longleftrightarrow \overline{\text{G8}}$, os planos π_1, π_2 e π_3 se intersectam num único ponto P_0.

Assim, a esfera $\mathcal{S}$ de centro P_0 e raio $R = d(A, P_0)$ é a única esfera que passa pelos pontos não coplanares A, B, C e D.

Exemplo 3

Analise o sistema, exibindo o seu conjunto solução.

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - y + z = 2\,. \end{cases}$$

Solução. Sejam $\overrightarrow{n_1} = (2, -2, -3)$, $\overrightarrow{n_2} = (1, -2, 3)$ e $\overrightarrow{n_3} = (1, -1, 1)$ os vetores normais dos planos $\pi_1 : 2x - 2y - 3z = 1$, $\pi_2 : x - 2y + 3z = 0$ e

$\pi_3 : x - y + z = 2$ representados pelas equações do sistema. Estes vetores são LI, pois

$$\Delta = \det(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -5\,.$$

Logo, o sistema tem uma única solução $P = (x, y, z)$, cujas coordenadas podem ser obtidas, por exemplo, usando a regra de Cramer:

$$x = \frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } z = \frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculando os determinantes, obtemos:

$$x = \frac{23}{5}\,, \quad y = \frac{16}{5} \quad \text{e} \quad z = \frac{3}{5}\,.$$

Vamos obter agora uma solução geométrica mais simples do sistema.

Pela Observação 2, $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (-12, -9, -2)$. Fazendo $z = 0$ nas equações dos planos π_1 e π_2, obtemos $x = 1$ e $y = \frac{1}{2}$. Logo, $A = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ é um ponto da reta r, cujas equações paramétricas são, portanto,

$$x = -12t + 1, \quad y = -9t + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z = -2t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo as coordenadas de um ponto $P = \left(-12t + 1, -9t + \frac{1}{2}, -2t\right)$ da reta r na equação do plano π_3, obtemos que $P \in r \cap \pi_3$ se, e só se,

$$(-12t + 1) - \left(-9t + \frac{1}{2}\right) + (-2t) = 2.$$

Logo, $t = -\frac{3}{10}$ e, portanto, $P = \left(\frac{36}{10} + 1, \frac{27}{10} + \frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{23}{5}, \frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Exemplo 4

Determine a interseção entre os planos

$$\pi_1 : x + y + z = 2, \quad \pi_2 : x - y - z = 0 \quad \text{e} \quad \pi_3 : 3x - y - z = 2.$$

Solução. Sejam $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, -1)$ e $\overrightarrow{n_3} = (3, -1, -1)$ vetores normais aos planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente.

Como $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (0, 2, -2) \neq (0, 0, 0)$, obtemos, pela Observação 2, que π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta r paralela ao vetor $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. Fazendo $y = 0$ nas equações dos planos π_1 e π_2, obtemos $x = 1$ e $z = 1$. Então, o ponto $A = (1, 0, 1)$ pertence à reta r, cujas equações paramétricas são

$$x = 1, \quad y = 2t \quad \text{e} \quad z = -2t + 1; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo as coordenadas de um ponto $P = (1, 2t, -2t + 1)$ da reta r na equação do plano π_3, obtemos

$$3 \cdot 1 - 2t - (-2t + 1) = 2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $r \subset \pi_3$ e, portanto, π_1, π_2 e π_3 se intersectam ao longo da reta r.

Observe que $\overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{n_1} + 2\overrightarrow{n_2}$ e que $d_3 = d_1 + 2d_2$, onde $d_1 = 2$, $d_2 = 0$ e $d_3 = 2$ são os termos independentes das equações dos planos π_1, π_2 e π_3.

Logo, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$, d_1, d_2 e d_3 satisfazem à alternativa $\overline{\text{A6}}$. Portanto, pela Proposição 3, os planos π_1, π_2 e π_3 se encontram na posição relativa $\overline{\text{G6}}$, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ é uma reta.

EXEMPLO 5

Obtenha os possíveis valores para α e β de modo que os planos

$$\pi_1 : 2x + \alpha y + z = 1, \quad \pi_2 : x - y + 3z = 0 \quad \text{e} \quad \pi_3 : x - y + z = \beta.$$

(a) se intersectem, dois a dois, ao longo de três retas paralelas;

(b) se intersectem ao longo de uma reta.

Solução. Sejam $\overrightarrow{n_1} = (2, \alpha, 1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, 3)$ e $\overrightarrow{n_3} = (1, -1, 1)$ os vetores normais aos planos π_1, π_2 e π_3. É fácil verificar que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, nenhum desses vetores é múltiplo do outro. Para eles serem LD, devemos ter:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 2\alpha = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \alpha = -2.$$

Então, para $\alpha = -2$, $\overrightarrow{n_1}$ é combinação linear de $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$, isto é, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{n_1} = a\overrightarrow{n_2} + b\overrightarrow{n_3} \\ \iff & (2, -2, 1) = a(1, -1, 3) + b(1, -1, 1) \\ \iff & a + b = 2\,, \quad -a - b = -2\,, \quad 3a + b = 1. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 1, \end{cases}$$

obtemos $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{5}{2}$. Logo, $\overrightarrow{n_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{n_2} + \frac{5}{2}\overrightarrow{n_3}$.

Finalmente, analisando os termos independentes $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ e $d_3 = \beta$ das equações que representam os planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente, obtemos, pela equivalência $\overline{\text{A6}} \Longleftrightarrow \overline{\text{G6}}$, que π_1, π_2 e π_3 se intersectam ao longo de uma reta se, e só se, $1 = d_1 = -\frac{1}{2}d_2 + \frac{5}{2}d_3 = -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{5}{2}\beta = \frac{5}{2}\beta$, ou seja, se, e só se, $\beta = \frac{2}{5}$. Então, pela equivalência $\overline{\text{A7}} \Longleftrightarrow \overline{\text{G7}}$, os planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras se, e somente se, $\beta \neq \frac{2}{5}$.

Exemplo 6

Encontre a equação da esfera $\mathcal{S}$ que passa pelos pontos $A = (-1, 2, 3)$, $B = (1, 4, -1)$, $C = (3, -2, -1)$ e $D = (0, 4, 1)$.

Solução. Sejam π_1, π_2 e π_3 os conjuntos dos pontos equidistantes dos pontos A e B, A e C, e A e D, respectivamente. Então, π_1 é o plano normal ao vetor $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -4)$ que passa pelo ponto médio $M_{AB} = (0, 3, 1)$ do segmento AB, π_2 é o plano normal ao vetor $\overrightarrow{AC} = (4, -4, -4)$ que contém o ponto médio $M_{AC} = (1, 0, 1)$ do segmento AC, e π_3 é o plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AD} = (1, 2, -2)$ que passa pelo ponto médio $M_{AD} = \left(-\frac{1}{2}, 3, 2\right)$ do segmento AD. Assim, $\pi_1 : 2x+2y-4z = 2$, $\pi_2 : 4x-4y-4z = 0$ e $\pi_3 : x+2y-2z = \frac{3}{2}$.

Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares, $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-24, -8, -16)$. Fazendo $z = 0$ nas equações dos planos π_1 e π_2, obtemos $x = y = \frac{1}{2}$. Logo, $E = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ é um ponto da reta r e, portanto

$$x = -24t + \frac{1}{2}, \quad y = -8t + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z = -16t; \quad t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da reta r.

O centro P_0 da esfera $\mathcal{S}$ é o ponto onde a reta r intersecta o plano π_3. Para obtermos P_0, devemos substituir as coordenadas $x = -24t + \frac{1}{2}$, $y = -8t + \frac{1}{2}$ e $z = -16t$, de um ponto da reta r, na equação do plano $\pi_3 : x + 2y - 2z = \frac{3}{2}$:

$$\left(-24t + \frac{1}{2}\right) + 2\left(-8t + \frac{1}{2}\right) - 2(-16t) = \frac{3}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad -8t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow t = 0.$$

Então, $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ é o centro,

$$R = d(A, P_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \sqrt{\frac{27}{2}}$$

é o raio e

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{27}{2}$$

é a equação da única esfera $\mathcal{S}$ que passa pelos pontos não coplanares A, B, C e D.

18.4 Exercícios

1. Determine todos os pontos de interseção dos planos

   (a) $\pi_1 : 3x + y = 2$ e $\pi_2 : x + y - 3z = 0$;

   (b) $\pi_1 : x + y + z = 1$ e $\pi_2 : x + y - z = 1$;

   (c) $\pi_1 : 2x - y + 2z = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y - z = 1$.

2. Sejam os planos $\pi_1 : 3x - 2y + az = b$ e $\pi_2 : ax + 2y + 3z = 1$. Descreva a posição relativa entre os planos π_1 e π_2 em termos de a e b.

3. Ache o conjunto solução do sistema e determine em qual dos casos, $\overline{\text{G1}}$ a $\overline{\text{G8}}$, ele se enquadra:

   (a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ -2x - 4y + 2z = -6\,. \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 4x + 2y + 2z = -2 \\ x + y + 2 = 0\,. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 3x + y + 5z = 1 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ 2x - 3y + z = 0\,. \end{cases}$ **(d)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + y + 3z = 2\,. \end{cases}$

4. Considere os planos $\pi_1 : ax + by + z = 0$, $\pi_2 : x - y + 2z = -2$ e $\pi_3 : x + y - z = 1$.

   Obtenha todos os valores de a e b, caso existam, de modo que a interseção dos planos π_1, π_2 e π_3 seja:

   (a) um único ponto;

   (b) uma reta;

   (c) o conjunto vazio.

5. Que relação deve haver entre λ, α e γ para que o sistema

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = \lambda \\ x + y + z = \alpha \\ -x + 4y + z = \gamma \end{cases}$$

   possua solução?

6. Mostre que o sistema abaixo possui uma única solução quaisquer que sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 3y + z = b \\ 2x + 9y + 3z = c \\ ax + y + 2z = d. \end{cases}$$

7. Encontre os números reais λ, α e γ a fim de que o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} \lambda x + \alpha y + 2z = 2\gamma \\ x + y - z = 2\gamma \\ 3x + 2y + z = \gamma \end{cases}$$

seja uma reta que passa pelo ponto $A = (0, 1, -1)$.

8. Determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema abaixo tem uma única solução e obtenha essa solução em função do parâmetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x - 2y - z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

9. Ache a equação da esfera $\mathcal{S}$ que passa pelos pontos $A = (3, 5, 1)$, $B = (5, 1, -1)$, $C = (1, -1, 3)$ e $D = (7, 3, 1)$.

10. Considere os planos $\pi_1 : mx - ny + z = 2$ e $\pi_2 : nx - my + nz = 4$, onde $m, n \in \mathbb{R}$. Determine $m, n \in \mathbb{R}$, de modo que

(a) π_1 e π_2 sejam paralelos;

(b) $\pi_1 \cap \pi_2$ seja uma reta que passa pelo ponto $A = (0, 0, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, 1, -1)$.

11. Ache as equações das esferas de raio igual a $\sqrt{20}$ que contêm os pontos $A = (3, 0, 5)$, $B = (1, 2, 1)$ e $C = (-1, 0, 1)$.

12. Considere os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 4, 3)$ e o plano $\pi : x - y + z = 1$. Determine:

(a) o conjunto dos pontos equidistantes de A e B;

(b) o ponto $C = (x, y, z)$ pertencente a π tal que $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{11}$ e $x + y - 2z < 0$;

(c) a área do triângulo de vértices A, B e C, e o plano que contém esse triângulo.

13. Prove as implicações $\overline{\text{G6}} \Longrightarrow \overline{\text{A6}}$ e $\overline{\text{G7}} \Longrightarrow \overline{\text{A7}}$, usando apenas a Proposição 1 e a Observação 2.

14. Encontre todas as soluções do sistema de três equações lineares com quatro incógnitas x, y, z e t, em função da variável t:

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 7 \\ 2x + 3y - z + 2t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 5t = 4. \end{cases}$$

15. Dê uma condição algébrica necessária e suficiente para que quatro planos no espaço se intersectem

(a) ao longo de uma reta;

(b) dois a dois ao longo de quatro retas paralelas.

16. Sejam $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\overrightarrow{n_3} = (a_3, b_3, c_3)$ vetores LI. Prove que o sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4 \end{aligned}$$

admite solução se, e somente se, existem constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que o vetor $\overrightarrow{n_4} = (a_4, b_4, c_4)$ e o escalar d_4 satisfazem:

$$\overrightarrow{n_4} = \alpha\overrightarrow{n_1} + \beta\overrightarrow{n_2} + \gamma\overrightarrow{n_3} \quad \text{e} \quad d_4 = \alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3.$$

◇