



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Classificação de Cônicas e Quádricas
em Função da Equação Algébrica

Eduardo dos Santos Peres

RIO DE JANEIRO

2014

Eduardo dos Santos Peres

Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Programa de Pós-graduação em Matemática
PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Silas Fantin
Doutor em Matemática – UNIRIO

Rio de Janeiro
2014

Peres, Eduardo dos Santos

Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica
/ Eduardo dos Santos Peres – 2014

95. p.

1. Matemática 2. Álgebra. I. Título

CDU 536.21

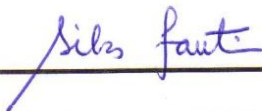
Eduardo dos Santos Peres

CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS
EM FUNÇÃO DA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

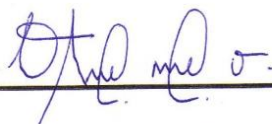
Trabalho Final de Curso apresentado a Coordenação de Pós-Graduação *Stricto-sensu* da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática pelo Programa PROFMAT.

Aprovada em 19 de agosto de 2014.

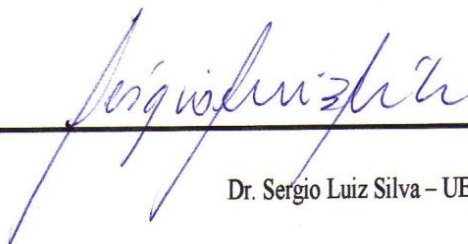
BANCA EXAMINADORA



Dr. Silas Fantin – UNIRIO – Orientador



Dra. Cristiane de Melo - UNIRIO



Dr. Sergio Luiz Silva – UERJ

Dedicatória

À minha amada esposa Suelaine que me apoiou em todos os momentos e foi imprescindível para a conclusão deste curso. Aos meus pais Neemias e Creusa que, mesmo diante das dificuldades, sempre priorizaram a minha educação e a de meu irmão Emerson. Em especial, ao meu avô Antônio José dos Santos que, mesmo sem ter a oportunidade de estudar, sempre gostou e se identificou muito com a Matemática, incentivando-me a prosseguir nesta caminhada.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso do programa de Pós-Graduação em matemática PROFMAT da UNIRIO, apresentamos um resumo histórico sobre o estudo das cônicas (circunferências, elipses, parábolas e hipérbolas) e superfícies quádricas (parabolóides, elipsóides, hiperbolóides e cones), e nosso objetivo principal é estudar um método de classificação das mesmas através de suas equações algébricas.

Nesta dissertação abordamos também os pré-requisitos necessários para que o leitor, com pouca familiaridade no assunto, possa compreender cada etapa de seu desenvolvimento. Como gostaríamos que esta monografia fosse apreciada por alunos do Ensino Médio, houve uma grande preocupação com a linguagem utilizada.

Alunos de graduação também encontrarão aqui uma fonte de consulta para parte de seus estudos. Ao final do trabalho há uma proposta de algumas atividades (bem como as soluções das mesmas) que podem ser desenvolvidas em sala de aula, além de um artigo extraído da Revista do Professor de Matemática (RPM) que relata a experiência de um professor aplicando uma aula sobre cônicas para uma turma de Ensino Médio.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho foi utilizado o software gratuito Geogebra, além de algumas imagens obtidas através da internet.

Palavras-chaves: Apolônio, forma quadrática, classificação de cônicas e quádricas.

Abstract

In this conclusion work of the Postgraduate Course in Mathematics PROFMAT UNIRIO program, we present a historical overview of the study of conics (circles, ellipses, parabolas and hyperbolas) and quadric surfaces (paraboloids, ellipsoids, hyperboloids and cones), and our main goal is to study a method of classification of the same through their algebraic equations.

On this dissertation we also approach the necessary pre-requisites to the reader with little familiarity on the subject, can be able to understand each stage of its development. How we wish that high school students could appreciate this monograph, there was a great concern with the language used.

Graduate students will also find here a source of consultation for part of their studies. At the end of the work there are some proposed activities (as well as their solutions) these activities may be developed in the classroom, beyond an article reprinted from the Mathematics Teacher (RPM) that relates the experience of a teacher applying a lesson on conic to a high school class.

During the development of this work free software GeoGebra was used, some images taken over the internet were also used.

Keywords: Apollonius, quadratic form, classification of conics and quadrics.

Agradecimentos

Primordialmente ao Senhor Deus Todo Poderoso pois a Ele toda honra, toda glória e todo louvor, por ter me concedido saúde e forças para cumprir cada etapa deste curso que foi e será tão importante em minha vida. (*"Não a nós, Senhor, não a nós, mas ao teu nome dá glória, por amor da tua benignidade e da tua verdade."* Salmos 115.1)

À minha amada esposa que, mesmo privada de minha presença por várias vezes, me deu todo apoio, carinho e compreensão para ultrapassar as dificuldades encontradas.

Aos meus pais, familiares e amigos que me incentivaram a continuar estudando.

À minha inesquecível turma de mestrado que, sem sombra de dúvida, foi a melhor, mais divertida e mais unida de todos os tempos.

Em especial, aos amigos Marcos José e Manoela Oliveira - efetivos - (além dos outros amigos) pelos vários dias e noites de estudo valorosos com os quais aprendi muito e foram essenciais para minha formação.

Aos professores da UNIRIO que se mostraram mais que docentes, foram companheiros e amigos durante todo o curso.

Em especial, ao professor Silas Fantin pelo extraordinário apoio durante todo o curso e na valiosa orientação deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Ao professor Humberto Bortolossi da UFF pelas figuras de superfícies quádricas utilizadas nesta monografia.

Aos professores Cristiane de Melo (UNIRIO) e Sergio Luiz Silva (UERJ) por participarem da banca Examinadora e pelas sugestões para aprimoramento do texto.

À CAPES, pelo suporte financeiro, que permitiu a realização deste trabalho.

Aos demais amigos e colaboradores, neste momento anônimos, o meu (não menor) muito obrigado.

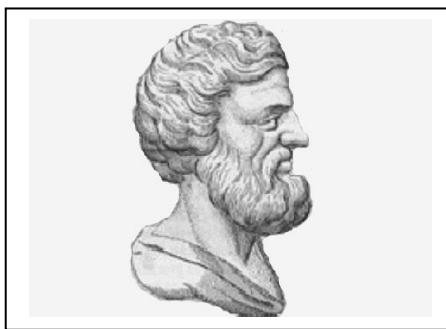
SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
CAPITULO 1 – PRÉ-REQUISITOS	12
1.1 – Conceitos Preliminares	12
1.2 – Mudança de Referencial Cartesiano	16
1.3 – Autovalores e Autovetores de uma Matriz	18
1.4 – Ortogonalização de Vetores	28
1.5 – Teorema Espectral para Matrizes Simétricas	34
1.6 – Processo de Ortogonalização de Forma Quadrática	40
CAPITULO 2 – CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS	44
2.1 – Equação geral de um plano e uma cônica	44
2.2 – Diagonalização de Formas Quadráticas	51
2.3 – Procedimento Geral de classificação das cônicas	54
CAPITULO 3 – CLASSIFICAÇÃO DE QUÁDRICAS	61
3.1 – Superfícies Cilíndricas	62
3.2 – Formas quadráticas de superfícies Cilíndricas	64
3.3 – Parabolóides	68
3.4 – Elipsóides	71
3.5 – Hiperbolóides e cones	72
3.6 – Formas quadráticas de Parabolóides, Elipsóides, Hiperbolóides e cones	75
CAPITULO 4 – ATIVIDADES PROPOSTAS	81
4.1 – Artigo da RPM	81
4.2 – Raízes de polinômios com coeficientes inteiros	85
4.3 – Sugestões de atividades	86
CONCLUSÃO	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95

INTRODUÇÃO

Nesta monografia abordaremos o estudo das cônicas e quádricas. A história da Matemática nos mostra que o interesse pelo seu estudo é bem antigo. Os historiadores atribuem ao matemático Menaecmus (380 – 320 a.C. aproximadamente), discípulo de Eudócio na Academia de Platão, a descoberta das *curvas cônicas* ou *seções cônicas* quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que as *elipses*, as *hipérbolas* e as *parábolas* são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base.

Nos escritos de Pappus de Alexandria (350 – 290 a.C., aproximadamente), credita-se ao geômetra grego Aristeu (370 – 300 a.C.) a publicação do primeiro tratado sobre seções cônicas. Mais tarde, o astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra *Seções Cônicas*. Sabe-se pouco sobre a vida de Apolônio de Perga, sul da Ásia Menor. Sugere-se que viveu de 262 a 190 a.C. – parece ter-se considerado um cordial rival de Arquimedes. Supõe-se ter sido educado em Alexandria e por algum tempo ter ensinado em sua “Universidade”. Graças ao apoio de Lisímaco, general de Alexandre, transferiu-se para Pérgamo (donde a palavra pergaminho), onde havia uma biblioteca e uma “Universidade” só inferiores às de Alexandria.



Apolônio de Perga

Apolônio, e não Euclides, mereceu dos antigos o epíteto de o *Grande Geômetra* e isto pode nos parecer inaceitável. A verdade é que não se pode questionar o mérito de ambos. Euclides tornou-se sinônimo de geometria por sua amplamente conhecida obra *Os Elementos* enquanto a maior parte das obras de Apolônio desapareceu.

Apesar de sua produtividade científica, apenas dois dos muitos tratados de Apolônio se preservaram em grande parte. Todas as versões gregas de *Dividir segundo uma razão* se perderam há muito tempo, mas não antes de ser feita uma tradução árabe. Em 1706 Halley, amigo de Newton, publicou uma tradução da obra para o latim, e depois disso apareceu em línguas atuais. Além desse tratado, só uma obra de Apolônio se preservou substancialmente, mas essa foi certamente sua obra-prima – *As cônicas*. Dessa obra famosa só metade – os quatro primeiros dos oito livros de que se compunha

– existe ainda em grego; felizmente, um matemático árabe, *Thabit ibn Qurra*, tinha traduzido os três seguintes, e daí então apareceram edições em muitas línguas.

As seções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. Pelo menos duas vezes nesse intervalo de tempo tinham sido escritas exposições gerais – por Aristeu e por Euclides – mas assim como *Os elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível avançado o tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os rivais no campo de seções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os elementos* de Euclides e *As Cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras de seus campos.

No primeiro capítulo deste texto estudaremos os pré-requisitos algébricos e geométricos que serão necessários para compreensão dos assuntos abordados. Apresentaremos algumas proposições, teoremas e exemplos que contribuirão para alcançar o objetivo deste trabalho.

No segundo capítulo dissertaremos sobre o estudo das cônicas – definições e equações algébricas. Apresentaremos um procedimento algébrico para classificação de uma cônica através de sua equação. Para tanto, autovalores e autovetores serão usados para “normalizar” formas quadráticas. Mais especificamente, eles serão usados para encontrar mudanças de referencial que permitam identificar quais figuras geométricas são representadas por certas equações no plano.

No terceiro capítulo trataremos das superfícies quádricas. De maneira análoga ao que será feito no segundo capítulo, apresentaremos as definições e equações algébricas relacionadas às quádricas, bem como um processo de classificação através de suas equações. Mais uma vez, utilizaremos autovalores e autovetores para “normalizar” formas quadráticas e auxiliar na tarefa de identificar a figura geométrica que representa uma equação no espaço.

No quarto capítulo apresentaremos um artigo publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM) que traz o relato de um professor durante uma de suas aulas sobre as cônicas; também propomos algumas sugestões de atividades (e soluções) que envolvem os estudos realizados com as cônicas e as superfícies quádricas que podem ser aplicadas em sala de aula para alunos do Ensino Médio.

CAPÍTULO 1: PRÉ-REQUISITOS

O presente capítulo destina-se a apresentar os pré-requisitos que serão necessários para a compreensão deste trabalho.

No decorrer deste texto nos depararemos com equações polinomiais de primeiro e segundo graus. Em alguns casos se fará necessário escrever as equações de segundo grau em forma simplificada para que possamos reconhecer com facilidade a figura geométrica que a equação dada determina, e para isso, às vezes, basta utilizar a técnica de completar quadrados.

1.1 – Conceitos preliminares

Exemplo 1.1: Considere a equação algébrica abaixo e escreva-a em uma forma mais simplificada, completando quadrados.

$$x^2 + 6x + y^2 - 4y + 1 = 0$$

Solução: Para isso, vamos agrupar os termos de mesma variável e isolar o termo independente:

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = -1$$

Agora, adicionamos termos independentes a ambos os lados da igualdade para obter trinômios quadrados perfeitos, preservando a igualdade:

$$(x^2 + 6x + \mathbf{9}) + (y^2 - 4y + \mathbf{4}) = -1 + \mathbf{9} + \mathbf{4}$$

Fatorando os trinômios, encontramos:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 12. \blacksquare$$

Além das retas e circunferências, os matemáticos da antiguidade estudaram outras curvas, geralmente descritas como o lugar geométrico de pontos satisfazendo a certas condições onde, por exemplo, a circunferência de raio r e centro $c = (a, b)$ é o lugar dos pontos no plano cuja distância ao centro $c = (a, b)$ é constante igual a r . Essas curvas especiais eram o recurso empregado na solução de vários problemas e com a introdução do método das coordenadas constatou-se que várias curvas conhecidas desde os primórdios da geometria podiam ser descritas por equações polinomiais onde algumas delas envolviam a noção de distância entre pontos fixados.

Definição 1.2 (Distância entre dois pontos de um plano): Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano π dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY dado.

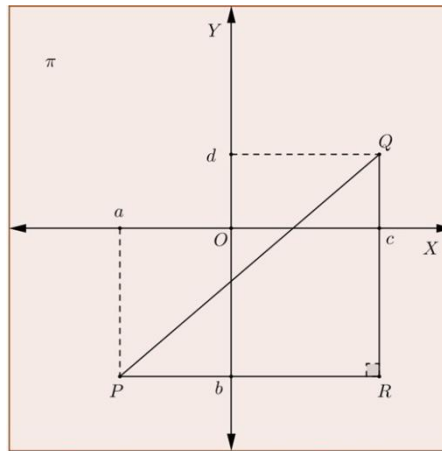


Figura 1.1: Distância entre dois pontos de um plano

Seja $R = (c, b)$ (figura 1.1). A distância de P a Q , que designamos $d(P, Q)$, é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo ΔPQR de catetos PR e QR .

Sendo a distância entre dois pontos de um eixo medida pelo módulo da diferença das suas coordenadas, as medidas desses catetos são, respectivamente,

$$|PR| = |a - c| \quad \text{e} \quad |QR| = |b - d|.$$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{|PR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Assim, a distância de $P = (a, b)$ a $Q = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

Exemplo 1.3: Calcule a distância entre os pontos $A = (2, -3)$ e $B = (-1, 6)$.

Solução: Temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (6 - (-3))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Apresentaremos abaixo algumas definições e exemplos que se fazem necessários para compreensão das etapas de identificação das cônicas e quádricas.

Definição 1.4 (Combinação Linear): Sejam os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) e os números reais a_1, a_2, \dots, a_k . Chamaremos de *combinação linear* dos vetores v_1, v_2, \dots, v_k , o vetor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$ também pertencente a \mathbb{R}^n .

Definição 1.5 (Dependência e Independência Linear): Dados os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) e os números reais a_1, a_2, \dots, a_k , diremos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é *linearmente independente* (LI) se a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0$ implica em $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. Se existir algum $a_i \neq 0$ diremos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é *linearmente dependente* (LD).

Exemplo 1.6: Consideremos os vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,5)$ pertencentes ao \mathbb{R}^2 . Podemos observar que estes dois vetores são LI, pois,

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 = 0 &\Rightarrow a_1(1,2) + a_2(2,5) = (0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 & (1) \\ 2a_1 + 5a_2 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

De (1) temos $a_1 = -2a_2$. Substituindo esta informação em (2), teremos

$$2(-2a_2) + 5a_2 = 0 \Leftrightarrow -4a_2 + 5a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$$

Isto implica $a_1 = 0$.

Exemplo 1.7: Consideremos agora os vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,4)$ pertencentes ao \mathbb{R}^2 . Se tomarmos $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ teremos $a_1(1,2) + a_2(2,4) = (0,0)$.

$$\text{Desta forma, } \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 & (1) \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

De ambas equações podemos obter $a_1 = -2a_2$ e a_1 e a_2 não são necessariamente iguais a zero.

Podemos observar que os vetores dados são múltiplos, isto é, um vetor é combinação linear do outro. Mais claramente, $v_2 = 2v_1$.

Definição 1.8 (Base): Diremos que um conjunto finito de vetores do \mathbb{R}^n é uma base do \mathbb{R}^n se todo vetor $v \in \mathbb{R}^n$ puder ser escrito como combinação linear dos vetores deste conjunto e todos os elementos deste conjunto sejam realmente necessários para gerar \mathbb{R}^n . Em linguagem algébrica, diremos que o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores de \mathbb{R}^n , será uma base de \mathbb{R}^n se:

$$i) \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ é LI;}$$

$$ii) [v_1, v_2, \dots, v_n] = \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 1.9: O conjunto $\beta = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ é claramente uma base do \mathbb{R}^2 , e devido a sua simplicidade é conhecida como *base canônica* de \mathbb{R}^2 . Estes vetores são denominados referencial padrão do plano, pois as coordenadas de um vetor arbitrário $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ nesta base, são dadas pelas coordenadas do próprio vetor

$$v = (x, y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2.$$

Em várias situações se torna viável representar as coordenadas de um vetor em relação a uma base na forma de matriz. Para tanto, apresentaremos a definição de matriz coordenada.

Definição 1.10 (Matriz Coordenada): Sejam $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de \mathbb{R}^n e $v \in \mathbb{R}^n$ onde $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$. Chamamos os números reais a_1, a_2, \dots, a_n de coordenadas de v em relação à base β e denotamos por

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.11: Consideremos o plano \mathbb{R}^2 e sua base canônica $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$. Podemos representar o vetor $v = (6, -8)$ pertencente ao \mathbb{R}^2 em relação à base β :

$$(6, -8) = 6(1,0) - 8(0,1).$$

Portanto, $[(6, -8)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Ao utilizarmos uma base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n , consideraremos que a mesma seja ordenada, ou seja, que os vetores estão ordenados na ordem em que aparecem, visto que a ordem dos elementos de uma base influencia na matriz das coordenadas de um vetor em relação a esta base.

Se denotarmos

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

podemos escrever

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}.$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$ é chamada matriz de mudança de base α para a base β . Comparando $[I]_{\beta}^{\alpha}$ com a expressão em (**) podemos observar que esta matriz é obtida colocando as coordenadas em relação a β de w_i na i -ésima coluna. Observamos ainda que uma vez obtida $[I]_{\beta}^{\alpha}$ podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor v em relação à base β , multiplicando a matriz coordenada de v na base α (supostamente conhecidas).

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.12: Sejam $\beta = \{u_1 = (2, -1), u_2 = (3, 4)\}$ e $\alpha = \{w_1 = (1, 0), w_2 = (0, 1)\}$ bases do \mathbb{R}^2 .

Solução: Procuremos, inicialmente, $[I]_{\beta}^{\alpha}$. Temos:

$$w_1 = (1, 0) = a_{11}(2, -1) + a_{21}(3, 4) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21}).$$

Resolvendo

$$\begin{cases} 2a_{11} + 3a_{21} = 1 \\ -a_{11} + 4a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = \frac{4}{11} \quad e \quad a_{21} = \frac{1}{11}$$

Analogamente

$$w_2 = (0, 1) = a_{12}(2, -1) + a_{22}(3, 4) = (2a_{12} + 3a_{22}, -a_{12} + 4a_{22})$$

Resolvendo

$$\begin{cases} 2a_{12} + 3a_{22} = 0 \\ -a_{12} + 4a_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = \frac{-3}{11} \quad e \quad a_{22} = \frac{2}{11}$$

Portanto,

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Convém observar que $[I]_{\beta}^{\alpha}$ é a inversa da matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$. Sem realizar contas, podemos concluir facilmente que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se $v = (5, -8) \in \mathbb{R}^2$. Então $v = (5)w_1 + (-8)w_2$. Logo $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$. Assim

$$[(5, -8)]_{\beta} = [v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Isto é,

$$(5, -8) = 4u_1 + (-1)u_2 = 4 \cdot (2, -1) + (-1) \cdot (3, 4)$$

Convém observar que se o nosso problema fosse encontrar as coordenadas do vetor $(5, -8)$ em relação à base β , poderíamos simplesmente resolver o sistema

$$(5, -8) = a(2, -1) + b(3, 4).$$

O cálculo feito através da matriz de mudança de base é operacionalmente vantajoso quando trabalharmos com mais vetores, pois neste caso não teremos que resolver um sistema de equações para cada vetor.

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n = 2$ ou $n = 3$, podemos pensar em A como uma aplicação do plano (\mathbb{R}^2) ou do espaço (\mathbb{R}^3) dada por $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $A \cdot v = u$. Estamos interessados em descobrir quais direções ficam invariantes por esta aplicação, isto é, procuramos vetores não nulos no plano (se $n = 2$) ou no espaço (se $n = 3$) que satisfazem a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Em virtude disso, apresentamos a seguinte definição na próxima seção.

1.3 – Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Nesta seção, veremos o conceito de autovalores e autovetores de uma matriz. Este conceito será utilizado na diagonalização de matrizes e na classificação de formas quadráticas.

Definição 1.13 (Autovalores e autovetores de uma matriz): Dada uma matriz quadrada A de ordem $n = 2$ ou $n = 3$ e considerando a aplicação $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Os vetores não nulos ($v \neq 0$) satisfazendo a equação

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, são denominados autovetores de A e os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ são os autovalores de A .

Exemplo 1.14: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Queremos encontrar quais são as direções invariantes pela aplicação $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, isto é, precisamos resolver a equação dada por $A \cdot v = \lambda \cdot v$ para $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq 0$ para determinar os autovalores e autovetores da matriz A . Assim

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

Temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda \cdot x & (1) \\ y = \lambda \cdot y & (2) \end{cases}$$

Temos duas possibilidades a estudar, o caso 1: ($y \neq 0$) e o caso 2: ($y = 0$)

Assumindo o caso 1: ($y \neq 0$)

$$\text{De (2): } y = \lambda \cdot y \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\text{De (1): } 2x + 2y = \lambda \cdot x \Rightarrow 2x + 2y = 1 \cdot x \Rightarrow x = -2y$$

Para o autovalor $\lambda = 1$ os autovetores são do tipo $v = (-2y, y)$ com $y \neq 0$.

Assumindo o caso 2: ($y = 0$)

Neste caso, temos que $x \neq 0$ pois senão o autovetor $v = (x, y)$ seria nulo, o que não pode acontecer pela definição de autovetor. Da equação (1) segue que

$$2x + 2y = \lambda \cdot x \Rightarrow 2x = \lambda \cdot x \Rightarrow \lambda = 2$$

Para o autovalor $\lambda = 2$, os autovetores são do tipo $v = (x, 0)$ com $x \neq 0$.

Concluimos então que, para a aplicação $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

- 1) $v = (-2y, y)$ para $y \neq 0$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$.
- 2) $v = (x, 0)$ para $x \neq 0$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$.
- 3) Todos os outros vetores do plano são levados por A em vetores de direções diferentes.

Veremos que em alguns casos, será necessário encontrar novos eixos ortogonais para representar uma figura no plano cartesiano de modo que sua interpretação fique mais simples. Para tanto, precisaremos da noção de rotação de eixos de um ângulo específico. Determinaremos a Aplicação $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário no plano.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Dado $\alpha \in [0, 2\pi)$, queremos obter a matriz que representa a rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário no plano. Consideremos o vetor $v = (x, y)$ e os pontos

- $P = (x, 0)$, $R = (0, y)$, $Q = (x, y)$
- $P' = (x', 0)$, $R' = (0, y')$, $Q' = (x', y')$

conforme a figura 1.2 abaixo:

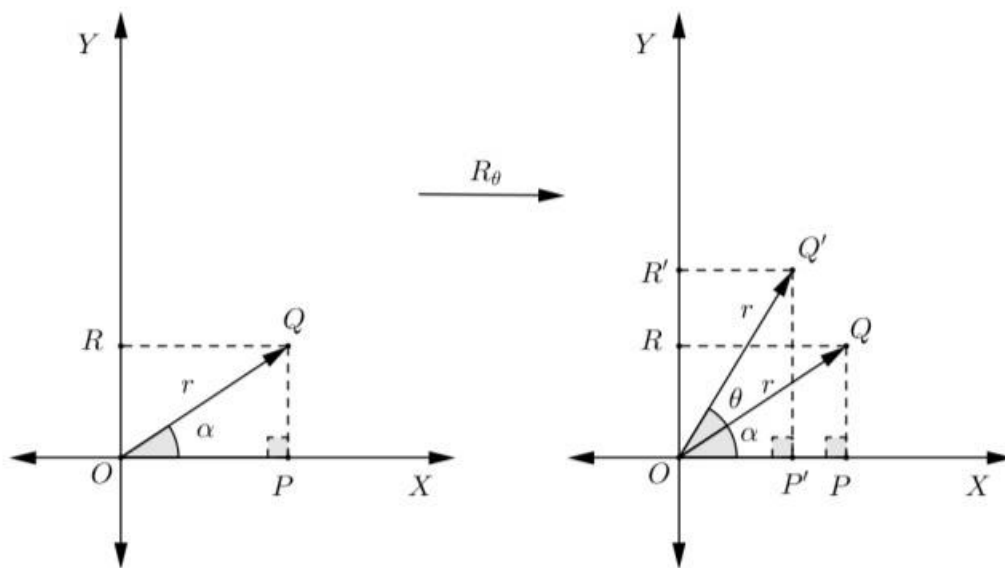


Figura 1.2: Rotação de um ângulo θ

Segue do triângulo retângulo OPQ que

- $\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$
- $\sin \alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \alpha$

Assim

$$\cos(\alpha + \theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cos(\alpha + \theta)$$

$$\Rightarrow x' = r [\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta]$$

$$\Rightarrow x' = (r \cos \alpha) \cos \theta - (r \sin \alpha) \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{x' = x \cos \theta - y \sin \theta}$$

Analogamente, temos do triângulo retângulo $OP'Q'$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \theta) &= \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \operatorname{sen}(\alpha + \theta) \\ &\Rightarrow y' = r [\operatorname{sen} \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \alpha] \\ &\Rightarrow y' = (r \operatorname{sen} \alpha) \cos \theta + (r \cos \alpha) \operatorname{sen} \theta \\ &\Rightarrow \boxed{y' = y \cos \theta + x \operatorname{sen} \theta}.\end{aligned}$$

Desta forma, temos:

$$R_\theta(x, y) = (x', y') = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, y \cos \theta + x \operatorname{sen} \theta).$$

Escrevendo na forma matricial, temos que:

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ y \cos \theta + x \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim a matriz

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

representa a matriz de rotação em torno da origem $(0,0)$, de um ângulo θ , no sentido anti-horário no plano \mathbb{R}^2 .

Convêm observar que nem toda matriz A possui autovalores e autovetores reais conforme veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.15: Verifique que a matriz A não possui autovalores e autovetores.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

Solução: Temos que a aplicação $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada pela rotação de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário em relação ao eixo OX , e portanto A não tem nenhuma direção invariante, isto é, A não possui autovalores e autovetores.

Método para determinarmos Autovalores e Autovetores da matriz A : Queremos agora encontrar um método prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz real quadrada A de ordem n . Para isto basta resolvermos a equação abaixo onde I é a matriz identidade de ordem n .

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \Leftrightarrow A \cdot v = (\lambda I) \cdot v \Leftrightarrow (A - \lambda I) \cdot v = 0$$

Escrevendo explicitamente esta equação na forma matricial para $n = 2$ ou $n = 3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como procuramos solução não nula, devemos impor a condição que

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

pois senão, a matriz $(A - \lambda I)$ admitiria inversa e a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$ admitiria única solução dada pelo vetor nulo que não é autovetor de A . Assim, impondo esta condição, determinamos primeiramente os autovalores que satisfazem a equação

$$\det(A - \lambda I) = 0, \text{ isto é, as raízes reais do polinômio } P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

e depois resolvemos a equação $Av = \lambda v$ para cada raiz de $P(\lambda)$ para encontrarmos os autovetores associados aos autovalores λ .

Faremos agora um exemplo numérico para fixação dos conceitos apresentados.

Exemplo 1.16: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Vamos determinar os autovalores e os autovetores associados da matriz A , caso existam.

Solução: Procuramos vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Como sabemos, se I for a matriz identidade de ordem 2, então a equação $Av = \lambda v$ pode ser escrita na forma $Av = (\lambda I)v$, ou ainda, $(A - \lambda I)v = 0$. Escrevendo explicitamente, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equações lineares equivalente a esta equação matricial, iremos obter um sistema de duas equações e duas incógnitas. Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, saberemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução nula, ou seja $x = y = 0$. Mas estamos interessados em calcular os autovetores de A , isto é, vetores $v \neq 0$, tais que $(A - \lambda I)v = 0$. Neste caso $\det(A - \lambda I)$ deve ser zero, ou seja

$$\det \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Temos, então:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (-3-\lambda)(2-\lambda) - 4 \cdot (-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0. \end{aligned}$$

Vemos que $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ . Este polinômio é chamado o *polinômio característico* de A . Neste exemplo o polinômio é do 2º grau e podemos continuar a resolução através da fórmula de Bhaskara:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ &\Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2. \end{aligned}$$

Logo $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$ são as raízes do polinômio característico de A , e portanto os seus autovalores são 1 e -2 . Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Para tanto, basta resolver a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$, para os casos em que $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$.

i) Para $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}.$$

Analisando as duas equações do sistema acima podemos verificar que $x = y$.

Portanto os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $v = (x, x)$, $x \neq 0$.

ii) Para $\lambda = -2$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -2x \\ -x + 2y = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Analisando as duas equações do sistema acima podemos verificar que $x = 4y$.

Os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = -2$ são os vetores da forma $v = (4y, y)$, $y \neq 0$.

Exemplo 1.17: Determinar os autovalores e os autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução: Inicialmente, vamos encontrar o polinômio característico da matriz A através da expressão abaixo:

$$P(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Segue do cálculo de determinante, obtemos:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (2 - \lambda)[(4 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) + 2] = (2 - \lambda) \cdot [4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2] = \\ &= (2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) = (2 - \lambda)^2 \cdot (3 - \lambda). \end{aligned}$$

Logo, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ são as raízes do polinômio característico de A e, portanto, os autovalores da matriz A são 2 e 3. Conhecemos os autovalores e podemos encontrar os autovetores $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ correspondentes. Neste intuito, é suficiente resolver a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$, para os casos em que $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$.

i) Caso $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}.$$

Analisando o sistema de equações formado acima, podemos perceber que a terceira equação implica em $y = 0$ e por isso, vemos na segunda que $x = 0$. Como nenhuma equação impõe uma restrição em z , os autovetores associados a $\lambda = 2$ são do tipo $v = (0, 0, z), z \neq 0$.

ii) Caso $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases}.$$

Analogamente, analisando o sistema acima, podemos perceber que $x = -2y$ e da terceira equação vem $z = y$. Os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo $v = (-2y, y, y), y \neq 0$.

Definição 1.18 (Transformação Linear): Uma *transformação linear* é uma função $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ com n e m números inteiros positivos, que satisfaz as seguintes condições:

- i. $T(u, v) = T(u) + T(v)$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$.
- ii. $T(kv) = kT(v)$, para todo $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Ressaltamos que quando se tem $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, T é chamado de *operador linear*.

Veremos agora, que num certo sentido, o estudo de transformações lineares pode ser reduzido ao estudo de matrizes, isto é, dada uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, uma base do domínio (\mathbb{R}^n) e uma base do contradomínio (\mathbb{R}^m), queremos associar a esta aplicação linear uma matriz A de ordem $(m \times n)$ tal que $T(v) = A \cdot v$. De maneira mais precisa:

Matriz associada à transformação linear: Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de \mathbb{R}^n e $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ uma base de \mathbb{R}^m . Segue que $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores do contradomínio (\mathbb{R}^m) e desta forma, estes vetores podem ser escritos como combinação linear de sua base α , isto é,

$$\begin{cases} T(v_1) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m \\ T(v_2) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_m w_m \end{cases},$$

Tomamos A para ser a matriz de ordem $(m \times n)$ cujas colunas têm como entradas as coordenadas dos $T(v_j)$ para $j = 1, \dots, n$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_m & b_m & \dots & c_m \end{bmatrix} = [T]_{\alpha}^{\beta}.$$

Denotamos esta matriz A por $[T]_{\alpha}^{\beta}$ que significa que aplicamos T aos elementos da base β e escrevemos estes vetores como combinação linear dos elementos da base α .

Exemplo 1.19: Consideremos a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$ e $\alpha = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ a base canônica do domínio e contradomínio (\mathbb{R}^2), que são iguais neste caso. Segue que:

$$\begin{cases} T(e_1) = T(1, 0) = (-3, -1) = (-3)e_1 + (-1)e_2 \\ T(e_2) = T(0, 1) = (4, 2) = (4)e_1 + (2)e_2 \end{cases}.$$

Logo,

$$A = [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar uma base β formada por autovetores. Para isso, determinamos o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Sabemos que suas raízes são os autovalores da matriz A . Logo, obtemos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. De fato, como vimos no Exemplo 1.16, os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ são $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (4,1)$ respectivamente. Deste modo, obtemos uma base $\beta = \{v_1 = (1,1), v_2 = (4,1)\}$ do \mathbb{R}^2 formada por autovetores de T . ■

Gostaríamos de observar que quando garantimos uma base formada por autovetores, a matriz que T representa nessa base é a mais simples possível, isto é, uma matriz diagonal. De fato, do exemplo anterior, considerando $D = [T]_\beta^\beta$ temos que

$$\begin{cases} T(v_1) = T(1,1) = (1, 1) = (1) v_1 + (0) v_2 \\ T(v_2) = T(4,1) = (-8, -2) = (0)v_1 + (-2)v_2 \end{cases} .$$

Logo,

$$D = [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

Podemos observar que a matriz T em relação à base de autovetores é uma matriz diagonal. Dada uma transformação linear qualquer $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, se conseguirmos uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ formada por autovetores de T , então, como

$$\begin{cases} T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ T(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ \vdots \\ T(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases} ,$$

a matriz $[T]_\beta^\beta$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i , isto é,

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Não precisamos ter necessariamente os λ_i distintos. Na verdade, um autovalor aparecerá na diagonal tantas vezes quantas forem os autovetores LI a ele associados. Por outro lado, se $\gamma = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de \mathbb{R}^n tal que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} ,$$

note que u_1, \dots, u_n são necessariamente autovetores de T com autovalores a_1, \dots, a_n respectivamente. De fato, da definição de $[T]_\gamma^\gamma$ temos:

$$\begin{cases} T(u_1) = a_1 u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n = a_1 u_1 \\ \vdots \\ T(u_n) = 0u_1 + 0u_2 + \dots + a_n u_n = a_n u_n \end{cases} .$$

Concluimos então que um operador $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite uma base β em relação à qual sua matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal se, e somente se, essa base β for formada por autovetores de T . É este o motivo da definição que se segue.

Definição 1.20 (Operador diagonalizável): Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou $n = 3$, um operador linear. Dizemos que T é um *operador diagonalizável* se existe uma base de \mathbb{R}^n cujos elementos são autovetores de T .

O operador do exemplo 1.19 é, portanto, diagonalizável. Vejamos um exemplo de um operador não diagonalizável.

Exemplo 1.21: Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é

$$P(\lambda) = \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -3 & -4 \\ 0 & 3 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação $P(\lambda) = 0$ obtemos os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Vamos encontrar os autovetores $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associados a eles. Como já vimos anteriormente, basta resolver a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$, para os casos em que $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$.

i) Caso $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} 3x - 3y - 4z = 3x \\ 3y + 5z = 3y \\ -z = 3z \end{cases} \therefore \begin{cases} 3y = -4z \\ 5z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}.$$

Analisando o sistema de equações acima percebemos que a segunda e a terceira equação são válidas apenas para $z = 0$. Isto implica, na primeira equação, que $y = 0$. Como não houve restrição, x pode assumir qualquer valor real. Desta forma, conseguimos apenas o autovetor LI da forma $v_1 = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$, $x \neq 0$.

ii) Caso $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} 3x - 3y - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases} \therefore \begin{cases} 4x = 3y + 4z \\ 4y = -5z \\ z = z \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \frac{z}{4} \\ y = \frac{-5z}{4} \\ z = z \end{cases}.$$

Analisando estas equações, podemos verificar que o único autovetor LI associado a $\lambda = -1$ é da forma $v_2 = \left(\frac{z}{16}, \frac{-5z}{4}, z\right) = z\left(\frac{1}{16}, \frac{-5}{4}, 1\right), z \neq 0$.

Neste exemplo, temos apenas dois autovetores LI para T , e portanto não existe uma base de \mathbb{R}^3 constituída só de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de T é uma matriz diagonal, ou seja, T não é diagonalizável.

1.4 – Ortogonalização de vetores

Para alcançarmos nosso objetivo de identificação de cônicas e quádras, continuaremos a apresentar definições e exemplos de conceitos necessários ao entendimento dos assuntos abordados neste texto.

Definição 1.22 (Norma de um vetor): Consideremos inicialmente o plano \mathbb{R}^2 , munido de um referencial cartesiano ortogonal (eixos perpendiculares) e um ponto P de coordenadas (x, y) . Vamos calcular a distância deste ponto à origem $O(0,0)$. Observando a figura e utilizando a fórmula da distância entre dois pontos vista anteriormente, temos que $d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Podemos também interpretar este resultado dizendo que o comprimento (que passaremos a chamar de *norma*) do vetor (x, y) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Denotaremos isto por $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Analogamente, a distância d entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é a norma do vetor diferença, isto é, $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

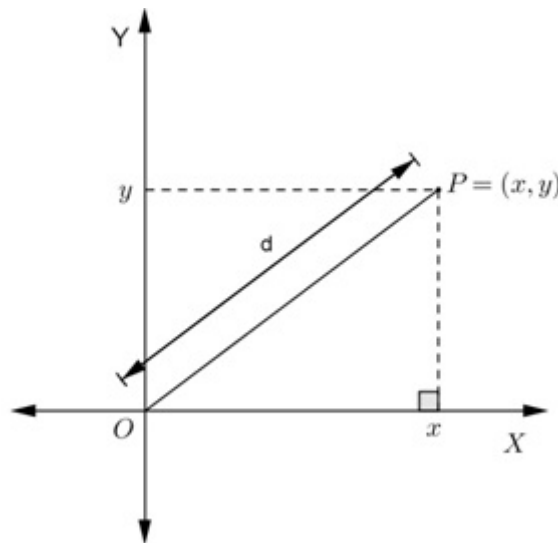


Figura 1.3: Norma de um vetor

Definição 1.23 (Produto interno): Seja \mathbb{R}^n para $n \geq 2$. Um *produto interno* sobre \mathbb{R}^n é uma função dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que atribui a cada par ordenado de vetores u e v em \mathbb{R}^n um número real $\langle u, v \rangle$ que satisfaz as propriedades a seguir:

- i. $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ e $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- ii. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para todo u, v em \mathbb{R}^n e $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iii. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo u, v, w em \mathbb{R}^n .
- iv. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todo u, v em \mathbb{R}^n .

Definimos o produto interno padrão ou produto escalar usual em \mathbb{R}^n como a função que atribui a cada par ordenado de vetores

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{e} \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

em \mathbb{R}^n o número denotado por $\langle u, v \rangle$ dado por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Claramente, esta definição satisfaz as propriedades da definição de produto interno. Em particular, o produto escalar usual em \mathbb{R}^3 para $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ é dado por

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Considerando \mathbb{R}^n munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Também podemos definir a norma de um vetor v em relação a este produto interno por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Se $\|v\| = 1$, isto é, $\langle v, v \rangle = 1$, v é chamado *vetor unitário*. Dizemos também, neste caso, que v está *normalizado*.

Observe que todo vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$ pode ser normalizado, tomando $u = \frac{v}{\|v\|}$. Considerando \mathbb{R}^3 munido de seu produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ então para qualquer $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, teremos

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

que é o comprimento do vetor v .

Exemplo 1.24: Vamos normalizar o vetor $v = (1, 2, -1)$.

Solução:

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(1, 2, -1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{(1, 2, -1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right).$$

Podemos confirmar o processo de normalização de um vetor observando que a norma de um vetor normalizado é 1. Isto é, no nosso exemplo:

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{6}{6}} = 1.\end{aligned}$$

Consideremos agora o \mathbb{R}^n munido de seu produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$, em particular usaremos $n = 2$ ou $n = 3$. Diremos que dois vetores v e w em \mathbb{R}^n são ortogonais em relação a este produto interno se $\langle v, w \rangle = 0$. No caso em que v e w são ortogonais, escrevemos $v \perp w$.

Estudaremos, agora, um método que tem como finalidade ortogonalizar um conjunto finito de vetores linearmente independentes do \mathbb{R}^n munido de seu produto interno usual, isto é, queremos obter um novo conjunto onde todos os vetores são unitários e, dois a dois, ortogonais e serão chamados de vetores ortonormais. Este processo é conhecido como **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt** onde partimos de um conjunto finito $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ e obtemos um novo conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ de vetores ortonormais.

Ressaltamos que a cada passo neste processo temos $[v_1, \dots, v_i] = [u_1, \dots, u_i]$.

Vamos dar uma descrição deste processo de ortonormalização para o conjunto de vetores linearmente independentes $\{v_1, v_2\}$:

Tome $w_1 = v_1$. Precisamos encontrar a partir de v_2 um novo vetor w_2 ortogonal a w_1 , isto é, $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$. Para isto, tomamos $w_2 = v_2 - cw_1$, onde c é um número escolhido de modo que satisfaça a condição de ortogonalidade, isto é:

$$\langle w_2, w_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_2 - cw_1, w_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_2, w_1 \rangle - c\langle w_1, w_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$$

Desta forma:

$$w_1 = v_1 \quad e \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 .$$

Podemos então normalizá-los para obter o conjunto $\{u_1, u_2\}$ que é ortonormal dado por

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} \quad e \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} .$$

Exemplo 1.25: Seja $\beta = \{v_1 = (2,1), v_2 = (1,1)\}$ um conjunto do \mathbb{R}^2 . Vamos obter a partir de β um conjunto ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução: Tomamos

$$w_1 = v_1 \quad e \quad w_2 = v_2 - c w_1 .$$

Impondo a condição de que

$$w_2 \perp w_1 \Rightarrow \langle w_2, w_1 \rangle = 0 \Rightarrow c = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \Rightarrow w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 .$$

Substituindo, segue que:

$$w_2 = (1,1) - \frac{\langle (1,1), (2,1) \rangle}{\langle (2,1), (2,1) \rangle} (2,1) = (1,1) - \frac{2+1}{4+1} (2,1) = \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5} \right).$$

O próximo passo é normalizar para obtermos o conjunto $\{u_1, u_2\}$ ortonormal, onde:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(2,1)}{\|(2,1)\|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{(2,1)}{\sqrt{4+1}} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) e$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5} \right)}{\left\| \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5} \right) \right\|} = \frac{\left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5} \right)}{\sqrt{\left(\frac{-1}{5} \right)^2 + \left(\frac{2}{5} \right)^2}} = \frac{\left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5} \right)}{\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}}} = \frac{\left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5} \right)}{\sqrt{\frac{5}{25}}} = \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$$

Este processo pode ser desenvolvido de maneira análoga se tivermos um conjunto com k elementos. Em particular, veremos o procedimento para $k = 3$.

Processo do ortonormalização para $k = 3$: Consideremos o conjunto de vetores $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$. Semelhantemente ao caso anterior, tomemos:

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - c w_1$ onde $c = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$

Então, w_1 é ortogonal a w_2 .

Vamos procurar agora um vetor w_3 que seja ortogonal ao mesmo tempo a w_1 e w_2 . Por analogia ao caso anterior vamos estabelecer que $w_3 = v_3 - c w_2 - d w_1$ e determinar os valores de c e d tais que $\langle w_3, w_1 \rangle = 0$ e $\langle w_3, w_2 \rangle = 0$. Desenvolvendo estas duas condições, obtemos:

$$\langle w_3, w_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_3 - c w_2 - d w_1, w_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_3, w_1 \rangle - c \langle w_2, w_1 \rangle - d \langle w_1, w_1 \rangle = 0.$$

Assim, como $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$, temos $\langle v_3, w_1 \rangle = 0$ se, e somente se

$$d = \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}.$$

De maneira análoga:

$$\langle w_3, w_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_3 - cw_2 - dw_1, w_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_3, w_2 \rangle - c\langle w_2, w_2 \rangle - d\langle w_1, w_2 \rangle = 0.$$

Assim, como $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$, temos $\langle v_3, w_2 \rangle = 0$ se, e somente se,

$$c = \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}.$$

E portanto,

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1.$$

Se quisermos agora obter um conjunto ortonormal, basta normalizarmos os vetores w_1, w_2 e w_3 . Isto é, tomando $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$ e $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$ obtemos o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ de vetores ortonormais.

Exemplo 1.26: Seja $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,2,1), v_3 = (0,0,1)\}$ um conjunto de \mathbb{R}^3 . Vamos obter a partir de β um conjunto ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução: Vamos resolver este exemplo seguindo o procedimento descrito acima.

- $w_1 = v_1 = (1,1,1)$,
- $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (-1,1,0)$,
- $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Para obtermos o conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ basta normalizar $\{w_1, w_2, w_3\}$:

- $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|} = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
- $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. ■

Apresentaremos algumas definições que serão utilizadas em alguns teoremas e assuntos a seguir.

Definição 1.27 (Matriz simétrica e Matriz ortogonal): Seja A uma matriz quadrada de ordem n e A^t sua transposta.

- Uma matriz A é *simétrica* se $A = A^t$.
- Uma matriz A invertível é *ortogonal* se $A^{-1} = A^t$. Podemos também dizer que uma matriz A invertível é ortogonal se $A^t \cdot A = I_n$.

Convém lembrar que, conforme a teoria de Álgebra Linear clássica, uma matriz é ortogonal se, e somente se as colunas (ou linhas) são vetores ortonormais.

Proposição 1.28: Seja \mathbb{R}^n munido de produto interno e α e β bases ortonormais de \mathbb{R}^n , então a matriz de mudança de base $[I]_{\beta}^{\alpha}$ (respec. $[I]_{\alpha}^{\beta}$) é uma matriz ortogonal.

Prova: Sejam $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases ortonormais de \mathbb{R}^n . Basta observar que:

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ I(v_1) & I(v_2) & \cdots & I(v_n) \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

e como suas colunas são vetores ortonormais pois α (respec. β) é ortonormal, segue que a matriz mudança de base $[I]_{\beta}^{\alpha}$ (respec. $[I]_{\alpha}^{\beta}$) é uma matriz ortogonal. ■

Segue da teoria de álgebra linear:

$$[I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta} = I \Rightarrow [I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^t$$

onde a última igualdade é válida quando a base α é ortonormal e consequentemente a matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$ é ortogonal, o que irá facilitar a obtenção da matriz de mudança de base na ordem contrária das bases. Se $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ for simétrica onde α e β são bases ortonormais então $[T]_{\beta}^{\beta}$ também é simétrica. De fato:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = ([I]_{\alpha}^{\beta})^{-1} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\alpha}^{\beta})^t \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta}.$$

Tomando a transposta temos

$$([T]_{\beta}^{\beta})^t = \left[([I]_{\alpha}^{\beta})^t \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta} \right]^t = ([I]_{\alpha}^{\beta})^t \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot \left[([I]_{\alpha}^{\beta})^t \right]^t = [T]_{\beta}^{\beta}.$$

1.5 – Teorema Espectral para matrizes simétricas

Uma matriz B é dita semelhante a uma matriz A se existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1} A P$. Diremos que uma matriz A é diagonalizável se ela for semelhante a uma matriz diagonal.

Proposição 1.29: *Matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores.*

Prova: Se A e B são matrizes semelhantes, então existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1} A P$. Basta mostrar que A e B tem o mesmo polinômio característico.

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1} A P - P^{-1} \lambda I P) = \det [P^{-1} (A - \lambda I) P] \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observação: Convém lembrar que não vale a recíproca do resultado acima, isto é, ter os mesmos autovalores é uma condição necessária, mas não é suficiente para matrizes serem semelhantes. Veja que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem os mesmos autovalores mas não são matrizes semelhantes.

Proposição 1.30: *Autovalores associados a autovetores distintos são linearmente independentes.*

Prova:

Caso 1: (2 autovalores distintos)

Sejam $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalores. Vamos mostrar que os autovetores v_1, v_2 associados a λ_1 e λ_2 respectivamente são linearmente independentes. De fato:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 &\Rightarrow (A - \lambda_1 I)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = (A - \lambda_1 I)(0) \\ &\Rightarrow \underbrace{a_1 \lambda_1 v_1}_{\neq 0} + a_2 \lambda_2 v_2 - \underbrace{\lambda_1 a_1 v_1}_{\neq 0} - \lambda_1 a_2 v_2 = 0 \\ &\Rightarrow a_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{v_2}_{\neq 0} = 0 \\ &\Rightarrow a_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 &\Rightarrow (A - \lambda_2 I)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = (A - \lambda_2 I)(0) \\
&\Rightarrow a_1 \lambda_1 v_1 + \underbrace{a_2 \lambda_2 v_2}_{\neq 0} - \lambda_2 a_1 v_1 - \underbrace{\lambda_2 a_2 v_2}_{\neq 0} = 0 \\
&\Rightarrow a_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{v_1}_{\neq 0} = 0 \\
&\Rightarrow a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\{v_1, v_2\}$ são linearmente independentes.

Caso 2: (3 autovalores distintos)

Sejam $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ autovalores distintos entre si. Vamos mostrar que os autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ associados a $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ respectivamente são linearmente independentes. De fato:

$$\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= 0 \\
\Rightarrow (A - \lambda_1 I)(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) &= (A - \lambda_1 I)(0) \\
\Rightarrow a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + a_3 \lambda_3 v_3 - \lambda_1 a_1 v_1 - \lambda_1 a_2 v_2 - \lambda_1 a_3 v_3 &= 0 \\
\Rightarrow a_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + a_3(\lambda_3 - \lambda_1) v_3 &= 0 \\
\Rightarrow (A - \lambda_2 I)[a_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + a_3(\lambda_3 - \lambda_1) v_3] &= (A - \lambda_2 I)(0) \\
\Rightarrow \underbrace{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 v_2}_{\neq 0} + a_3(\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_3 v_3 - \underbrace{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 v_2}_{\neq 0} - a_3(\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_2 v_3 &= 0 \\
\Rightarrow a_3 \underbrace{(\lambda_3 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda_3 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_3 &= 0 \\
\Rightarrow a_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Aplicando $(A - \lambda_1 I)$ e em seguida $(A - \lambda_3 I)$ concluímos $a_2 = 0$. Aplicando $(A - \lambda_2 I)$ e em seguida $(A - \lambda_3 I)$ concluímos que $a_1 = 0$. Logo $\{v_1, v_2, v_3\}$ são linearmente independentes.

O caso geral para n autovalores distintos segue de argumentação análoga. ■

Proposição 1.31: Se A é uma matriz simétrica, então os autovetores associados a autovalores distintos de A são ortogonais.

Prova: Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ então $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^t v \rangle$. Seja agora v_1 e v_2 autovetores de A associados a autovalores λ_1 e λ_2 distintos de A temos que $A v_1 = \lambda_1 v_1$ e $A v_2 = \lambda_2 v_2$. Assim

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle A v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, A^t v_2 \rangle = \langle v_1, A v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$

onde usamos o fato que $A = A^t$ pois A é simétrica. Segue que

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

Faremos agora um caso particular do teorema espectral para matrizes simétricas de ordem 2.

Teorema 1.32 (Teorema Espectral para Matrizes Simétricas A de ordem 2): Existe uma base ortonormal $\beta = \{u_1, u_2\}$ do \mathbb{R}^2 formada por autovetores de A .

Prova: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica de ordem 2, logo seu polinômio característico é

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det (A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda) \cdot (c - \lambda) - b^2 \\ &= ac - a\lambda - c\lambda + \lambda^2 - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2). \end{aligned}$$

Calculando o discriminante Δ segue que:

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(a + c)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Caso: $\Delta = 0$

$$\begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot v = a \cdot v \text{ para todo vetor } v \in \mathbb{R}^2.$$

$$\Rightarrow \beta = \{v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)\} \text{ é base ortonormal de autovetores.}$$

Caso: $\Delta > 0$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{(a+c) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

prop. 1.30

\Leftrightarrow Os autovetores $\{v_1 \text{ e } v_2\}$ associados a $\{\lambda_1 \text{ e } \lambda_2\}$ são LI.

prop. 1.31

$\Leftrightarrow \{v_1, v_2\}$ são ortogonais.

$\Rightarrow \beta = \left\{ u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$ é uma base ortonormal do \mathbb{R}^2 . ■

O próximo resultado apresenta duas propriedades relevantes para matrizes simétricas.

Teorema 1.33 (Propriedades de matrizes simétricas):

- (a) O polinômio característico de uma matriz simétrica A tem somente raízes reais.
- (b) Se um autovalor λ de uma matriz simétrica A é representado k vezes como uma raiz do polinômio característico, então o autoespaço correspondente para o autovalor λ é k -dimensional.

Comentário: A prova da parte (a) será feita no final desta seção no Corolário 1.43. Em outras palavras, o Teorema 1.33 pode ser reformulado para seguinte maneira:

Teorema 1.34 (Teorema Espectral para matrizes simétricas): Se A é uma matriz simétrica de ordem n , então existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = D$ é uma matriz diagonal. Além disso, os autovalores de A são números reais e são os elementos da diagonal principal da matriz D .

Para matrizes com entradas reais, as matrizes ortogonais ($A^{-1} = A^t$) e as matrizes simétricas ($A = A^t$) desempenham um papel importante no problema de diagonalização ortogonal. Para matrizes com entradas complexas, as matrizes ortogonais e simétricas são relativamente de pouca importância; e são substituídas por duas novas classes de matrizes, as matrizes unitárias e hermitianas, que apresentaremos a seguir.

Definição 1.35 (Matriz transposta conjugada): Se A é uma matriz com entradas complexas, então a matriz transposta conjugada de A , denotada por A^* é definida por

$$A^* = (\bar{A})^t$$

onde \bar{A} é uma matriz cujas entradas são os conjugados complexos das entradas correspondentes de A e $(\bar{A})^t$ é a transposta de \bar{A} .

Exemplo 1.36: Se

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix}.$$

Então,

$$A^* = (\bar{A})^t = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

O análogo das matrizes simétricas com entradas reais para matrizes com entradas complexas são as matrizes hermitianas que definiremos a seguir.

Definição 1.37 (Matriz unitária e hermitiana): Seja A uma matriz quadrada com entradas complexas.

- a) Uma matriz A é **unitária** se $A^* = A^{-1}$.
- b) Uma matriz A é **hermitiana** se $A^* = A$.

Uma matriz quadrada com entradas reais é chamada de *ortogonalmente diagonalizável* se existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP (= P^t A P)$ é diagonal. Para matrizes complexas temos um conceito análogo.

Definição 1.38 (Matriz unitariamente diagonalizável): Uma matriz quadrada A com entradas complexas é chamada de unitariamente diagonalizável se existe uma matriz unitária P tal que $P^{-1}AP (= P^* A P)$ é diagonal e a matriz P é chamada de diagonalizador unitário para A .

Convém observar que as matrizes hermitianas não desfrutam de todas as propriedades das matrizes simétricas reais. Por exemplo, as matrizes simétricas reais são as únicas que são ortogonalmente diagonalizáveis e, é possível mostrar que as matrizes hermitianas são unitariamente diagonalizáveis; no entanto, elas não constituem toda a classe de matrizes unitariamente diagonalizáveis, isto é, existem matrizes unitariamente diagonalizáveis que não são hermitianas. Para observar isso, veja a seguinte definição.

Definição 1.39 (Matriz normal): Uma matriz quadrada A com entradas complexas é chamada de *normal* se

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A.$$

Exemplo 1.40: Toda matriz hermitiana A é normal pois $AA^* = AA = A^*A$ e toda matriz unitária A é normal pois $AA^* = I = A^*A$.

Proposição 1.41: Se A é uma matriz normal, então os autovetores associados a autovalores distintos de A são ortogonais.

Esta proposição é o análogo da proposição 1.31 para matriz normal e é fundamental para a construção de uma matriz P que unitariamente diagonaliza a matriz normal A .

No Teorema 1.33 foi afirmado que o polinômio característico de uma matriz simétrica com entradas reais tem somente raízes reais. Este resultado importante é corolário do seguinte teorema mais geral.

Teorema 1.42: Os autovalores de uma matriz $A \in M_n$ hermitiana são números reais.

Prova: A demonstração segue dos seguintes passos:

- $v \in \mathbb{C}^n = M_{\{n \times 1\}}(\mathbb{C}) \Rightarrow v^* = (\bar{v})^t \in M_{\{1 \times n\}}(\mathbb{C})$
- $v_{\{1 \times n\}}^* \cdot A_{\{n \times n\}} \cdot v_{\{n \times 1\}} = z_{\{1 \times 1\}} \in \mathbb{C}$
- $\bar{z} = \overline{(v^* \cdot A \cdot v)} \stackrel{z^t = z \in \mathbb{C}}{\hat{=}} (v^* A v)^* = (A v)^* (v^*)^* = v^* \cdot A^* \cdot v \stackrel{A^* = A}{\hat{=}} v^* \cdot A \cdot v = z$
 $\Rightarrow z = (v^* \cdot A \cdot v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \in \mathbb{C}^n$.
- λ autovalor de $A \Rightarrow A v = \lambda v$ com $v \neq 0$
 $\Rightarrow A u = \lambda u$ para $u = \frac{v}{|v|}$ (unitário) $u^* u = \langle u, u \rangle = 1$
 $\Rightarrow \lambda = \lambda \underbrace{u^* u}_{=1} = u^* \lambda \cdot u = u^* \cdot A \cdot u \in \mathbb{R}$ é por c). ■

Corolário 1.43: Os autovalores de uma matriz simétrica com entradas reais são números reais.

Prova: Se A é uma matriz simétrica ($A = A^t$) com entradas reais ($\bar{A} = A$) então A é hermitiana, pois $A^* = (\bar{A})^t = A^t = A$; assim, A tem autovalores reais pelo Teorema. ■

1.6 – Processo de Diagonalização de forma quadrática

Vamos definir *forma quadrática* e estudar o processo para sua *ortogonalização*, visto que precisaremos desse procedimento para identificação das cônicas.

Definição 1.44 (Forma quadrática): Uma função $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^t A X$ onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e A é **uma matriz simétrica** com entradas de números reais é chamada de forma quadrática real nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n .

Por exemplo $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x, y) = x^2 - 10xy + y^2$ é uma forma quadrática.

Processo de diagonalização da forma quadrática: Este processo destina-se a encontrar uma base do \mathbb{R}^n na qual a matriz associada a uma forma quadrática seja a mais simples possível, isto é, aquela que possui vários 'zeros'. Veremos que a matriz diagonal é a que melhor se encaixa neste procedimento.

Vamos diagonalizar a forma quadrática $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Q(v) = x^2 - 10xy + y^2 \quad \text{onde } v = (x, y)$$

Procuremos uma base β de modo que

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = [x_1 \ y_1] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Sendo α a base canônica do \mathbb{R}^2 na forma matricial, temos que

$$Q(x, y) = [v]_\alpha^t \cdot A \cdot [v]_\alpha = [x \ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Consideremos o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = A \cdot v$, isto é $A = [T]_\alpha^\alpha$.

Pelo teorema espectral para matrizes simétricas visto acima, como a matriz A é simétrica, ela é diagonalizável, admitindo um conjunto de autovetores ortonormais.

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$. Associados a esses autovalores encontramos: $v_1 = (x, -x)$ para $\lambda_1 = 6$ e $v_2 = (x, x)$ para $\lambda_2 = -4$.

De Fato: Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, determinamos o seu polinômio característico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -5 \\ -5 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 2\lambda - 24.$$

Como já vimos, as raízes de $P(\lambda)$ são os autovalores de A . Resolvendo a equação $\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0$ encontramos $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$. Para determinar os autovetores associados, vamos resolver a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$ para $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$ com $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1° caso: $\lambda_1 = 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y = 6x \\ -5x + y = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -5x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x$$

Segue que $v_1 = (x, -x) = x(1, -1)$ com $x \neq 0$.

2° caso: $\lambda_2 = -4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -4 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y = -4x \\ -5x + y = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x$$

Segue que $v_2 = (x, x) = x(1, 1)$ com $x \neq 0$. ■

Podemos encontrar uma base ortonormal β de autovetores. Para isso tomamos

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1) \quad e \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1).$$

Segue da teoria de álgebra linear, que:

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [I]_{\beta}^{\alpha} \quad \text{onde} \quad D = [T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo em $Q(v) = [v]_{\alpha}^t \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$, temos

$$Q(v) = [v]_{\alpha}^t \cdot \underbrace{[I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [I]_{\beta}^{\alpha}}_{[T]_{\alpha}^{\alpha}} \cdot [v]_{\alpha}.$$

Como $[I]_{\alpha}^{\beta}$ é ortogonal, pois α e β são bases ortonormais, temos que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^t.$$

Segue que

$$\begin{aligned} Q(v) &= [v]_{\alpha}^t \cdot [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha} \\ \Leftrightarrow Q(v) &= [v]_{\alpha}^t \cdot ([I]_{\beta}^{\alpha})^t \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot ([I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}) \\ \Leftrightarrow Q(v) &= ([I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha})^t \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot ([I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}) \\ \Leftrightarrow Q(v) &= [v]_{\beta}^t \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$Q(v) = [x_1 \quad y_1] \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 6x_1^2 - 4y_1^2.$$

Exemplo 1.45: Vamos fazer a diagonalização da forma quadrática $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(v) = x^2 + 12xy - 4y^2$ com $v = (x, y)$.

Solução: Consideremos α a base canônica do \mathbb{R}^2 . A forma quadrática

$$Q(v) = ax^2 + bxy + cy^2$$

pode ser escrita na forma matricial como:

$$Q(v) = [v]_{\alpha}^t \cdot A \cdot [v]_{\alpha} \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Isto é, $Q(v) = [x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ é simétrica. Então podemos diagonalizá-la. Vamos encontrar os autovalores de A que, como já sabemos, são as raízes do polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 6 \\ 6 & -4 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 8)$.

Determinaremos os autovetores associados aos autovalores encontrados resolvendo a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$ para $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -8$ com $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1° caso: $\lambda_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot [x \quad y] = 5 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 6y = 5x \\ 6x - 4y = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

Segue que

$$v_1 = \left(x, \frac{2}{3}x\right) = x \left(1, \frac{2}{3}\right) \quad \text{com } x \neq 0.$$

2° caso: $\lambda_2 = -8$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-8) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 6y = -8x \\ 6x - 4y = -8y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 6y = 0 \\ 6x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x$$

Segue que

$$v_2 = \left(x, \frac{-3}{2}x\right) = x \left(1, \frac{-3}{2}\right) \text{ com } x \neq 0.$$

Encontramos uma base ortonormal de autovetores $\beta = \{u_1, u_2\}$, onde

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\left(1, \frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \text{ e}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\left(1, \frac{-3}{2}\right)}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right).$$

Pelo caso anterior, podemos reescrever a forma quadrática da seguinte maneira

$$Q(v) = [v]_{\beta}^t \cdot D \cdot [v]_{\beta}.$$

Neste caso, temos

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Substituindo, temos que:

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 5x_1^2 - 8y_1^2.$$

Teorema 1.46 (Teorema dos Eixos Principais): *Qualquer forma quadrática em n variáveis $Q(X) = X^t A X$ é equivalente por meio de uma matriz ortogonal P a uma forma quadrática do tipo:*

$$\mathcal{H}(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

onde $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz A que define a forma quadrática Q .

Prova: Se A é a matriz simétrica da forma quadrática Q , então pelo Teorema 1.34 temos que A pode ser diagonalizada por uma matriz P ortogonal ($P^{-1} = P^t$), isto significa que $D = P^{-1}AP = P^tAP$ é diagonal. Além disso, os elementos da diagonal principal de D são os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, que são números reais. A forma quadrática \mathcal{H} com a matriz D é dada por $\mathcal{H}(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$. ■

CAPÍTULO 2: CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS

“Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada, e damos nomes a todos os segmentos que parecem necessários à construção – aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos. Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação (numa única incógnita) pois os termos de uma dessas expressões são juntas iguais aos termos da outra.”

René Descartes

Neste capítulo teremos as representações algébrica e geométrica de cônicas no plano (\mathbb{R}^2). Nosso intuito se dá em classificar a cônica, degenerada ou não, a partir de sua equação algébrica. Para isso veremos o procedimento geral utilizado.

2.1 – Equação Geral de um Plano e das Cônicas

Definição 2.1 (Equação do Plano): Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto no plano π e $n = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano π . O plano π é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que o vetor P_0P é perpendicular ao vetor normal n .

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; P_0P \perp n\}$$

Observando-se que $OP_0 + P_0P = OP$, segue que

$$P_0P = OP - OP_0 = (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Logo:

$$\begin{aligned} P \in \pi &\Leftrightarrow P_0P \perp n \Leftrightarrow \langle P_0P, n \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0. \end{aligned}$$

Fazendo $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, obtemos:

$$ax + by + cz = d.$$

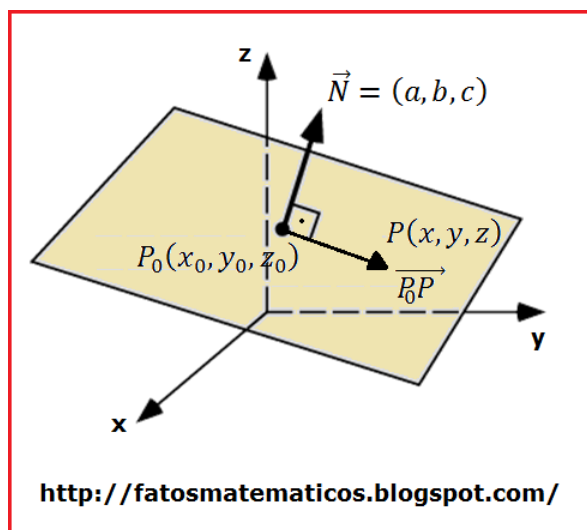


Figura 2.1: Equação do plano

Esta equação representa um plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e tem (a, b, c) como vetor normal. Os casos em que $d = 0$ representam os planos que passam pela origem dos eixos coordenados.

Veremos que as cônicas são curvas no plano que podem ser escritas sob a forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Estas curvas incluem a *circunferência*, a *elipse*, a *parábola* e a *hipérbole*. Do ponto de vista geométrico, que é o que os gregos antigos adotavam, cônicas são figuras que podem ser obtidas através do corte em diversos planos de um cone circular reto em duas folhas.

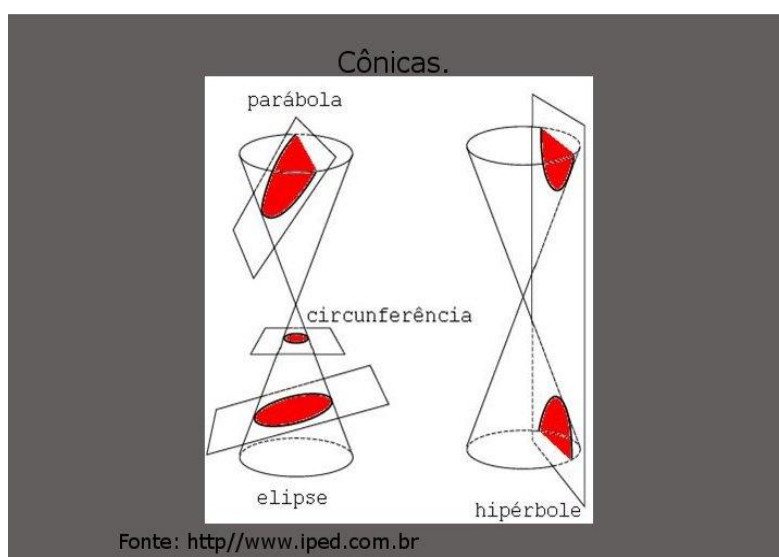


Figura 2.2: Cônicas

Em palavras:

- **Circunferência:** É obtida pela intersecção do cone com um plano ortogonal ao seu eixo de simetria.
- **Elipse:** É obtida pela intersecção do cone com um plano que não passa pelo seu vértice, sendo oblíquo ao eixo e não paralelo a nenhuma das geratrizes.
- **Parábola:** é obtida pela intersecção do cone com um plano que não passa pelo seu vértice e é paralelo a uma das geratrizes.
- **Hipérbole:** é obtida pela intersecção do cone com um plano que não passa pelo seu vértice e é paralelo ao eixo.

Para tratar das cônicas no plano de forma adequada procederemos estudando figuras padrão e, através da diagonalização de formas quadráticas associadas, mostraremos que as equações representam uma dessas figuras padrão centrada, possivelmente, em outro referencial.

Definição 2.2 (Cônica): Uma *cônica* em \mathbb{R}^2 é um conjunto de pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas em relação ao referencial padrão $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ satisfazem a equação quadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (I)$$

onde a, b, c, d, e, f são números reais com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Podemos observar que a equação da cônica envolve

- uma forma quadrática, $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$,
- uma forma linear, $\mathcal{L}(x, y) = dx + ey$,
- e um termo constante f .

Isto é, a equação que define uma cônica pode ser reescrita da seguinte forma:

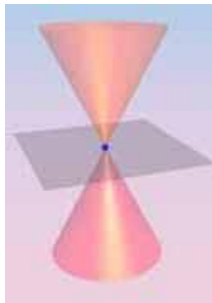
$$\boxed{Q(x, y) + \mathcal{L}(x, y) + f = 0}.$$

O gráfico da equação (I) é uma seção cônica, uma curva assim nomeada, porque é produzida pela intersecção de um plano com um cone circular reto de duas folhas como visto anteriormente.

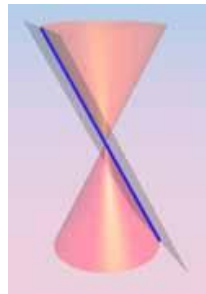
Além das cônicas comuns: circunferências, elipses, parábolas e hipérbolas, podemos ter formas degeneradas desses tipos de cônicas.

Voltando à figura 2.2 da intersecção de planos com um cone, podemos ver das figuras a seguir que:

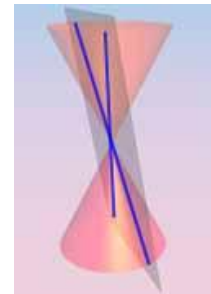
- **Ponto (elipse degenerada):** é a intersecção do cone com um plano que é oblíquo ao seu eixo e não paralelo a nenhuma de suas geratrizes, passando pelo seu vértice.
- **Reta (parábola degenerada):** é a intersecção do cone com um plano que é paralelo a uma de suas geratrizes e passa pelo seu vértice.
- **Par de retas (hipérbole degenerada):** é a intersecção do cone com um plano que contém o seu eixo.



Elipse degenerada



Parábola degenerada



Hipérbole degenerada

Figura 2.3: Cônicas degeneradas

Definição 2.3 (Forma Quadrática Matricial de uma Cônica): Uma forma de classificar o tipo de cônica representada por uma equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ é escrevendo essa equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0.$$

De fato:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ b \\ \frac{b}{2}x + cy \end{bmatrix} + [dx + ey] + f = 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}xy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}. \blacksquare$$

Podemos escrever a equação geral de uma cônica como

$$\boxed{X^tAX + BX + fI_1 = 0_{1 \times 1}},$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = [d \quad e] .$$

O produto X^tAX é chamado forma quadrática.

Vamos apresentar alguns exemplos de curvas em termos de formas quadráticas e formas lineares.

Exemplo 2.4: Escreva a equação da elipse $\frac{(x+2)^2}{1/4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ em termos de formas quadráticas e formas lineares.

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)^2}{1/4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 &\Leftrightarrow 4(x+2)^2 + \frac{1}{4}(y+1)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4(x^2 + 4x + 4) + \frac{1}{4}(y^2 + 2y + 1) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 16(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 16x^2 + y^2 + 64x + 2y + 61 = 0 \\ &\Leftrightarrow [x \quad y] \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [64 \quad 2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 61 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.5: Escreva a equação da hipérbole $-\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ em termos de formas quadráticas e formas lineares.

Solução:

$$\begin{aligned} -\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1 &\Leftrightarrow -4(x+3)^2 + 9(y-4)^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow -4(x^2 + 6x + 9) + 9(y^2 - 8y + 16) - 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 - 72y + 144 - 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x^2 + 9y^2 - 24x - 72y + 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow [x \quad y] \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-24 \quad -72] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 72 = 0. \end{aligned}$$

Observe que nenhuma das expressões tem termos cruzados (xy). Veremos agora, como escrever as formas mais gerais das cônicas alinhadas aos eixos horizontal ou vertical em termos de formas quadráticas e de formas lineares.

Uma parábola pode ser escrita como

$$y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx - y + c = 0$$

ou

$$x = ay^2 + by + c \Leftrightarrow ay^2 + by - x + c = 0$$

se estiver alinhada ao eixo vertical (no primeiro caso) ou ao horizontal (no segundo caso). Essas equações podem ser descritas em termos de formas lineares e formas quadráticas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [c] = [0]$$

ou

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [c] = [0].$$

Observe que, nas parábolas, sempre há um termo nulo na diagonal principal da matriz central da forma quadrática.

Como uma circunferência é apenas uma elipse com os eixos horizontal e vertical de mesmo tamanho, consideraremos agora somente a equação geral de uma elipse alinhada ao eixo horizontal e vertical:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2(x^2 - 2x_0x + x_0^2) + a^2(y^2 - 2y_0y + y_0^2) - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 + a^2y^2 - 2a^2y_0y + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2b^2x_0 & -2a^2y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2] = [0].$$

Note que, nas elipses, os termos da diagonal principal da matriz central da forma quadrática são ambos positivos.

A equação geral de uma hipérbole alinhada nos eixos horizontal e vertical fica

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2(x^2 - 2x_0x + x_0^2) - a^2(y^2 - 2y_0y + y_0^2) - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 - a^2y^2 + 2a^2y_0y - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x \ y] \cdot \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-2b^2x_0 \ 2a^2y_0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2] = [0]$$

ou

$$- \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow -b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow -b^2(x^2 - 2x_0x + x_0^2) + a^2(y^2 - 2y_0y + y_0^2) - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^2x^2 + 2b^2x_0x - b^2x_0^2 + a^2y^2 - 2a^2y_0y + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x \ y] \begin{bmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [2b^2x_0 \ -2a^2y_0] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2] = [0].$$

Observe que, nas hipérbolas, os termos da diagonal principal das matrizes centrais de cada uma das duas formas quadráticas têm sinais opostos.

Assim, estabelecemos regras para classificar as cônicas que estão alinhadas aos eixos cartesianos analisando somente suas formas quadráticas. Quando um dos elementos da diagonal principal da matriz central da forma quadrática associada a uma determinada equação for zero, então a equação é de uma parábola; se os dois elementos forem positivos, então a equação é de uma elipse (ou de uma circunferência, se os dois elementos forem iguais); se os dois elementos da diagonal principal tiverem sinais opostos então a equação é de uma hipérbole.

Como vimos aqui, quando a matriz A de uma forma quadrática X^tAX é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

onde α_1 e α_2 são constantes, então a cônica é alinhada a um dos eixos cartesianos.

Podemos então classificá-la usando as seguintes regras:

- Se $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0$ então a equação é de uma *parábola* ou de sua forma degenerada (*uma reta* ou *duas retas paralelas*).
- Se $\alpha_1 \cdot \alpha_2 > 0$ então a equação é de uma *elipse* ou de sua forma degenerada (*um ponto* ou *o vazio*).
- Se $\alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0$ então a equação é de uma *hipérbole* ou de sua forma degenerada (*duas retas concorrentes*).

Mas o que fazer quando houver um termo cruzado do tipo xy na equação de uma cônica? Este assunto será abordado na próxima seção.

2.2 – Diagonalização de Formas Quadráticas

Agora vamos ver o que podemos fazer quando existirem termos cruzados. Nestes casos, temos a equação geral de uma cônica.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

que, em termos de uma forma linear e de uma forma quadrática, fica

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

ou seja, $X^tAX + BX + C = 0$, onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}, \quad B = [d \ e] \quad e \quad C = [f].$$

Nosso problema é escrever a forma quadrática, que determina o tipo de cônica, em forma diagonalizada. Neste momento precisaremos da abordagem sobre autovetores e diagonalização de matrizes; é precisamente isso o que pode ser conseguido se utilizarmos uma matriz P cujas colunas são autovetores independentes da matriz A e sua inversa. Veremos isso primeiramente através de um exemplo.

Exemplo 2.6: Considerando a equação $2x^2 - 5y^2 - 7 = 0$, vamos determinar qual cônica ela representa.

Solução: Observe que

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5y^2 = 7 &\Rightarrow \frac{2x^2}{7} - \frac{5y^2}{7} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{7/2} - \frac{y^2}{7/5} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{7/2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{7/5}\right)^2} = 1. \end{aligned}$$

Logo, verificamos que esta equação representa uma hipérbole.

Exemplo 2.7: Mais uma vez nosso objetivo é identificar qual cônica é representada pela equação dada: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$.

Solução: Simplificando e completando quadrados, temos:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y = -8 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = -8 + 9 + 1 .$$

Fatorando os trinômios quadrados perfeitos, obtemos:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2,$$

que é uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(3,1)$.

Exemplo 2.8: Identifique a cônica no plano dada pela equação quadrática:

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Solução: Para isto, precisamos inicialmente eliminar os termos mistos, do tipo xy , através da diagonalização da forma quadrática. Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [4\sqrt{2} \quad 12\sqrt{2}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0$$

Calculamos os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 - 4 = -4\lambda + \lambda^2 = \lambda \cdot (\lambda - 4). \end{aligned}$$

Temos o polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda$. Como já vimos, as raízes desse polinômio são os autovalores de A dados por $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 4$. Para encontrarmos os autovetores resolvemos a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$ para cada λ .

Para $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0x \\ 2x + 2y = 0y \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y.$$

Logo os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ são da forma $v_1 = (-y, y)$ com $y \neq 0$. Em particular, temos $v_1 = (-1, 1)$. Normalizando este vetor, teremos:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1, 1)}{\|(-1, 1)\|} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Para $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 4x \\ 2x + 2y = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

Assim os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ são da forma $v_2 = (x, x)$ com $x \neq 0$. Em particular, temos $v_2 = (1, 1)$. Normalizando este vetor, teremos:

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Consideramos os autovetores $\beta = \{u_1, u_2\}$, como o novo sistema referencial do \mathbb{R}^2 , onde a forma quadrática

$$Q(v) = [x \ y] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Segue da Seção 1.6, do processo de diagonalização de forma quadrática, que

$$Q(v) = [v]_\beta^t \cdot [T]_\beta^\beta \cdot [v]_\beta \quad \text{onde} \quad D = [T]_\beta^\beta \quad \text{e} \quad [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, temos que

$$Q(v) = [x_1 \ y_1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Segue da Seção 1.2, Mudança de Referencial Cartesiano, que

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a equação original se reduz a

$$\begin{aligned}
 & [x_1 \ y_1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [4\sqrt{2} \ 12\sqrt{2}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 8 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 0x_1^2 + 4y_1^2 + 4\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \right) + 12\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \right) - 8 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 4y_1^2 - 4x_1 + 4y_1 + 12x_1 + 12y_1 - 8 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 4y_1^2 + 8x_1 + 16y_1 - 8 = 0 \\
 \Leftrightarrow & y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (y_1^2 + 4y_1 + 4) - 4 + 2x_1 - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (y_1 + 2)^2 + 2(x_1 - 3) = 0.
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y_2 = (y_1 + 2)$ e $x_2 = (x_1 - 3)$, obtemos que:

$$y_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_2 = -y_2^2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}y_2^2.$$

Assim, a equação acima representa a cônica em relação a um novo referencial \mathbb{R}^3 , obtido por translação e podemos finalmente identificá-la claramente como sendo uma *parábola*.

Agora iremos formular o procedimento geral de classificação das cônicas, estabelecendo em detalhes o que deve ser feito em cada passo.

2.3 – Procedimento Geral de Classificação das Cônicas

Dada a equação algébrica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, queremos classificar a cônica em função de sua equação e fazer um esboço de seu gráfico, para isso, procederemos da seguinte forma:

1º passo: Escrevemos a equação na forma matricial:

$$[x \ y] \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \ e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0.$$

2º passo: Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isto, precisamos encontrar os autovalores λ_1 e λ_2 e os autovetores ortonormais v_1 e v_2 de

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

3º passo: Lembramos que no sistema de coordenadas xy as retas suportes estão nas direções dos vetores da base canônica

$$\alpha = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}.$$

Obtemos um novo sistema de coordenadas ortogonal x_1y_1 cujas retas suportes estão nas direções dos autovetores que formam a base

$$\beta = \{v_1, v_2\}.$$

Da teoria geral, sendo $T: V_\alpha \rightarrow W_\beta$ uma aplicação linear, onde α é uma base de V e β é uma base de W , temos que

$$[T(v)]_\alpha = [T]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta.$$

No caso particular, onde $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação identidade, temos que o vetor $v = (x, y)$ pode ser escrito na base β de autovetores por $v = (x, y) = x_1v_1 + y_1v_2$ e obtemos a relação conhecida como mudança de coordenadas.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I]_\alpha^\beta \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [x \ y] = \left([I]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right)^t = [x_1 \ y_1] \cdot [I]_\beta^\alpha.$$

4º passo: Substituindo na equação da forma matricial da cônica:

$$[x \ y] \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \ e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0,$$

obtemos a equação da cônica no novo sistema de coordenadas

$$[x_1 \ y_1] \cdot \underbrace{[I]_\beta^\alpha \cdot \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \cdot [I]_\alpha^\beta}_{D} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [d \ e] \cdot [I]_\alpha^\beta \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

que toma a seguinte forma:

$$[x_1 \ y_1] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [d \ e] \cdot [I]_\alpha^\beta \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [f] = [0].$$

5º passo: Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos. Temos então três casos a analisar:

- Caso 1: ($\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$)
- Caso 2: ($\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$)
- Caso 3: ($\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$)

Caso 1: ($\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$)

$$\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + \lambda_2 y_1^2 + by_1 + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{b}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + f = 0.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}, \quad y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2} \quad \text{e} \quad r = f - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2},$$

temos uma equação de cônica de fácil reconhecimento, a saber

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + r = 0.$$

Caso 2: ($\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$)

$$\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + by_1 + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + by_1 + f = 0.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}, \quad y_2 = y_1 \quad \text{e} \quad r = f - \frac{a^2}{4\lambda_1},$$

temos uma equação de cônica de fácil reconhecimento, a saber:

$$\lambda_1 x_2^2 + by_2 + r = 0.$$

Caso 3: ($\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$)

Este caso é similar ao caso 2.

Exemplo 2.9: Identifique a cônica representada pela equação algébrica abaixo:

$$3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y - 25 = 0$$

Solução: Vamos seguir o passo a passo descrito acima.

1º passo: Escrever a equação dada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0 \quad 20] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 25 = 0.$$

2º passo: Vamos agora diagonalizar a forma quadrática:

$$Q(v) = [v]_{\alpha}^t \cdot A \cdot [v]_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad Q(x, y) = [x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Segue do polinômio característico que:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 12$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 15 = (\lambda - (-3)) \cdot (\lambda - 5).$$

Como $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 5$, para encontrar os autovetores a eles associados vamos resolver a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$ com $v = (x, y)$.

1º caso: $\lambda_1 = -3$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2\sqrt{3}y = -3x \\ -2\sqrt{3}x - y = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2\sqrt{3}y = 0 \\ -2\sqrt{3}x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x \therefore v_1 = (x, \sqrt{3}x) = x(1, \sqrt{3}) \text{ com } x \neq 0.$$

2º caso: $\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2\sqrt{3}y = 5x \\ -2\sqrt{3}x - y = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2\sqrt{3}y = 0 \\ 2\sqrt{3}x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \therefore v_2 = \left(x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) = x\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ com } x \neq 0.$$

Particularizando e normalizando os autovetores:

$$v_1 = (1, \sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad e$$

$$v_2 = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Obtemos assim, uma base ortonormal, formada por autovetores, a saber:

$$\beta = \left\{ u_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), u_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

3º passo: Sendo $\alpha = \{ e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \}$ a base canônica, e $\beta = \{ u_1, u_2 \}$ uma base de autovetores. Segue da Seção 1.6, do processo de diagonalização de forma quadrática, que

$$Q(v) = [v]_{\beta}^t \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [v]_{\beta} \quad \text{onde} \quad D = [T]_{\beta}^{\beta} \quad \text{e} \quad [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Desta forma, temos que

$$Q(v) = [x_1 \quad y_1] \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Segue da Seção 1.2, Mudança de Referencial Cartesiano, que

$$[v]_{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\beta} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

4º passo: Desta forma, a equação inicial pode ser reescrita como

$$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0 \quad 20] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x_1 \quad y_1] \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [0 \quad 20] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow [-3x_1 \quad 5y_1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [10\sqrt{3} \quad -10] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x_1^2 + 5y_1^2 + 10\sqrt{3}x_1 - 10y_1 - 25 = 0.$$

5º passo: Eliminar os termos lineares. Para tanto vamos agrupar os termos semelhantes e aplicar a técnica de completar quadrados.

$$-3x_1^2 + 10\sqrt{3}x_1 + 5y_1^2 - 10y_1 = 25$$

$$\Leftrightarrow (-3) \cdot \left(x_1^2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}x_1 + \frac{25}{3} \right) + 5(y_1^2 - 2y_1 + 1) = 25$$

$$\Leftrightarrow (-3) \cdot \left(x_1 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 5(y_1 - 1)^2 = 5.$$

Fazendo a mudança de variável

$$x_2 = \left(x_1 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{e} \quad y_2 = (y_1 - 1),$$

temos a equação de uma hipérbole dada por:

$$(-3) \cdot x_2^2 + 5 y_2^2 = 5 \quad \xrightarrow{(\div 5)} \quad \boxed{-\frac{x_2^2}{5/3} + y_2^2 = 1}.$$

Como vimos, este procedimento permite-nos, através de uma mudança de referencial, colocar qualquer cônica na forma de uma das equações típicas. Neste processo podemos classificar as cônicas da seguinte maneira.

Formalizamos então as regras para a classificação de cônicas a seguir. Dada a matriz A de uma forma quadrática $X^t A X$ cuja forma diagonalizada é dada por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A , então podemos classificá-la usando as seguintes regras:

- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ então a equação é de uma parábola ou de sua forma degenerada (uma reta ou duas retas paralelas).
- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ então a equação é de uma elipse ou de sua forma degenerada (um ponto ou o vazio).
- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ então a equação é de uma hipérbole ou de sua forma degenerada (duas retas concorrentes).

Resumo

A equação geral de uma cônica é dada por $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde a, b, c, d, e, f são constantes. Essa cônica pode ser representada matricialmente como

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

isto é,

$$X^t A X + B X + f I_1 = 0 I_1$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$$

O termo $X^t A X$ é chamado forma quadrática e o termo $B X$ é chamado forma linear.

Quando a matriz A de uma forma quadrática $X^t A X$ assume uma forma diagonalizada dada por

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

onde α_1 e α_2 são constantes, então a cônica é alinhada a um dos eixos cartesianos. Caso contrário, ela assume uma posição não alinhada a esses eixos.

Classificação: Dada uma cônica cuja forma quadrática seja escrita como $X^t A X$, onde a matriz A tem uma forma diagonalizada dada por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A , então podemos classificá-la usando as seguintes regras:

- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ então a equação é de uma parábola ou de sua forma degenerada (uma reta ou duas retas paralelas).
- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ então a equação é de uma elipse ou de sua forma degenerada (um ponto ou o vazio).
- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ então a equação é de uma hipérbole ou de sua forma degenerada (duas retas concorrentes).

CAPÍTULO 3: CLASSIFICAÇÃO DE QUÁDRICAS

"Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc."

Pierre de Fermat

No capítulo anterior, vimos como classificar as figuras chamadas cônicas no plano cartesiano quando as suas formas quadráticas assumem formas diagonalizadas. Neste capítulo, generalizaremos os conceitos abordados no capítulo anterior para o espaço, apresentando algumas das quádricas que são o equivalente tridimensional das cônicas.

Vamos agora generalizar o conceito de forma quadrática para três dimensões. Lembrando, uma cônica pode, em sua forma mais geral, ser representada pela equação matricial

$$X^t A X + B X + f I_1 = 0 I_1.$$

Isto é,

$$[x \ y] \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \ e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0].$$

Uma generalização direta para três dimensões seria escrever

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g \ h \ i] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = [0].$$

O termo $X^t A X$ é denominado forma quadrática e o termo $B X$ continua sendo chamado de forma linear. Esta equação matricial pode ser escrita como:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são números reais, sendo não nulo pelo menos um dos seis primeiros coeficientes a, b, c, d, e, f .

A equação acima representa um conjunto de superfícies no espaço chamadas de quádricas. O nome quádrica é devido a essas superfícies serem escritas em termos dos quadrados de variáveis independentes e também é utilizado para figuras em dimensões maiores do que três.

3.1 – Superfícies Cilíndricas

Começaremos nosso estudo das quádricas com as superfícies cilíndricas, que têm equações idênticas às das cônicas quando em forma diagonalizada, mas consideradas agora no espaço.

Definição 3.1 (Cilindro Parabólico): Esta superfície pode ser escrita como uma parábola, mas agora olhamos do ponto de vista do espaço

$$y = ax^2 + bx + c .$$

Agora, z é uma variável livre e portanto pode ser variada em infinitos valores possíveis, funcionando como se varrêssemos o eixo z com uma parábola. Estas equações podem assumir qualquer uma das seguintes formas

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{ou} \quad x = az^2 + bz + c$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{ou} \quad y = az^2 + bz + c .$$

$$z = ax^2 + bx + c \quad \text{ou} \quad z = ay^2 + by + c$$

Por economia de notação, sempre representaremos as formas gerais de superfícies no espaço em termos de uma determinada orientação em relação aos eixos coordenados, ficando as demais orientações subentendidas.

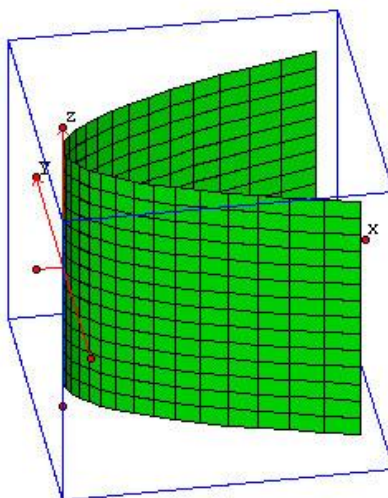


Figura 3.1: Cilindro Parabólico

Definição 3.2 (Cilindro Elíptico): É uma superfície dada pela equação do tipo

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Esta é a mesma equação de uma elipse centrada em (x_0, y_0) com semi-eixo horizontal a e semi-eixo vertical b , mas desta vez ela está no espaço, com uma variável z livre. Também podemos ter variantes dessa mesma equação, com o cilindro elíptico orientado ao longo dos outros eixos coordenados.

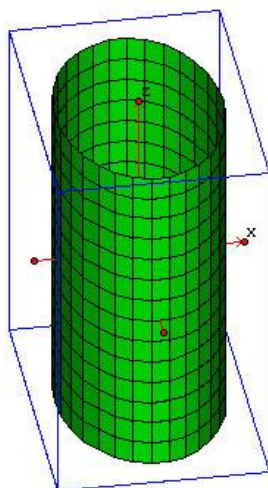


Figura 3.2: Cilindro Elíptico

Definição 3.3 (Cilindro Hiperbólico): É uma superfície dada pela equação do tipo

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Essa é a mesma equação de uma hipérbole centrada em (x_0, y_0) e pode ter diversas variações, dependendo da orientação que o cilindro hiperbólico segue.

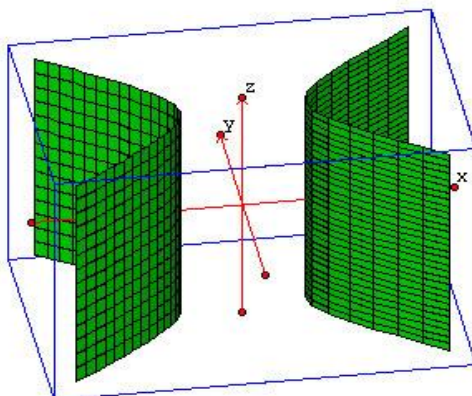


Figura 3.3: Cilindro Hiperbólico

3.2 – Formas Quadráticas de Superfícies Cilíndricas

Vamos agora, representar as superfícies cilíndricas em termos de formas lineares e formas quadráticas. Relembrando o início deste capítulo, uma forma quadrática geral é descrita por uma equação do tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

que pode ser escrita como $X^tAX + BX + C = 0$ onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & d & f/2 \\ e/2 & f/2 & f \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = [j].$$

O termo X^tAX é denominado forma quadrática e o termo BX continua sendo chamado de forma linear.

Vamos agora, classificar superfícies cilíndricas utilizando suas formas quadráticas.

Definição 3.4 (Forma Quadrática do Cilindro Parabólico): Esta superfície possui equação algébrica (existem variantes para outros eixos cartesianos) dada por

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c - y = 0$$

cuja forma quadrática é dada por X^tAX onde

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Caso sejam escolhidas equações alinhadas aos outros eixos cartesianos, como, por exemplo, $z = ay^2 + by + c$, o único efeito será mudar a posição que a constante a assume dentro da diagonal principal da matriz dos coeficientes de sua forma quadrática.

Definição 3.5 (Forma Quadrática do Cilindro Elíptico): Esta superfície possui equação algébrica (existem variantes para outros eixos cartesianos) dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 (x - x_0)^2 + a^2 (y - y_0)^2 = a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 (x^2 - 2xx_0 + x_0^2) + a^2 (y^2 - 2y_0y + y_0^2) = a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow (b^2)x^2 - 2b^2x_0x + b^2y_0^2 + (a^2)y^2 - 2a^2y_0y + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

cuja forma quadrática é dada por X^tAX onde

$$A = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui também outros alinhamentos de eixos dão origem a posições distintas dos coeficientes a^2 e b^2 dentro da matriz dos coeficientes da forma quadrática, mas sempre teremos dois valores positivos e um nulo na diagonal principal da matriz A de um cilindro elíptico. Caso tivéssemos escrito

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1,$$

também teríamos um cilindro elíptico com matriz dos coeficientes da forma quadrática

$$A = \begin{bmatrix} -b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que este tipo de matriz também indica um cilindro elíptico.

Definição 3.6 (Forma Quadrática do Cilindro Hiperbólico): Esta superfície possui equação algébrica (existem variantes para outros eixos cartesianos) dada por

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2(x-x_0)^2 - a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) + a^2(y^2 - 2y_0y + y_0^2) = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow (b^2)x^2 - 2b^2x_0x + b^2y_0^2 + (-a^2)y^2 + 2a^2y_0y - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

cuja forma quadrática é dada por X^tAX onde

$$A = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Novamente outros alinhamentos de eixos dão origem a posições distintas dos coeficientes a^2 e b^2 dentro da matriz dos coeficientes da forma quadrática, mas sempre teremos um valor positivo, um valor negativo e um valor nulo na diagonal principal da matriz A de um cilindro hiperbólico.

Para determinarmos o tipo de superfície cilíndrica representado por quádricas que não estão alinhadas aos eixos cartesianos, usamos o mesmo procedimento do capítulo anterior, que é diagonalizar a matriz A dos coeficientes da forma quadrática da quádrica em questão e depois classificá-la usando as regras que acabamos de deduzir para superfícies cilíndricas alinhadas aos eixos coordenados. O exemplo a seguir ilustra um desses casos.

Exemplo 3.7: Classifique a superfície cilíndrica dada por

$$x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 2y - 3 = 0.$$

Solução: A forma quadrática associada a essa superfície tem a matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seus autovalores são calculados a seguir:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(-\lambda) + \lambda = (-1 - \lambda + \lambda + \lambda^2)(-\lambda) + \lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2) = -\lambda(\lambda - \sqrt{2}) \cdot (\lambda + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Portanto, a forma diagonalizada da matriz A fica

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

O que indica que a superfície é um cilindro hiperbólico.

Podemos então utilizar a seguinte regra para classificar uma superfície cilíndrica. Se ela tem uma forma diagonalizada D , então pode ser classificada da seguinte maneira:

- **Cilindro parabólico:** se a matriz A possuir dois autovalores nulos.
- **Cilindro elíptico:** se a matriz A possuir dois autovalores positivos e um nulo.
- **Cilindro hiperbólico:** se a matriz A possuir um autovalor positivo, um autovalor negativo e um autovalor nulo.

Resumo

Quádricas: São superfícies no espaço tridimensional cujas equações algébricas são:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são números reais constantes.

Na forma matricial que pode ser escrita como $X^tAX + BX + jI_1 = 0$ temos

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g \ h \ i] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = [0].$$

Equações algébricas da quádricas cilíndricas:

- **Cilindros parabólicos:** $y = ax^2 + bx + c$
- **Cilindros elípticos:** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- **Cilindros hiperbólicos:** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Classificação das quádricas cilíndricas: Se uma superfície cilíndrica tem uma forma diagonalizada D , então ela pode ser classificada da seguinte maneira:

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{cilindro parabólico})$$

$$D = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{cilindro elíptico})$$

$$D = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{cilindro hiperbólico})$$

A ordem em que os termos aparecem nas matrizes diagonalizadas pode variar. De forma geral, um superfície cilíndrica que tenha uma forma quadrática X^tAX será um

- **Cilindro parabólico:** se a matriz A tiver dois autovalores nulos.
- **Cilindro elíptico:** se a matriz A tiver dois autovalores positivos e um nulo.
- **Cilindro hiperbólico:** se a matriz A tiver um autovalor positivo, um autovalor negativo e um autovalor nulo.

3.3 – Parabolóides

Os parabolóides são superfícies que tem a seguinte equação algébrica como forma geral:

$$c(z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$$

onde a, b, c são constantes reais.

Veremos a seguir as formas que um parabolóide pode assumir.

Definição 3.8 (Parabolóide Circular): São os que apresentam equação do tipo:

$$c(z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2}$$

Essa superfície pode ser obtida através da rotação de uma parábola em torno de um eixo vertical centrado em (x_0, y_0) .

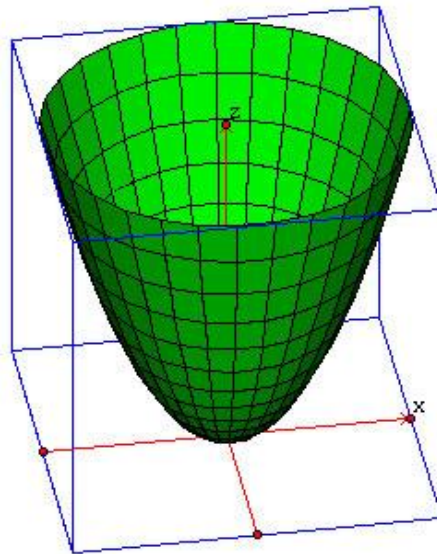


Figura 3.4: Parabolóide Circular

Veremos a seguir como construir um parabolóide, usando o fato de que as secções transversais dessa figura em relação ao eixo z são circunferências.

Exemplo 3.9: Descreva os procedimentos para esboçar o gráfico do parabolóide

$$z = x^2 + y^2.$$

Solução: Ao interceptarmos a superfície com planos $z = k$, vemos equações de circunferências. De fato, para $z = 0$ temos $x^2 + y^2 = 0$ que é a equação de uma circunferência de raio 0 centrada em $(0,0)$, ou seja, um ponto. Para $z = 1$ temos $x^2 + y^2 = 1$, que é uma circunferência centrada em $(0,0)$ e de raio 1. Para $z = 2$ temos $x^2 + y^2 = 2$ uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ centrada em $(0,0)$ e assim por diante. Podemos desenhar um certo número dessas circunferências no espaço para então delinear os contornos do parabolóide. Para $x = 0$ temos $z = y^2$ (parábola) e para $y = 0$ temos $z = x^2$ (parábola).

Definição 3.10 (Parabolóide Elíptico): Uma generalização do parabolóide circular é o chamado parabolóide elíptico que tem equação algébrica dada por

$$c(z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$$

No caso em que $a = b$, temos o parabolóide circular. A superfície pode ser construída com uma sucessão de elipses centradas em (x_0, y_0) . A figura 3.5 a seguir ilustra esta situação.

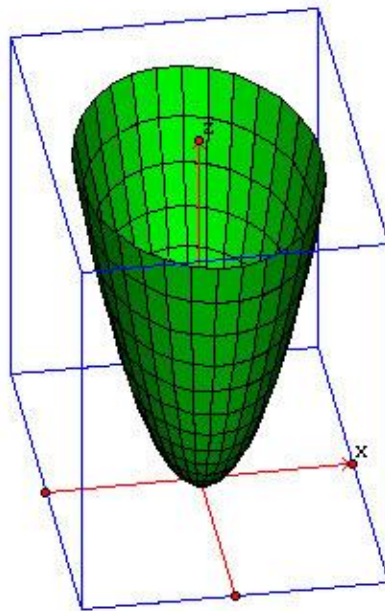


Figura 3.5: Parabolóide Elíptico

Exemplo 3.11: Descreva os procedimentos para esboçar o gráfico do parabolóide elíptico

$$z = 4x^2 + y^2.$$

Solução: Fixamos diversos valores de z e analisamos o tipo de curva que obtemos:

$$z = -k: \quad 4x^2 + y^2 = -k \Leftrightarrow \nexists x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{vazio})$$

$$z = 0: \quad 4x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \quad (\text{ponto})$$

$$z = 1: \quad 4x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad (\text{elipse})$$

$$z = 2: \quad 4x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2/4} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad (\text{elipse})$$

$$z = 3: \quad 4x^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3/4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (\text{elipse})$$

$$z = 4: \quad 4x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (\text{elipse})$$

Para $x = 0$ temos $z = y^2$ (parábola) e para $y = 0$ temos $z = 4x^2$ (parábola).

Definição 3.12 (Parabolóide Hiperbólico): Um parabolóide hiperbólico tem equação dada por

$$c(z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$$

Esta superfície pode ser construída com uma sucessão de hipérbolas centradas em (x_0, y_0) .

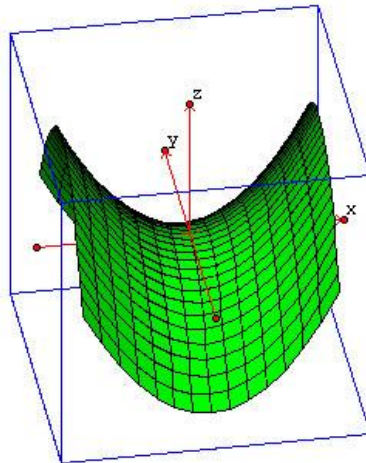


Figura 3.6: Parabolóide Hiperbólico (Sela de Cavallo)

Exemplo 3.13: Descreva os procedimentos para esboçar o gráfico do parabolóide hiperbólico

$$z = \frac{x^2}{4} - y^2.$$

Solução: A melhor forma de visualizar este tipo de superfície é fixando valores para x ou y e obtendo diversas equações de parábolas no espaço:

$$x = -2: \quad z = 1 - y^2 \quad (\text{parábolas})$$

$$x = -1: \quad z = \frac{1}{4} - y^2 \quad (\text{parábolas})$$

$$x = 0: \quad z = -y^2 \quad (\text{parábolas})$$

$$x = 1: \quad z = \frac{1}{4} - y^2 \quad (\text{parábolas})$$

$$x = 2: \quad z = 1 - y^2 \quad (\text{parábolas})$$

$$y = 0: \quad z = \frac{x^2}{4} \quad (\text{parábolas})$$

3.4 – Elipsóides

Veremos agora uma outra classe de quádricas, que envolve esferas e elipsóides. Estas são superfícies que podem ser escritas por equações algébricas do tipo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Definição 3.14 (Esfera): São descritas por uma equação algébrica do tipo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

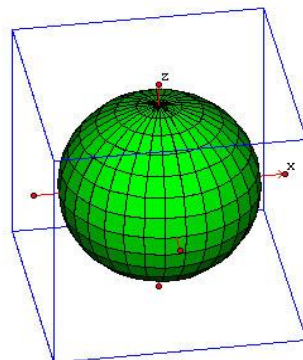


Figura 3.7: Esfera

Definição 3.15 (Elipsóides): Têm equações algébricas dadas por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

onde (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas do centro do elipsóide.

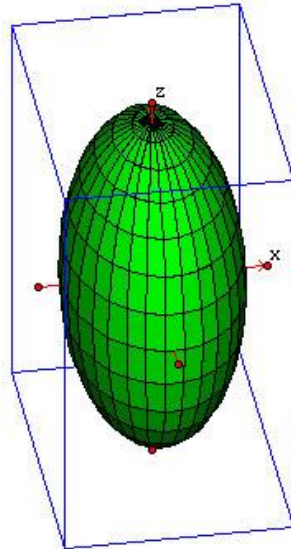


Figura 3.8: Elipsóide

3.5 – Hiperbolóides e Cones

Os hiperbolóides são as superfícies que podem ser escritas por equações do tipo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

ou

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Definição 3.16 (Hiperbolóide de Uma Folha): A equação de um hiperbolóide de uma folha pode ser escrita de uma das seguintes formas:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$- \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

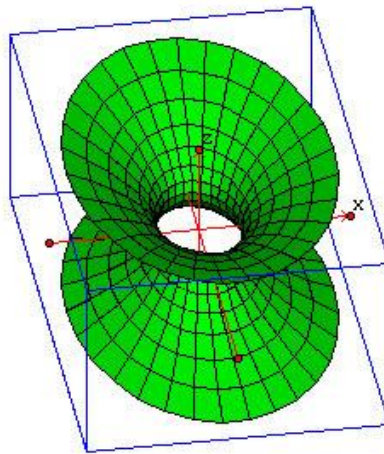


Figura 3.9: Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha

Definição 3.17 (Hiperbolóide de Duas Folhas): A equação de um hiperbolóide de duas folhas alinhado a um dos eixos cartesianos envolve dois termos negativos (em vez de somente um, no caso do hiperbolóide de uma folha) e pode ser escrito como:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$- \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$- \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

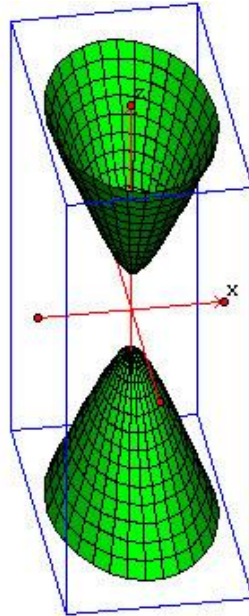


Figura 3.10: Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas

Definição 3.18 (Cones): Os cones podem ser considerados hiperbolóides degenerados e podem ser escritos usando equações do tipo

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

onde x_0, y_0, z_0, a, b, c são constantes. Esta equação pode ser escrita como

$$\frac{z - z_0}{c} = \pm \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}}$$

que é a forma mais usual da equação de um cone

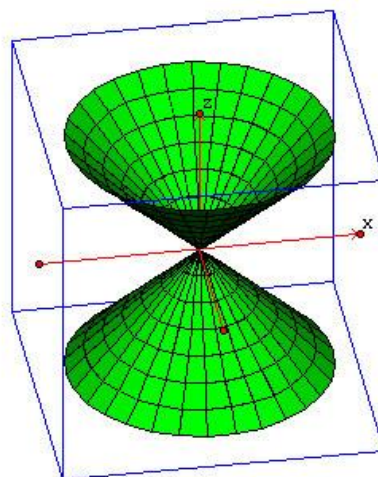


Figura 3.11: Cone de Duas Folhas

Segue os esboços das superfícies quádricas que iremos classificar na próxima seção através das formas quadráticas dos parabolóides, elipsóides, hiperbolóides e cones.

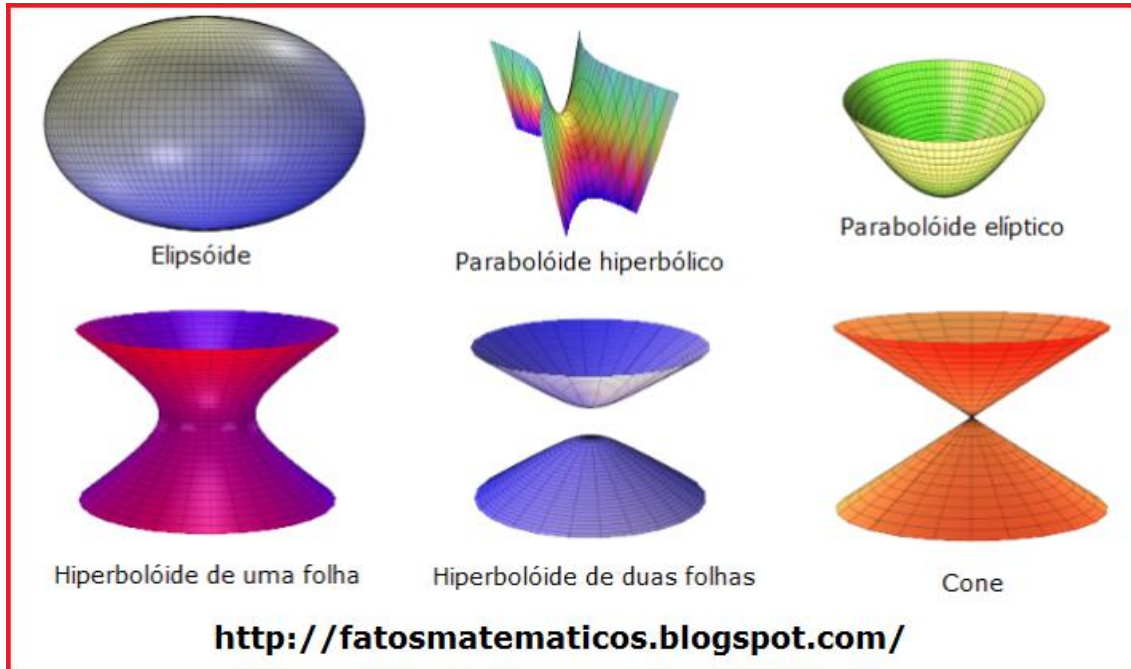


Figura 3.12: Superfícies Quádricas

3.6 – Formas quadráticas de Parabolóides, Elipsóides, Hiperbolóides e Cones

Agora que descrevemos os vários tipos de quádricas, vamos classificar as formas quadráticas de cada uma. Isto também facilitará a identificação de formas quadráticas com termos mistos. Os casos do cilindro parabólico, cilindro elíptico e cilindro hiperbólico já foram realizados na Seção 3.2.

Vamos agora, representar estas superfícies quádricas em termos de suas formas lineares e formas quadráticas. Relembrando o início deste capítulo, uma forma quadrática geral é descrita por uma equação do tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

que pode ser escrita como $X^tAX + BX + C = 0$ onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}, \quad B = [g \quad h \quad i] \quad \text{e} \quad C = [j].$$

O termo X^tAX é denominado forma quadrática e o termo BX forma linear.

Definição 3.19 (Forma Quadrática do Parabolóide Elíptico): Esta superfície possui equação algébrica (existem variantes para outros eixos cartesianos) dada por

$$c(z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 - a^2b^2c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) + a^2(y^2 - 2y_0y + y_0^2) - a^2b^2c(z - z_0) = 0$$

cuja forma quadrática é dada por X^tAX onde

$$A = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 1: Note que a matriz A é igual de um cilindro elíptico (Seção 3.2). No entanto, há diferenças entre as duas figuras quando são analisadas as respectivas formas lineares: a forma linear de um cilindro elíptico não envolve uma das três variáveis dos eixos coordenados, neste nosso caso, a variável z .

Definição 3.20 (Forma Quadrática do Parabolóide Hiperbólico): Esta superfície possui equação algébrica (existem variantes para outros eixos cartesianos) dada por

$$c(z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 - a^2b^2c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) + (-a^2)(y^2 - 2y_0y + y_0^2) - a^2b^2c(z - z_0) = 0$$

cuja forma quadrática é dada por X^tAX onde

$$A = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 2: Veja que a matriz A é igual de um cilindro hiperbólico (Seção 3.2). No entanto, há diferenças entre as duas figuras quando são analisadas as respectivas formas lineares: a forma linear de um cilindro hiperbólico não envolve uma das três variáveis dos eixos coordenados, neste nosso caso, a variável z .

Definição 3.21 (Forma Quadrática do Elipsóide): Esta superfície possui equação algébrica dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 c^2 (x - x_0)^2 + a^2 c^2 (y - y_0)^2 + a^2 b^2 (z - z_0)^2 - a^2 b^2 c^2 = 0$$

cuja forma quadrática é dada por $X^t A X$ onde

$$A = \begin{bmatrix} b^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 b^2 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.22 (Forma Quadrática do Hiperbolóide de Uma Folha): Esta superfície possui equação algébrica dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 c^2 (x - x_0)^2 + a^2 c^2 (y - y_0)^2 - a^2 b^2 (z - z_0)^2 - a^2 b^2 c^2 = 0$$

cuja forma quadrática é dada por $X^t A X$ onde

$$A = \begin{bmatrix} b^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 b^2 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.23 (Forma quadrática do Hiperbolóide de Duas Folhas): Esta superfície possui equação algébrica dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 c^2 (x - x_0)^2 - a^2 c^2 (y - y_0)^2 - a^2 b^2 (z - z_0)^2 - a^2 b^2 c^2 = 0$$

cuja forma quadrática é dada por $X^t A X$ onde

$$A = \begin{bmatrix} b^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 b^2 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.24 (Forma Quadrática do Cone): Esta superfície possui equação algébrica dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 c^2 (x - x_0)^2 + a^2 c^2 (y - y_0)^2 - a^2 b^2 (z - z_0)^2 = 0$$

cuja forma quadrática é dada por $X^t A X$ onde

$$A = \begin{bmatrix} b^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 b^2 \end{bmatrix}.$$

Observação 3: Observe que a matriz A é igual a de um parabolóide de uma folha. No entanto, a diferença pode ser vista nos termos constantes de cada equação algébrica.

Como já vimos, as superfícies quádricas são descritas por uma equação do tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

que pode ser escrita como $X^t A X + B X + C = 0$ e representam quádricas não alinhadas aos eixos cartesianos caso os termos mistos não sejam nulos. Nesses casos, pode-se calcular a forma diagonalizada da matriz A , dos coeficientes, da forma quadrática desta superfície e então classificá-la do mesmo modo que uma quádrica alinhada.

Vamos agora, organizar essas informações de forma mais coerente. Consideremos uma superfície quádrica que tenha uma forma quadrática $X^t A X$ onde a matriz A tem uma forma diagonalizada

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os autovalores da matriz A e podem ocorrer em qualquer ordem:

- Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ então a quádrica é um cilindro parabólico (ou sua forma degenerada).
- Se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$ então a quádrica é um cilindro elíptico ou um parabolóide elíptico (ou suas formas degeneradas).
- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 = 0$ (com sinais opostos na matriz), então a quádrica é um cilindro hiperbólico ou um parabolóide hiperbólico (ou suas formas degeneradas).
- Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são todos positivos, então a quádrica é um elipsóide ou sua forma degenerada.
- Se λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal e λ_3 tem sinal oposto a eles, então a quádrica é um hiperbolóide (ou sua forma degenerada: um cone).

Algumas das regras vêm do fato de que, por exemplo, podemos escrever a equação de um elipsóide como

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

e multiplicando por (-1) podemos expressá-la por

$$-b^2c^2(x - x_0)^2 - a^2c^2(y - y_0)^2 - a^2b^2(z - z_0)^2 + a^2b^2c^2 = 0$$

cuja forma quadrática é dada por X^tAX onde

$$A = \begin{bmatrix} -b^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2c^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{bmatrix}.$$

Apenas observando a forma quadrática, não é possível diferenciar as superfícies quádricas:

- Um cilindro elíptico e um parabolóide elíptico possuem mesma forma quadrática e, neste caso, olhamos para forma linear para diferenciar as quádricas conforme a observação 1.
- Um cilindro hiperbólico e um parabolóide hiperbólico possuem mesma forma quadrática e, neste caso, olhamos para forma linear para diferenciar as quádricas conforme a observação 2.
- Um parabolóide de uma folha e um cone, possuem mesma forma quadrática e mesma forma linear e, neste caso, olhamos para o termo constante para diferenciar as quádricas conforme a observação 3.

Dada uma superfície quádrica, devemos, em primeiro lugar, alinhar a superfície a um dos eixos cartesianos e reescrever sua equação em termos de novos eixos aos quais ela está alinhada. Em seguida, analisamos sua forma quadrática, forma linear e termos constantes para identificarmos a superfície quádrica de maneira exata.

Resumo

Quádricas: São superfícies no espaço tridimensional cujas equações algébricas são:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são números reais constantes. Esta equação pode ser escrita na forma matricial por $X^tAX + BX + C = 0$ onde o termo X^tAX é denominado forma quadrática, o termo BX é chamado de forma linear e C é o termo constante.

Equações algébricas das superfícies quádricas não cilíndricas:

- **Parabolóides Elípticos :** $c(z - z_0) = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$
- **Parabolóides Hiperbólicos :** $c(z - z_0) = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$
- **Esferas:** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
- **Elipsóides :** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$
- **Hiperbolóides de uma folha:** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$
- **Hiperbolóides de duas folhas:** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$
- **Cones:** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$

Classificação das quádricas não cilíndricas: Se uma superfície quádrica tem uma forma quadrática X^tAX , onde a matriz A tem forma diagonalizada D

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são os autovetores da matriz A . Esses autovalores podem ocorrer em qualquer ordem ao longo da diagonal principal de D .

- **cilindro parabólico** (ou sua forma degenerada): Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
- **cilindro elíptico ou parabolóide elíptico** (ou suas formas degeneradas): Se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$
- **cilindro hiperbólico ou parabolóide hiperbólico** (ou suas formas degeneradas): Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 = 0$ com sinais opostos em D
- **elipsóide** (ou sua forma degenerada): Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são todos positivos
- **hiperbolóide** (ou sua forma degenerada: um **cone**): Se λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal e λ_3 tem sinal oposto a eles.

CAPÍTULO 4: ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo apresentaremos um artigo divulgado na RPM (Revista do Professor de Matemática, nº 71 de 2010) que relata uma aplicação do tema *Cônicas* em sala de aula para uma turma do Ensino Médio. Na segunda seção apresentamos um resultado elementar sobre raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros. Em seguida, apresentaremos algumas atividades envolvendo o conteúdo abordado nesta dissertação que podem ser aplicadas para alunos do ensino médio.

4.1 – ARTIGO DA RPM

UMA PEQUENA HISTÓRIA DE UM BELO PROBLEMA

Autor: CHICO NERY

Colégio San Conrado (Campinas) e Colégio Liceu Albert Sabin (Ribeirão Preto)

Durante uma aula numa turma especial de 3ª série do ensino médio, na qual falávamos sobre a equação da elipse, resolvi propor o seguinte exercício: Dentre todas as cordas que passam por um dos focos de uma elipse, aquela perpendicular ao eixo maior chama-se corda focal mínima. Dada a equação de uma elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com } a > b$$

determine a medida da sua corda focal mínima. Resolvemos o problema de duas maneiras, uma mais analítica e outra mais sintética, como mostro a seguir:

1ª maneira: Sejam P e P' as extremidades da corda focal mínima em relação ao foco F .

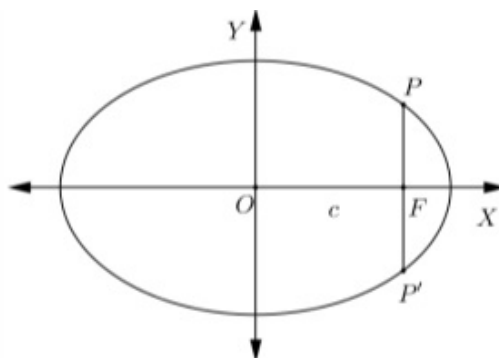


Figura 4.1

Esses dois pontos têm abscissa c (metade da distância focal) e pertencem à elipse. Logo, para determinar suas ordenadas, basta substituir x por c na equação da elipse.

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

Então,

$$y = \pm \frac{b^2}{a} \Rightarrow y_p = \frac{b^2}{a} \text{ e } y_{p'} = -\frac{b^2}{a}$$

Daí, concluímos que a medida da corda focal mínima é:

$$\overline{PP'} = y_p - y_{p'} = \frac{2b^2}{a}$$

2ª maneira Sendo $\overline{PF} = k$, temos $\overline{PF'} = 2a - k$, pois, sendo P um ponto da elipse sabe-se que $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$.

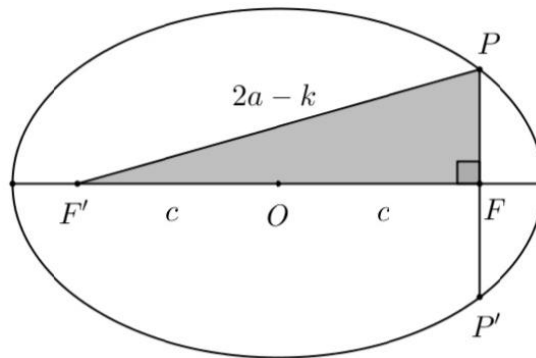


Figura 4.2

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $PF'F$, encontramos:

$$(2a - k)^2 = k^2 + (2c)^2 \text{ ou } k = \frac{b^2}{a}$$

e, portanto, a medida da corda focal mínima é:

$$\overline{PP'} = 2k = \frac{2b^2}{a}.$$

Terminada essa aula, saindo da sala, fui interceptado pela Tamires, uma das melhores alunas desta turma, que me apresentou a seguinte questão:

“Se essa corda da qual achamos a medida chama-se corda focal mínima deve ser porque ela é a menor de todas as cordas que passam por aquele foco?! Como se prova isso?”

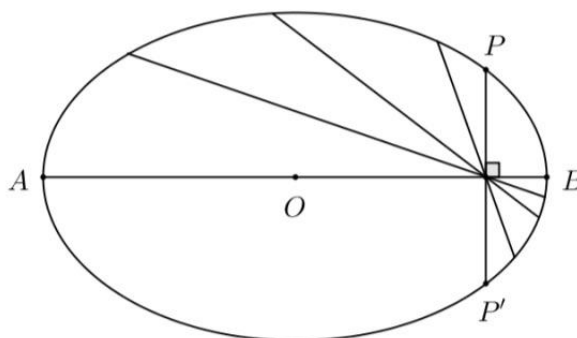


Figura 4.3

Respondi: *“Assim de pronto não sei responder, mas vou pensar e na semana que vem conversaremos”*, mas acrescentei: **“Pense você também”**.

Rabisquei o papel nas minhas poucas horas vagas e não consegui uma solução adequada ao nível do ensino médio. Ansioso, pois queria dar uma resposta convincente para a Tamires, acabei telefonando para o meu colega Jota, que tem uma sólida formação em desenho geométrico.

Meia hora depois ele retornou a ligação perguntando se eu tinha a coleção do Caronnet. Diante da resposta afirmativa, acrescentou: “Pegue o volume 8 - Cônicas, o problema 13 é o seu problema”. Como é bom ter um colega com quem partilhar as dúvidas e uma boa biblioteca à disposição!

Sugiro aos colegas, leitores da RPM, que, antes de consultar o Caronnet ou terminar a leitura deste artigo, **tentem resolver o problema para sentirem o peso e a beleza dele.**

A resolução do Caronnet baseia-se nas medidas dos raios vetores associados ao ponto genérico da elipse e isso, confesso, desestimulou-me um pouco para apresentá-la para os alunos. Na semana seguinte, mal entrando na sala da Tamires, ela se encaminhou em minha direção com uma folha de caderno nas mãos, e disse:

“Eu quase resolvi o problema da corda focal mínima.”

Vejamos a seguir as decisões tomadas pela Tamires.

Ela traçou uma corda PP' passando pelo foco F e considerou α a medida do ângulo $PF F'$ e β a medida do ângulo $P'F F'$. Traçou também os triângulos PFF' e $P'FF'$.

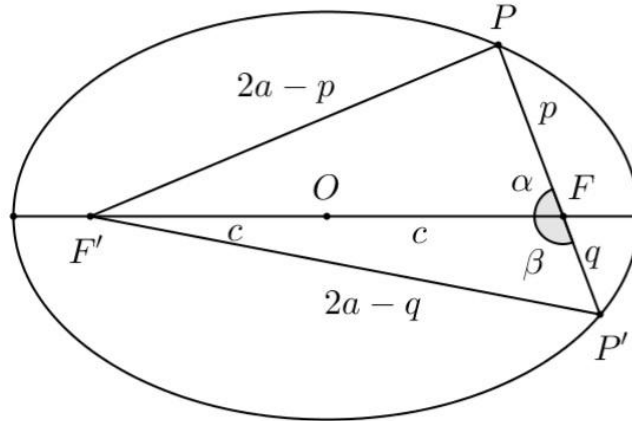


Figura 4.4

Fazendo α variar no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a medida de $\overline{PP'}$ assumirá todos os valores possíveis. Considerando:

$$\overline{PF} = p \text{ e } \overline{P'F} = q \Rightarrow \overline{PF'} = (2a - p) \text{ e } \overline{P'F'} = (2a - q).$$

Sendo $\overline{F'F} = 2c$ e aplicando o "teorema dos cossenos" nos triângulos PFF' e $P'FF'$, obtém-se:

$$(2a - p)^2 = p^2 + (2c)^2 - 2 \cdot p \cdot 2c \cdot \cos \alpha \Rightarrow p = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \alpha}$$

$$(2a - q)^2 = q^2 + (2c)^2 - 2 \cdot q \cdot 2c \cdot \cos \beta \Rightarrow q = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \beta}$$

Daí chegou a

$$p + q = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \alpha} + \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \beta} \text{ com } \alpha + \beta = 180^\circ,$$

resultado esse que deixou a Tamires em dúvida quanto à interpretação. **Foram indisfarçáveis o meu espanto e a minha emoção.**

A Tamires, usando recursos matemáticos totalmente ao seu alcance (Lei dos cossenos), que aliás foram estudadas nas minhas próprias aulas, praticamente resolveu o problema. **A minha modesta contribuição se deu a partir desse ponto.** Substituí

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ e } \cos \beta = -\cos \alpha$$

obtendo:

$$p + q = \frac{b^2}{a - c \cos \alpha} + \frac{b^2}{a + c \cos \alpha} = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \alpha}$$

Como α varia no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, temos

$$0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1.$$

Nessas condições, o menor valor de $p + q$ ocorrerá quando o denominador

$$a^2 - c^2 \cos^2 \alpha$$

for o maior possível, já que o numerador é uma constante, ou seja, quando

$$\cos^2 \alpha = 0.$$

Para isso devemos ter $\alpha = \frac{\pi}{2}$, e, nessa posição, a corda focal PP' fica perpendicular ao eixo maior, e sua medida passa a ser:

$$p + q = \frac{2ab^2}{a^2} = \frac{2b^2}{a}$$

Só por curiosidade, observemos que, se

$$\cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

a corda PP' coincide com o eixo maior e sua medida assume o maior valor possível, que obviamente é igual a $2a$.

Encerro este artigo afirmando que o Jota e o Caronnet são importantes para mim, mas as Tamires também o são.

4.2 – Raízes de polinômios com coeficientes inteiros

Como estamos interessados encontrar as raízes do polinômio característico de uma matriz, vamos relembrar alguns conceitos elementares que nos permitirá encontrar a fatoração de polinômios com coeficientes inteiros se suas raízes forem números racionais, o que ajuda em parte, pois podemos exibir candidatos para estas raízes caso elas existam através da afirmação a seguir:

Seja $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio na variável x de grau n com $a_i \in \mathbb{R}$. e $a_n \neq 0$. Dizemos que um número real α é uma raiz do polinômio $p(x)$ se e somente se $p(\alpha) = 0$.

AFIRMACÃO: Se p, q são números primos entre si e $\alpha = \frac{p}{q}$ é uma raiz do polinômio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ com $a_i \in \mathbb{Z}$ (coeficientes inteiros) então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n .

De fato:

$$p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$\stackrel{x q^n}{\Leftrightarrow} \underbrace{a_n p^n}_{1 \text{ termo}} + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q^1 + \dots + a_1 \cdot p^1 q^n + \underbrace{a_0 \cdot q^n}_{(n+2) \text{ termo}} = 0$$

Isolando o 1º termo, segue que

$$q(a_{n-1} p^n + \dots + a_1 p q^n) = -a_n \cdot p^n \stackrel{mdc(p,q)=1}{\Leftrightarrow} q \text{ divide } a_n$$

Isolando o $(n+2)^\circ$ termo, segue que

$$p(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot q^n) = -a_0 \cdot q^n \stackrel{mdc(p,q)=1}{\Leftrightarrow} p \text{ divide } a_0$$

Isto completa a prova da afirmação. ■

4.3 - Sugestões de Atividades

Atividade 4.1: Identifique a cônica dada pela equação:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 2y^2 - 5x + 2y = 4$$

Solução: A forma quadrática dessa cônica é $X^t A X$ onde $X = (x, y)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Segue que o polinômio característico de A é dado por

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (3 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 6) \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6 > 0$, segue da classificação apresentada na monografia que esta equação algébrica determina uma elipse. ■

Atividade 4.2: Identifique a cônica dada pela equação:

$$x^2 + 6xy + y^2 = 1$$

Solução: A forma quadrática dessa cônica é $X^t A X$ onde $X = (x, y)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue que o polinômio característico de A é dado por

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 \\ &= (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 4) \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 4 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -8 < 0$, segue da classificação apresentada na monografia que esta equação algébrica determina uma hipérbole. ■

Atividade 4.3: Exiba a forma quadrática e forma linear da equação do cone elíptico

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} - \frac{(z+1)^2}{4} = 0.$$

Solução: Segue que

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + 4(y-1)^2 - (z+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 4(y^2 - 2y + 1) - (z^2 + 2z + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 4y^2 - 8y + 4 - z^2 - 2z - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - z^2 + 2x - 8y - 2z + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{forma quadrática}} + \underbrace{[2 \ -8 \ -2] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{forma linear}} + 4 &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Atividade 4.4: Exiba a forma quadrática e forma linear o do parabolóide hiperbólico

$$1(x + 4) = \frac{(y + 3)^2}{2} - \frac{(z - 1)^2}{1}.$$

Solução: Segue que

$$2(x + 4) = (y + 3)^2 - 2(z - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8 = y^2 + 6y + 9 - 2(z^2 - 2z + 1)$$

$$\Leftrightarrow 0x^2 + 1y^2 - 2z^2 - 2x + 6y + 4z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{forma quadrática}} + \underbrace{[-2 \ 6 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{forma linear}} - 1 = 0. \quad \blacksquare$$

Atividade 4.5: Classifique a superfície quádrlica dada pela equação algébrica

$$-x^2 + 2yz + z - y = 100.$$

Solução: Inicialmente escrevemos a equação acima na forma matricial:

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 100 = 0$$

Vamos, agora, diagonalizar a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Segue da Seção 1.6 que

$$Q(v) = [v]_{\alpha}^t \cdot A \cdot [v]_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad Q(x, y, z) = [x \ y \ z] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para tanto, determinemos o polinômio característico da matriz \mathcal{M} , através da expressão:

$$P(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$$

Logo, $\lambda_1 = -1$ (raiz dupla) e $\lambda_2 = 1$ são as raízes do polinômio característico de \mathcal{M} . E, portanto, -1 e 1 são os seus autovalores. Para determinar os autovetores $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associados, basta resolver a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$ para $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$.

1° caso: $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = -x \\ z = -y \\ y = -z \end{cases}$$

Analisando este sistema de equações percebemos que a primeira é satisfeita para qualquer valor real de x ; a segunda e a terceira equações implicam em $z = -y$. Desta análise, podemos deduzir que os autovetores associados a $\lambda_1 = -1$ possuem a forma

$$v = (x, y, -y) = (x, 0, 0) + (0, y, -y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1)$$

com $x, y \neq 0$. Obtemos dois vetores LI associados a $\lambda_1 = -1$. São eles

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, 1, -1)$$

2° caso: $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = x \\ z = y \\ y = z \end{cases}$$

Podemos perceber que $-x = x$ faz sentido, apenas, se $x = 0$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são da forma

$$v_3 = (0, y, y) = y(0, 1, 1) \quad \text{com} \quad y \neq 0$$

O vetor $v_1 = (1, 0, 0)$ já possui norma igual a 1. Devemos normalizar apenas os vetores $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$. Temos:

- $u_1 = v_1 = (1, 0, 0)$
- $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(0, 1, -1)}{\|(0, 1, -1)\|} = \frac{(0, 1, -1)}{\sqrt{0+1+1}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
- $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(0, 1, 1)}{\|(0, 1, 1)\|} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{0+1+1}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Obtemos então, uma base ortonormal formada por autovetores:

$$\beta = \left\{ u_1 = (1, 0, 0), u_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right), u_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}.$$

Sendo

- $\alpha = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ a base canônica do \mathbb{R}^3
- $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base do \mathbb{R}^3 formada por autovetores.

Segue da Seção 1.6, do processo de diagonalização da forma quadrática que

$$Q(v) = [v]_{\beta}^t \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [v]_{\beta} \quad \text{onde } D = [T]_{\beta}^{\beta} \text{ e } [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, temos que

$$Q(v) = [x_1 \quad y_1 \quad z_1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Segue da Seção 1.2, Mudança de Referencial Cartesiano, que

$$[v]_{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\beta} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, a equação inicial da quádrlica, em relação ao novo referencial dado pelos autovetores, pode ser reescrita como:

$$[x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 100 = 0$$

\Downarrow

$$[x_1 \quad y_1 \quad z_1] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + [0 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow [-x_1 \quad -y_1 \quad z_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + [0 \quad -\sqrt{2} \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 - \sqrt{2}y_1 = 100.$$

Agora, vamos eliminar os termos lineares. Agrupando os termos de mesma variável e aplicando a técnica de completar quadrados, vem:

$$-x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 - \sqrt{2}y_1 = 100$$

$$\Leftrightarrow -x_1^2 - y_1^2 - \sqrt{2}y_1 + z_1^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow -x_1^2 - \left(y_1^2 + \sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}\right) + z_1^2 = 100 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x_1^2 - \left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + z_1^2 = \frac{199}{2}$$

Fazendo a mudança de variável $x_2 = x_1$, $y_2 = \left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $z_2 = z_1$ teremos

$$-x_2^2 - y_2^2 + z_2^2 = \frac{199}{2} \xrightarrow{\left(\div \frac{199}{2}\right)} -\frac{x_2^2}{\frac{199}{2}} - \frac{y_2^2}{\frac{199}{2}} + \frac{z_2^2}{\frac{199}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} = 1$$

Finalmente, podemos comparar esta equação com as equações das quádricas obtidas nas seções anteriores (em particular, a **Seção 3.5**) e vemos que esta quádrica é um **hiperbolóide de duas folhas**.

Atividade 4.6: Calcule a forma diagonalizada da matriz dos coeficientes da forma quadrática de cada uma das superfícies a seguir e utilize essa forma diagonalizada para classificá-las, na medida do possível.

a) $-4xz + y^2 - 4x + 2z - 3 = 0$

b) $2x^2 - 4xy - 2xz + 2y^2 + 2yz + 5z^2 - 10x + 6y - 2z - 7 = 0$

c) $3x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 2yz + 3z^2 - x + 2y + z - 9 = 0$

d) $2xy + z = 0$

Solução: Segue que

- a) $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (hiperbolóide de uma folha)
- b) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (cilindro elíptico ou parabolóide elíptico)
- c) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (elipsóide)
- d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (cilindro hiperbólico ou parabolóide hiperbólico)

Na Proposição 1.31, utilizamos um fato geral, sem demonstrá-lo, que vale para matrizes em geral. Em virtude disso, propomos a atividade a seguir para os casos particulares $n = 2$ e $n = 3$.

Atividade 4.7: Seja A uma matriz qualquer de ordem n e $u, v \in \mathbb{R}^n$. Temos que

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^t v \rangle$$

Mostre que este resultado vale para $n = 2$ e $n = 3$.

Prova: (caso $n = 2$): Seja

$$u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2) \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Como

$$A \cdot u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_1 + bu_2 \\ cu_1 + du_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^t \cdot v = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1 + cv_2 \\ bv_1 + dv_2 \end{bmatrix}$$

Segue que:

$$\langle Au, v \rangle = \langle (au_1 + bu_2, cu_1 + du_2), (v_1, v_2) \rangle = au_1v_1 + bu_2v_1 + cu_1v_2 + du_2v_2$$

$$\langle u, A^t v \rangle = \langle (u_1, u_2), (av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \rangle = au_1v_1 + cu_1v_2 + bu_2v_1 + du_2v_2$$

Assim,

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^t v \rangle$$

(caso $n = 3$): Seja

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

Como

$$A \cdot u = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \\ a_4 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3 \\ a_7 u_1 + a_8 u_2 + a_9 u_3 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot v = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 v_1 + a_4 v_2 + a_7 v_3 \\ a_2 v_1 + a_5 v_2 + a_8 v_3 \\ a_3 v_1 + a_6 v_2 + a_9 v_3 \end{bmatrix}$$

Segue que: $\langle Au, v \rangle =$

$$\begin{aligned} &= \langle (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3, a_4 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3, a_7 u_1 + a_8 u_2 + a_9 u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle \\ &= v_1 (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) + v_2 (a_4 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3) + v_3 (a_7 u_1 + a_8 u_2 + a_9 u_3) \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que: $\langle u, A^t v \rangle =$

$$\begin{aligned} &= \langle (u_1, u_2, u_3) (a_1 v_1 + a_4 v_2 + a_7 v_3, a_2 v_1 + a_5 v_2 + a_8 v_3, a_3 v_1 + a_6 v_2 + a_9 v_3) \rangle \\ &= u_1 (a_1 v_1 + a_4 v_2 + a_7 v_3) + u_2 (a_2 v_1 + a_5 v_2 + a_8 v_3) + u_3 (a_3 v_1 + a_6 v_2 + a_9 v_3) \\ &= v_1 (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) + v_2 (a_4 u_1 + a_5 u_2 + a_6 u_3) + v_3 (a_7 u_1 + a_8 u_2 + a_9 u_3) \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^t v \rangle \quad \blacksquare$$

CONCLUSÃO

Esta monografia teve como objetivo principal estudar um método de classificação de cônicas (circunferências, elipses, parábolas e hipérbolas) e de superfícies quádricas (parabolóides, elipsóides, hiperbolóides e cones) em função de sua equação algébrica usando técnicas de Álgebra Linear associadas à Geometria Analítica.

A abordagem como os assuntos foram expostos foi feita de forma a facilitar a compreensão do conteúdo de um aluno à nível de Ensino Médio e foi evitada a utilização de conhecimentos específicos que vão além da sua grade curricular, e devido a isso, houve uma grande preocupação com o uso da linguagem utilizada.

Devido à experiência obtida de alguns anos lecionando em turmas de Ensino Fundamental e Médio, é possível perceber que muitos alunos possuem certa aversão pela Álgebra (e pela Geometria também). Não pretendemos, em momento algum, desmerecer a Geometria - que é um ramo tão importante da Matemática. Contudo, queremos enfatizar o grande potencial algébrico existente e atrelado à Geometria, que por muitas vezes não é valorizado.

Uma frase famosa do matemático e filósofo Francês Le Rond D'Alembert (1717-1783), mais conhecido no meio matemático apenas como D'Alembert, dizia que: "A Álgebra é muito generosa, frequentemente ela dá mais, do que se podia esperar dela." À primeira vista, é possível que se pense na Álgebra como um 'monte de contas', às vezes, sem aplicação prática; mas na verdade, ela nos permite encontrar resultados algébricos que se refletem precisamente na Geometria. Como vimos neste trabalho, é possível classificar figuras no plano e no espaço simplesmente através de cálculos algébricos, sem depender exclusivamente da geometria, pois em muitos casos, se torna difícil construir sua representação gráfica sem um apoio tecnológico.

Ao concluir esta dissertação, esperamos que este texto possa contribuir como estímulo e fonte de referência aos possíveis leitores interessados neste tipo de assunto, na busca de ampliar seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Boyer, Carl B. *História da Matemática*, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide - 2ª ed. - São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [2] - Boldrini, José Luiz e Costa, Sueli I. Rodrigues e Figueiredo, Vera Lúcia e Wetzler, Henry G. *Álgebra Linear* - 3ª ed. - São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [3] - Gómez, Jorge Joaquín Delgado e Frensel, Katia Rosenvald e Crissaff, Lhaylla dos Santos. *Geometria Analítica* - SBM Coleção PROFMAT.
- [4] - Nery, Chico - *Uma Pequena História de Um Belo Problema* - Revista do Professor de Matemática 71, SBM.
- [5] - Steinbruch, Alfredo e Winterle, Paulo. *Geometria Analítica* - 2ª edição - Porto Alegre: McGRAW-HILL
- [6] - Sandoval Junior, Leonidas - *Algebra Linear: Para Ciências Econômicas, Contábeis e da Administração* - São Paulo - Cengage Learning - 2010
- [7] - Anton, Howard, *Elementary Linear Algebra*, - Editora Wiley - 1991
- [8] - Kolman, Bernard e Hill, David R. - *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações* - 8ª Edição - Rio de Janeiro - Editora LTC - 2006.
- [9] - Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear* - SBM Coleção PROFMAT.
- [10] - Julianelli, José Roberto e Cataldo, João Carlos. *Vetores, Geometria Analítica e Álgebra* - 1ª Reimpressão - Rio de Janeiro: Oficina do Autor, 1999.
- [11] - Iezzi, Gelson e Dolce, Osvaldo e Degenszajn, David e Périco, Roberto. *Matemática: volume único* - São Paulo: Atual, 2002.
- [12] - Ribeiro, Jackson. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*, 3: ensino médio - São Paulo: Scipione, 2010.
- [13] - Venturi, Jacir J. *Cônicas e Quádricas* - 5ª edição - Curitiba: Artes Gráficas Editora Unificado, 2003.

Sites Consultados:

- [14]- http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2007.1/qs/quadric-surfaces_br.html
- [15] - <http://www.fatosmatematicos.blogspot.com.br/>
- [16] - <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=588&evento=3#menu-galeria>
- [17] - <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm>