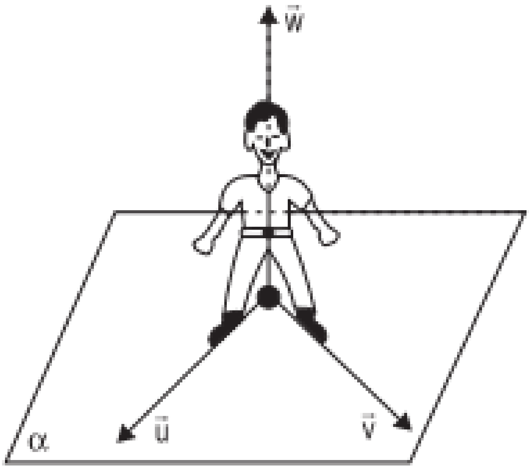
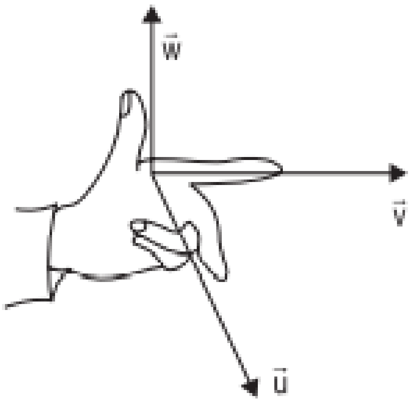
17. MULTIPLICAÇÃO VETORIAL OU EXTERNA

SÍMBOLO: $\vec{u} \times \vec{v}$

TRIEDRO POSITIVO



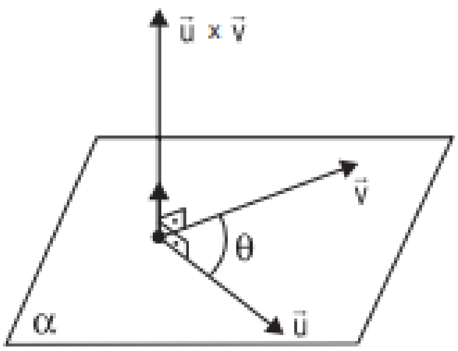
Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, nesta ordem, formam um triedro positivo se um observador postado em $\vec{w}$ e de frente para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem à sua direita o vetor $\vec{u}$ e à sua esquerda o vetor $\vec{v}$.



Ao repto de convencionar o triedro positivo, a Física utiliza a regra da mão esquerda: dispõe-se o dedo médio na direção e sentido de $\vec{u}$; o indicador na direção e sentido de $\vec{v}$; o polegar indicará a direção e o sentido de $\vec{w}$.

DEFINIÇÃO

O produto vetorial ou externo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos entre si é um terceiro vetor com as seguintes características quanto:



1) **à direção:** o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2) **ao sentido:** os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$, nesta ordem, formam um triedro positivo.

3) **ao módulo:**

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$$

onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

OBSERVAÇÃO

1) Como operação autônoma, a multiplicação vetorial foi criada por J. Gibbs.

2) Merecem cuidados:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta$ (verdadeiro)

$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$ sen θ (falso)

Nulidade do produto externo

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, se:

I) um dos vetores for nulo;

II) os dois vetores forem paralelos, pois o sen $\theta = 0$ quando $\theta = 0°$ ou $\theta = 180°$.

OBSERVAÇÃO

Enfatizemos que para $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$:

a) o produto interno é nulo para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ortogonais;

b) o produto externo é nulo para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos.

Face o exposto, não é factível o cancelamento do fator comum a $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ e a $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

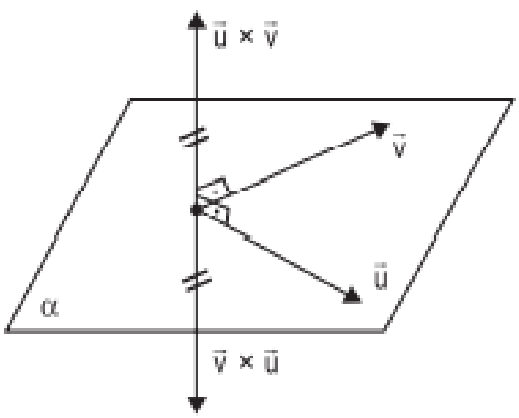
Propriedades

I) **Anti-comutativa:**

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

A justificativa é apresentada pela figura:

onde $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}|$



II) **Associativa:**

$k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$

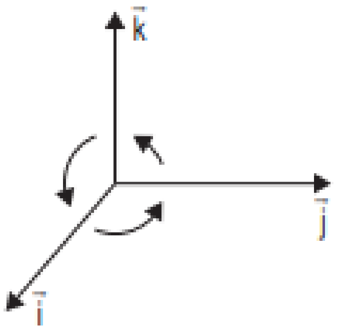
III) Distributiva em relação à adição de vetores:

$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

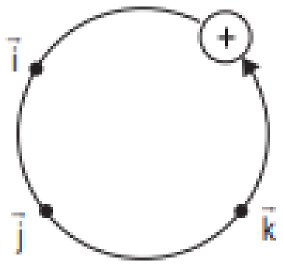
OBSERVAÇÃO

A demonstração fica postergada. Está condicionada à apresentação das propriedades do produto misto.

Multiplicação externa dos versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$



Em particular os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, nesta ordem, representam um triedro positivo.



Na prática, utilize a "circunferência" para efetuar o produto externo de dois desses versores, cujo resultado é o versor **faltante**, de sinal positivo se no sentido anti-horário. Negativo, se no sentido horário.

Exemplos:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$
$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Casos particulares: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

Expressão cartesiana do produto vetorial

Todo o capítulo de vetores apresenta uma importância assaz grande para a sua vida acadêmica e quiçá profissional. Em especial, o assunto em pauta.

Dados

$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ na base ortogonal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= x_1x_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_{\vec{0}} + x_1y_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} + x_1z_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{k}}_{-\vec{j}} + \\
&+ x_2y_1 \underbrace{\vec{j} \times \vec{i}}_{-\vec{k}} + y_1y_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{j}}_{\vec{0}} + y_1z_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{k}}_{\vec{i}} + \\
&+ x_2z_1 \underbrace{\vec{k} \times \vec{i}}_{\vec{j}} + y_2z_1 \underbrace{\vec{k} \times \vec{j}}_{-\vec{i}} + z_1z_2 \underbrace{\vec{k} \times \vec{k}}_{\vec{0}}
\end{aligned}$$

Fatorando em relação aos versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$:

$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$

Tal expressão pode ser escrita numa forma mais mnemônica, através do "determinante":

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Exemplo:

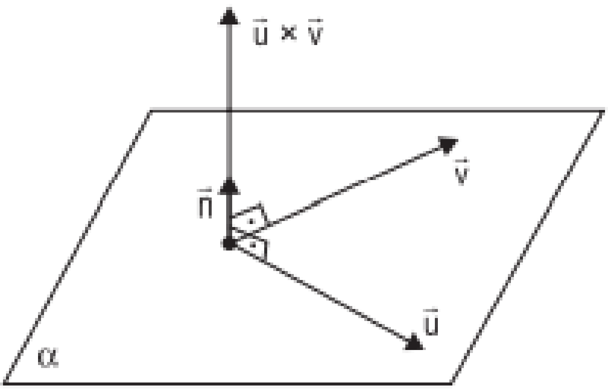
Sendo $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, calcular:

1) $\vec{u} \times \vec{v}$

Resolução:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

2) o vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.



Resolução:

$$\vec{n} = \text{vers}\ (\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Onde:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (3)^2} = \sqrt{35}$$

Então:

$$\vec{n} = \frac{\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{35}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{35}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{35}}\vec{k}$$

01. Efetuar:

a) $(\vec{i} \times \vec{k}) \times (\vec{i} \times \vec{j}) =$

b) $(\vec{i} \times \vec{k}) \times (\vec{k} \times \vec{j}) \times (\vec{j} \times \vec{j}) =$

Resp.: a) $-\vec{j}$; e b) $\vec{0}$

01. Conhecidos $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, pede-se:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

Resp.: $7\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$

b) $\vec{v} \times \vec{u}$

Resp.: $-7\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

c) $|\vec{u} \times \vec{v}|$

Resp.: $\sqrt{83}$

d) $|\vec{v} \times \vec{u}|$

Resp.: $\sqrt{83}$

01. Determinar o vetor unitário $\vec{n}$, ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$.

Resp.: $\vec{n} = \left(\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{5\sqrt{3}}\right)$

02. Achar o vetor $\vec{w} = (x, y, z)$, tal que $\vec{w} \cdot (1, 0, 2) = 3$ e $\vec{w} \times (1, 0, -1) = (-2, 3, -2)$.

Resp.: $\vec{w} = (3, 2, 0)$

03. Calcular o $|\vec{u}|$, conhecendo-se $|\vec{u} \times \vec{v}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 2$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 45°$.

Resp.: 4

04. O vetor $\vec{w}$ tem módulo 7, forma um ângulo agudo com o eixo das abscissas e é ortogonal aos vetores $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

Pede-se $\vec{w}$.

Resp.: $\vec{w} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

05. Determinar um vetor concomitantemente perpendicular aos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = \vec{i} + j$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{k}$.

Resp.: $-3\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$

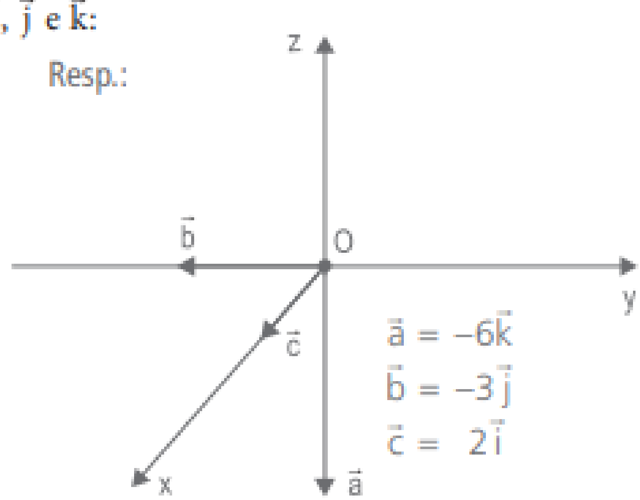
06. Representar no triedro positivo $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$:

a) $\vec{a} = (2\vec{j}) \times (3\vec{i})$

b) $\vec{b} = \vec{i} \times (3\vec{k})$

c) $\vec{c} = (2\vec{j}) \times \vec{k}$

Resp.:



07. Calcular o vetor de módulo 18 e simultaneamente ortogonal a $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e a $\vec{v} = (2, -4, 3)$.

Resp.: $(-6, -12, -12)$ ou $(6, 12, 12)$

08. Sendo $\vec{v} = (1, -1, 1)$, calcular o(s) vetor(es) $\vec{u} = (x, y, z)$ que satisfaça(m) as três condições seguintes:

1) $\vec{u}$ seja ortogonal ao eixo x;

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

3) $|\vec{v} \times \vec{u}| = 3\sqrt{6}$

Resp.: $\vec{u} = (0, 3, 3)$ ou $\vec{u} = (0, -3, -3)$

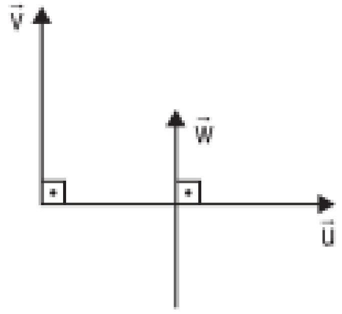
SUGESTÃO

Se $\vec{u}$ é ortogonal ao eixo x $\Rightarrow \vec{u} = (0, y, z)$.

01. Sendo $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$, calcular $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Resp.: 6

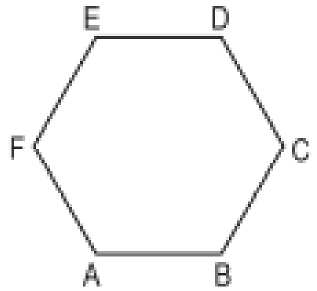
02. Na figura abaixo, obter:



$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{v} \times \vec{w}|$

Resp.: $|\vec{v}||\vec{w}|$

03. Num hexágono regular, a medida de cada lado vale 2.



Calcular $|(A - B) \times (C - B)|$.

Resp.: $2\sqrt{3}$

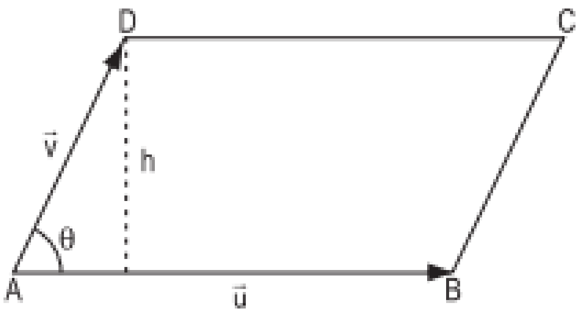
04. Seja α um plano determinado pelos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Determinar o conjunto de vetores ortogonais a α.

Resp.: k (1, 2, 2)

18. ÁREA DE UM PARALELOGRAMO E DE UM TRIÂNGULO

Tratar-se-á da interpretação geométrica do produto externo de dois vetores.

ÁREA DE UM PARALELOGRAMO



Seja um paralelogramo construído sobre $\vec{u} = (B - A)$ e $\vec{v} = (D - A)$ e h a sua altura.

Da Geometria Plana:

$S_{ABCD} = (AB)h$

Mas $AB = |\vec{u}|$

$h = |\vec{v}| \text{ sen } \theta$

Substituindo: $S_{ABCD} = |\vec{u}||\vec{v}| \text{ sen } \theta$ ou

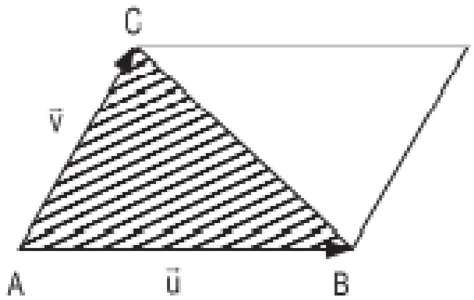
$$\boxed{S_{ABCD} = |\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Ou seja: geometricamente o módulo do produto externo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ coincide com a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Por diferença de pontos:

$$S_{ABCD} = |(B - A) \times (D - A)|$$

Área de um triângulo



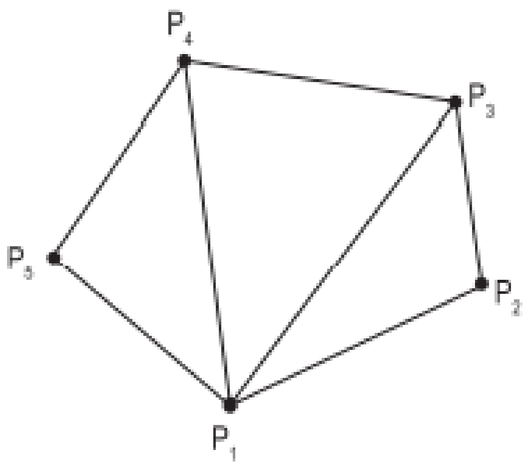
Face o exposto, depreende-se facilmente que a área do triângulo ABC é obtida por:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

Por diferença de pontos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|(B - A) \times (C - A)|$$

Área de polígono



Conhecidos os vértices de um polígono, podemos decompô-lo em triângulos.

Exemplificando: seja um pentágono de vértices

$P_i = (x_i, y_i, z_i)$ com

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$S = S_{P_1P_2P_3} + S_{P_1P_3P_4} + S_{P_1P_4P_5}$$

01. Sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 150°$, calcular:

a) a área do triângulo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

Resp.: a) 3 u.a.; b) 30 u.a.

01. Pede-se a área o paralelogramo construído sobre $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 120°$.

Resp.: $18\sqrt{3}$ u.a.

02. Provar que a área do paralelogramo construído sobre $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ é o dobro da área do paralelogramo construído sobre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

SUGESTÃO

Área do paralelogramo sobre $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$

$S = |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$

Aplicando a propriedade distributiva:

$S = 2|\vec{b} \times \vec{a}|$ (cdq)

03. Calcular a área do triângulo construído sobre $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Resp.: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ u.a.

04. A área de um paralelogramo construído sobre $\vec{u} = (1, 1, a)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ é igual a $\sqrt{22}$. Pede-se o valor de a.

Resp.: $a = \pm 3$

05. Determinar a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ cujas diagonais são $\vec{u} + \vec{v} = (0, 3, 5)$ e $\vec{u} - \vec{v} = (2, 1, 1)$.

Resp.: $\sqrt{35}$ u.a.

SUGESTÃO

Resolva o sistema:

$\vec{u} + \vec{v} = (0,\ 3,\ 5)$
$\vec{u} - \vec{v} = (2,\ 1,\ 1)$ obtendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$

06. No triângulo de vértices
$A = (0, 0, 2)$, $B = (3, -2, 8)$ e $C = (-3, -5, 10)$, calcular:

a) a medida dos lados a, b, c;

Resp.: $7;\ 7\sqrt{2};\ 7$

b) a medida dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$;

Resp.: 45°; 90°; 45°

c) a área do triângulo.

Resp.: $\dfrac{49}{2}$ u.a.

01. Os pontos (3, 1, 1), (1, –2, 3), (2, –1, 0) são os pontos médios dos lados do triângulo ABC. Qual a área do triângulo ABC?

Resp.: $2\sqrt{66}$ u.a.

02. Calcular a altura relativa ao vértice B do triângulo de vértices $A = (2, 4, 0)$, $B = (0, 2, 4)$ e $C = (6, 0, 2)$.

Resp.: $h_B = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$

SUGESTÃO

$$S_{ABC} = \frac{(AC)h_B}{2}$$

19. MULTIPLICAÇÃO MISTA

Definição

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o produto misto desses três vetores é o **escalar** representado por $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Quanto à ordem das operações, realiza-se inicialmente o produto externo e em seguida o produto interno.

Nulidade do produto misto

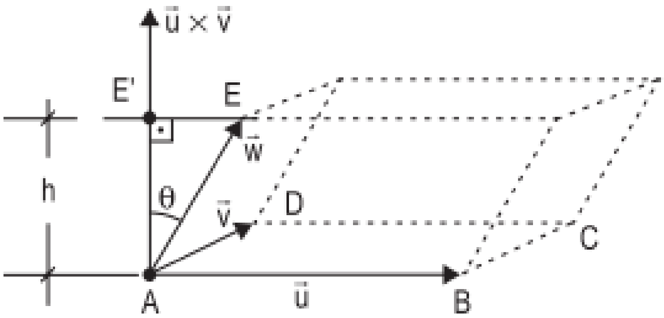
$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, se:

I) pelo menos um dos vetores for nulo;

II) $\vec{u}$ for paralelo a $\vec{v}$ (pois $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$);

III) os três vetores forem coplanares.

Interpretação geométrica do produto misto



Os três vetores não coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representam arestas de um paralelepípedo.

Sabe-se da Geometria Espacial que o volume do paralelepípedo (V_p) é o produto da área da base pela altura:

$V_p = (S_{ABCD})h$

Mas

$S_{ABCD} = |\vec{u} \times \vec{v}|$

$h = |\vec{w}| \cos \theta$ (do triângulo retângulo AE'E)

Substituindo:

$$V_p = |\vec{u} \times \vec{v}|\,|\vec{w}| \cos\theta$$

Como θ é o ângulo formado entre o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ e o vetor $\vec{w}$, tem-se acima a fórmula do produto interno entre os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$.

$$\boxed{V_p = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}}$$

Geometricamente, o produto misto $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$ representa o volume de um paralelepípedo de arestas $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Convenção de sinal

O volume do paralelepípedo pode estar afetado pelo sinal positivo ou negativo, conforme o ângulo θ seja agudo ou obtuso respectivamente.

Justificativa:

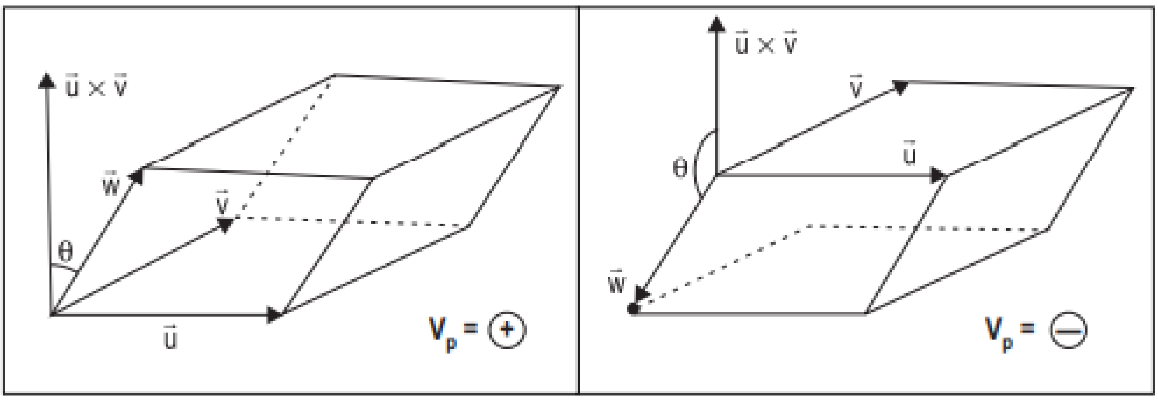
I) Se $0^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \cos\theta = + \Rightarrow V_p = +$

II) Se $90^\circ < \theta < 180^\circ \Rightarrow \cos\theta = - \Rightarrow V_p = -$

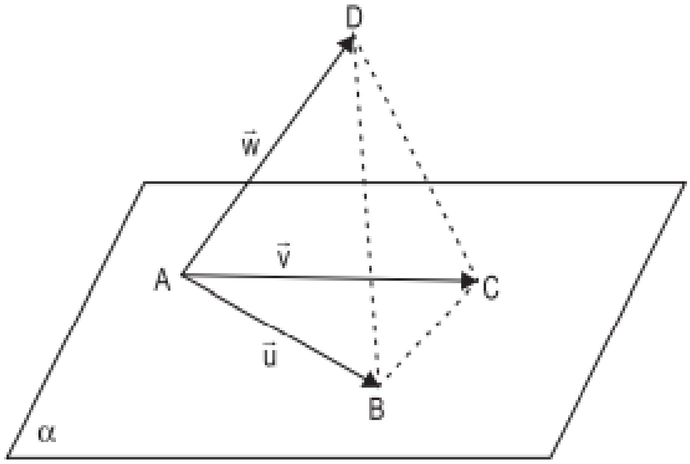
OBSERVAÇÃO

Em particular se:

a) $\theta = 0^\circ \Rightarrow V_p = +$
b) $\theta = 180^\circ \rightarrow V_p = -$
c) $\theta = 90^\circ \Rightarrow V_p = 0$



Volume do tetraedro



O volume do tetraedro (V_t) equivale a $\frac{1}{6}$ do volume de um paralelepípedo (V_p) construído sobre os mesmos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

$$V_t = \frac{1}{6} V_p$$

Então:

$$V_t = \frac{1}{6} \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$$

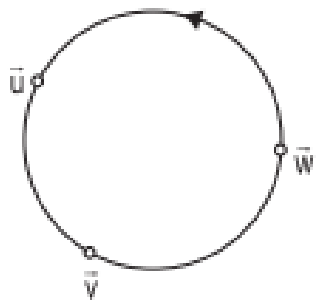
Por diferença de pontos:

$$V_t = \frac{1}{6} (B - A) x (C - A) \cdot (D - A)$$

Propriedades do produto misto:

I) **Cíclica:** a permuta circular ou cíclica dos fatores não altera o produto misto. Por outro lado, o produto misto troca de sinal quando se permuta não ciclicamente seus fatores.

Exemplos:



$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u} \\
&= \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v} \\
&= -\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} \\
&= -\vec{u} \times \vec{w} \cdot \vec{v}
\end{aligned}
$$

I) **Permuta dos símbolos:** não se altera o produto misto quando se permuta os símbolos da multiplicação interna e externa.

Exemplo:

$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$

Expressão cartesiana do produto misto

Consideremos os vetores por suas expressões cartesianas:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\
\vec{v} &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \\
\vec{w} &= x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}
\end{aligned}
$$

Procuramos a expressão cartesiana de $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$

1º passo:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}
\end{aligned}
$$

2º passo:

Multiplicamos escalarmente esta última expressão pelo vetor $\vec{w}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = x_3(y_1z_2 - y_2z_1) + y_3(x_2z_1 - x_1z_2) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

A memorização de tal expressão apresenta uma certa dificuldade. Por isso, faz-se mister, sob o aspecto mnemônico, que se empregue um determinante, dada a coincidência de resultados:

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(expressão cartesiana do produto misto)

Exercícios

01. Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$, calcular:

a) a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) o volume do paralelepípedo construído sobre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

c) a altura (em valor absoluto) do paralelepípedo.

d) o volume do tetraedro construído sobre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Resp.: a) 49; b) – 7; c) $\frac{1}{7}$; d) $-\frac{7}{6}$

01. Calcular o volume do tetraedro de arestas $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Resp.: $-\frac{19}{3}$

02. Determinar x para que o ponto A pertença ao plano BCD.
Dados: A = (4, 5, x), B = (–4, 4, 4), C = (0, –1, –1), D = (3, 9, 4).

Resp.: x = 1

SUGESTÃO

Faça $V_t = \frac{1}{6}(B - A)x(C - A) \cdot (D - A) = 0$

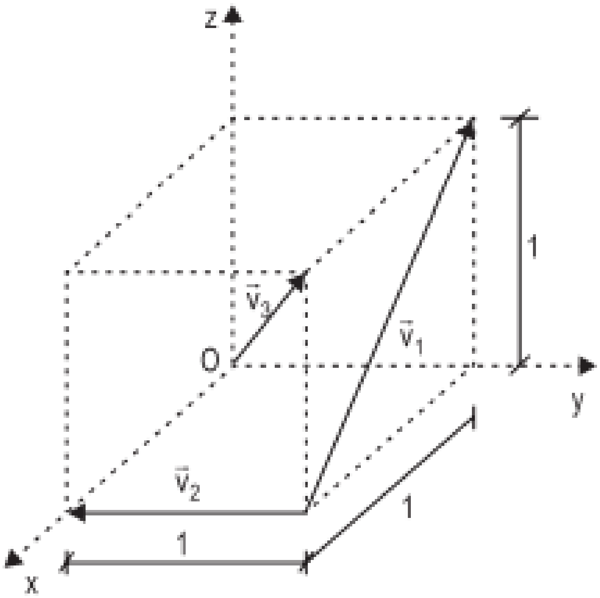
03. Os vetores $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ são coplanares?

Resp.: Sim.

04. Calcular o volume do paralelepípedo construído sobre $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Resp.: 1 u.v.

05. Na figura abaixo estão representados os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Achar o produto misto $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2) \times (\vec{v}_3 + 2\vec{v}_1)$.

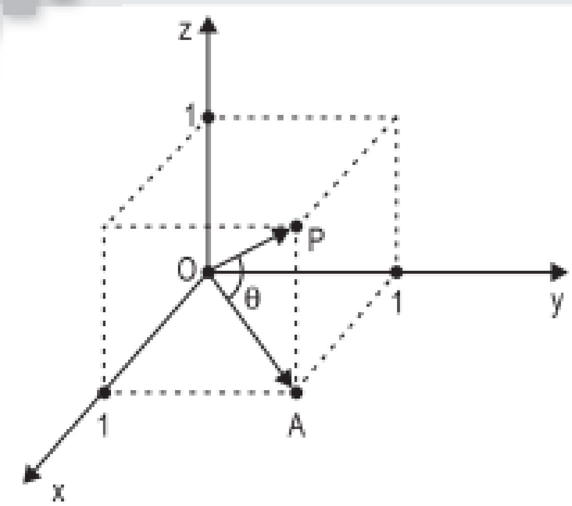


Resp.: –6

06. Calcular o ângulo da diagonal do cubo com a diagonal de uma face de mesma origem.

Resp.: $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ou $\theta \cong 35°$

SUGESTÃO



Sejam $(A - O) = \vec{i} + \vec{j}$ e $(P - O) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ os vetores que dão as direções das diagonais. Faça o produto interno.

07. Determinar o ângulo agudo formado por duas diagonais de um cubo.

Resp.: $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ou $\theta \cong 70°$

20. DUPLA MULTIPLICAÇÃO VETORIAL

Definição

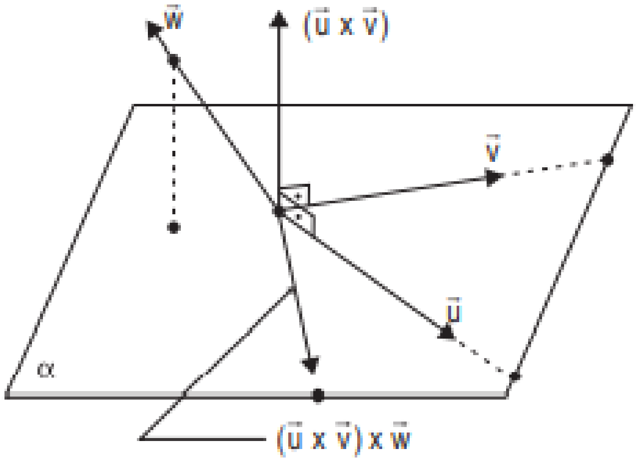
Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, chama-se duplo produto vetorial ou duplo produto externo ao vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ ou ao vetor $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. Esses dois vetores na maioria esmagadora das vezes são distintos, não se verificando a propriedade associativa. É imprescindível, portanto, o uso dos parênteses.

OBSERVAÇÃO

Relembrando:

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ resulta um escalar	$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$ resulta um escalar
$\vec{u} \times \vec{v}$ resulta um vetor	$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ resulta um vetor

Representação do duplo produto externo



Sem muita dificuldade podemos visualizar o vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$. Na figura representa-se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ coplanarmente a α; $\vec{w}$ não pertence ao plano α; $(\vec{u} \times \vec{v})$ é um vetor ortogonal a α; efetuando-se o produto externo entre $(\vec{u} \times \vec{v})$ e $\vec{w}$ tem-se um vetor ortogonal a eles e em decorrência coplanar a α. *Ipso facto*, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ são coplanares. Donde se infere que o vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ pode ser expresso como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Assim: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

Exercícios

01. Sejam os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, achar:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Resp.: 8

b) $|\vec{u} \times \vec{v}|$

Resp.: $\sqrt{181}$

c) $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$

Resp.: -38

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Resp.: $-51\vec{i} + 25\vec{j} - 6\vec{k}$

e) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Resp.: $-62\vec{i} + 3\vec{j} - 32\vec{k}$

01. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (3, 2, -1)$ calcular:

a) $|(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}|$

Resp.: $2\sqrt{19}$

b) $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$

Resp.: $-2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$

c) o vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp.: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -4\vec{u} + 6\vec{v}$

SUGESTÃO

Quanto ao item "c" faça $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

01. Considerando os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, $\vec{a} = (2, -4, 3)$ e $\vec{b} = (2, -1, 0)$, calcular:

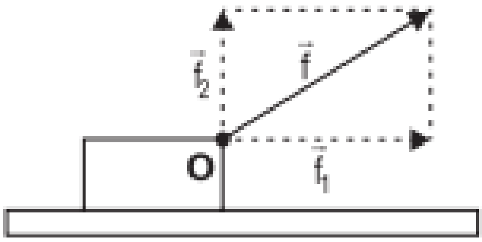
a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

Resp.: -9

b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$

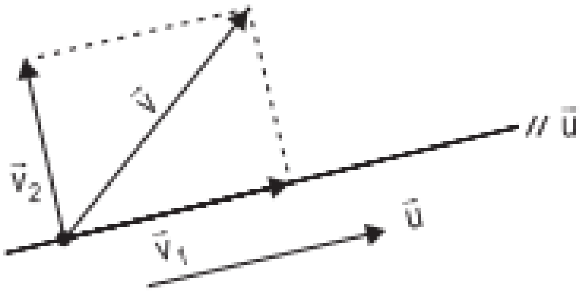
Resp.: $(-48, 3, 21)$

1. PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE UM OUTRO VETOR



Um assunto útil à Física: $\vec{f}$ representa uma força aplicada a um bloco. Nosso escopo é decompor $\vec{f}$ sobre outro vetor ou sobre os eixos cartesianos x e y.

Determinar o vetor $\vec{v}_1$, projeção do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$.



Dedução:

Sendo $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{u}$:

$\vec{v}_1 = k\vec{u}$ ①

Mas $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ②

Substituindo ① em ②:

$\vec{v} = k\vec{u} + \vec{v}_2$

Multiplicando escalarmente por $\vec{u}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}_2$ ou

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = k|\vec{u}|^2 + 0 \Rightarrow k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \quad ③$$

Substituindo ③ em ①:

$$\boxed{\vec{v}_1 = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}}$$

Ou simbolicamente:

$$\boxed{\text{vetor } \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}|^2}\vec{u}}$$

Fórmula que fornece o **vetor projeção** de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ (ou sobre $\vec{u}$).

OBSERVAÇÃO

1) Obtido $\vec{v}_1$, na necessidade de calcular-se $\vec{v}_2$:
$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$
onde $\vec{v}_2$ representa a projeção do vetor $\vec{v}$ na direção ortogonal a $\vec{u}$.

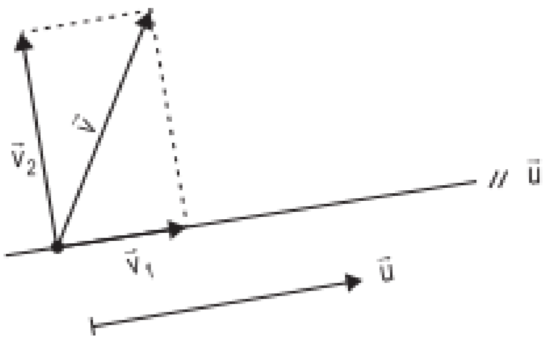
2) Reiteramos o exposto na interpretação geométrica do produto interno que a **medida algébrica** do vetor projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é obtida por:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, calcular:

1) O vetor projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Fórmula:

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(2) + (-1)(-1) + 0(2) = 3$

$|\vec{u}|^2 = (1)^2 + (-1)^2 + (0)^2 = 2$

Substituindo na fórmula: $\vec{v}_1 = \left(\frac{3}{2}\right)(1, \ -1, \ 0)$

Resp.: $\vec{v}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, 0\right)$

2) $\vec{v}_2$: o vetor projeção de $\vec{v}$ sobre a direção ortogonal a $\vec{u}$.

$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$

$= \text{vetor } proj_{\vec{u}}\vec{v} = (2, -1,\ 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{3}, 0\right)$

Resp.: $\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$

3) a medida algébrica da $proj_{\vec{u}}\vec{v}$

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\ .\ \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Exercícios

01. Sendo $\vec{u} = (5, 2, 5)$ e $\vec{v} = (2, -1, 2)$, calcular o vetor $proj_{\vec{u}}\vec{v}$.

Resp.: $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

02. Dados $\vec{u} = (5, 2, 5)$ e $\vec{v} = (2, -1, 2)$, determinar o vetor $proj_{\vec{v}}\vec{u}$.

Resp.: $(4, -2, 4)$

03. O valor da medida algébrica da projeção de $\vec{v} = (5, 4, -3)$ sobre $\vec{u} = (0, 3, 0)$ é:

Resp.: 4

04. Achar o vetor projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ sobre um vetor perpendicular a $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Resp.: $\frac{22}{9}\vec{i} + \frac{38}{9}\vec{j} + \frac{41}{9}\vec{k}$ (ou o seu oposto)

05. O vetor projeção de $\vec{u} = (0, 1, 5)$ sobre o vetor $\vec{v} = (3, -5, 1)$ é:

Resp.: $(0, 0, 0)$

OBSERVAÇÃO

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

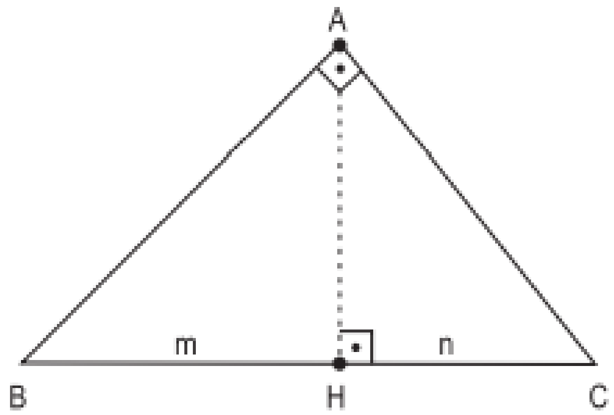
06. Seja o triângulo retângulo em A, de vértices $A = (3, -2, 8)$, $B = (0, 0, 2)$ e $C = (-3, -5, 10)$.

Calcular:

a) $\overrightarrow{BH}$

b) m

c) n



Resp.: a) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 4\right)$

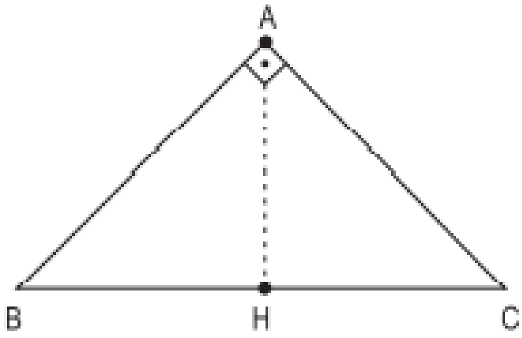
b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

01. Calcular os vetores projeção de $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

Resp.: $3\vec{i}, -2\vec{j}, -3\vec{k}$

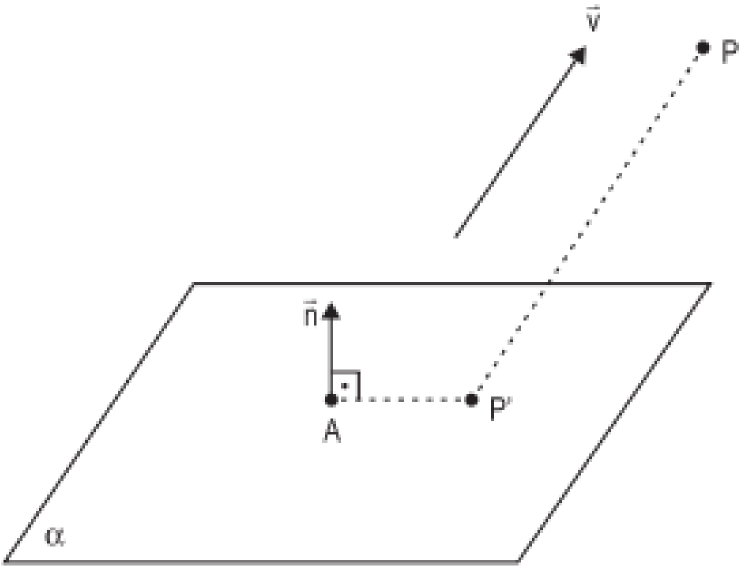
02. Na figura abaixo, tem-se o triângulo retângulo de vértices ABC. Considere H o pé da altura do triângulo relativa ao vértice A e calcule o vetor (H – A). Dados A = (1, 2, –1), B = (–1, 0, –1) e C = (2, 1, 2).



Resp.: $(H - A) = -\frac{14}{19}\vec{i} - \frac{30}{19}\vec{j} + \frac{24}{19}\vec{k}$

2. PROJEÇÃO DE UM PONTO SOBRE UM PLANO

Projeção oblíqua



Seja α um plano individualizado pelo ponto A e por um vetor unitário $\vec{n}$, a ele ortogonal. Queremos as coordenadas de P' que é a projeção do ponto P sobre o plano α, segundo a direção do vetor $\vec{v}$, dado.

Dedução:

O vetor (P' – A) é ortogonal a $\vec{n}$. O vetor (P' – P) é paralelo a $\vec{v}$.

Donde: $(P' - A) \cdot \vec{n} = 0$ ① e

$(P' - P) = k\vec{v} \Rightarrow P' = P + k\vec{v}$ ②

Substituindo ② em ①:

$(P + k\vec{v} - A) \cdot \vec{n} = 0$ ou

$(P - A) \cdot \vec{n} + k\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

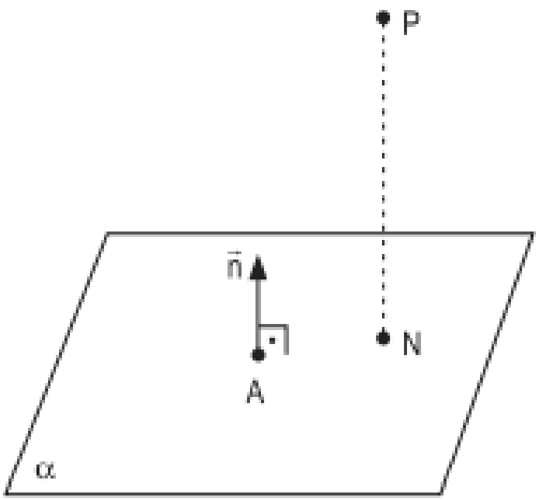
Isolando k:

$$k = \frac{(A - P) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \quad ③$$

Substituindo ③ em ②:

$$P' = P + \frac{(A - P) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Projeção ortogonal

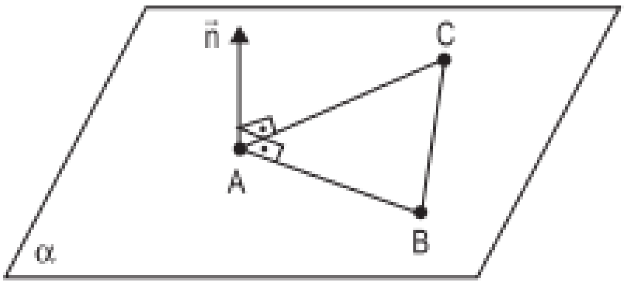


Para este caso, basta substituir na fórmula acima o vetor $\vec{v}$ pelo vetor $\vec{n}$. Lembrando que $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, obtém-se:

$$N = P + [(A - P) \cdot \vec{n}]\, \vec{n}$$

onde N é denominado **pé da normal** do ponto P sobre o plano α.

Cálculo de $\vec{n}$



Se o plano α for determinado por três pontos A, B e C, o vetor $\vec{n}$, unitário e normal ao plano é obtido por:

$$\vec{n} = \frac{(B - A) \times (C - A)}{|(B - A) \times (C - A)|}$$

Exercícios

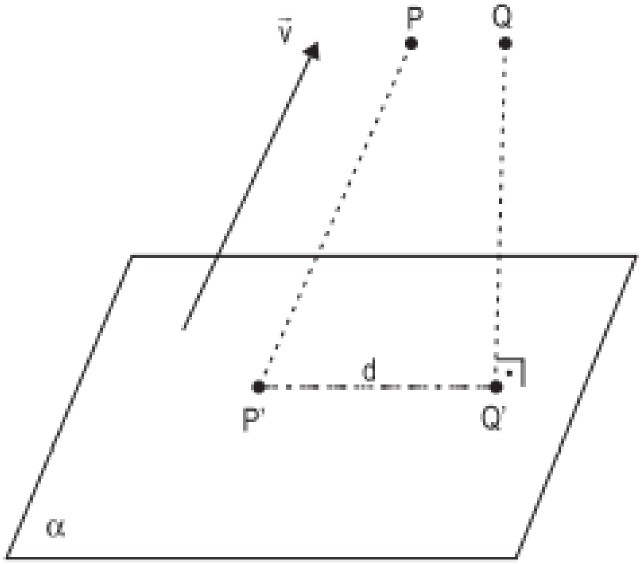
01. Achar as coordenadas da projeção do ponto P sobre o plano determinado por A, B e C, segundo a direção do vetor $\vec{v}$. Dados: A = (2, 1, 0), B = (0, 2, 1), C = (0, 0, 2), P = (0, –1, 0) e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

Resp.: $P' = \left(\frac{10}{7}, -1, \frac{10}{7}\right)$

02. Calcular as coordenadas da projeção ortogonal de P = (0, –1, 0) sobre o plano determinado pelos pontos A = (2, 1, 0), B = (0, 2, 1) e C = (0, 0, 2).

Resp.: $N = \left(\frac{30}{29}, \frac{-9}{29}, \frac{40}{29}\right)$

03. Seja α um plano determinado pelos pontos A = (0, 0, 3), B = (1, 1, 3) e C = (2, 1, 3). A distância entre os pontos P = (1 , 0, 1) e Q = (x, 0, 2), com x > 0 é $\sqrt{2}$. Considere Q' a projeção ortogonal do ponto Q sobre o plano α, e P' a projeção do ponto P sobre a segundo a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.



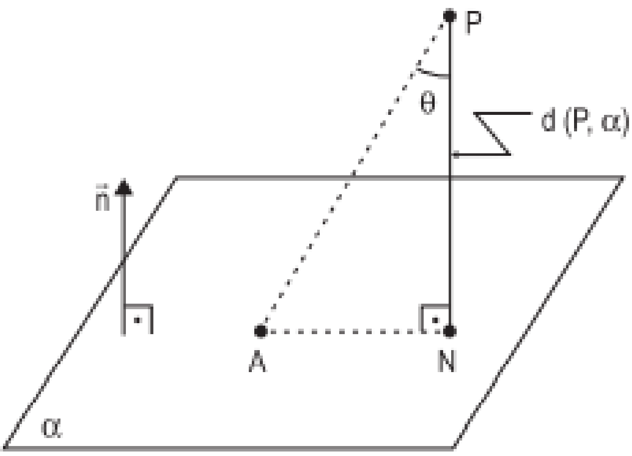
Calcular a distância d entre os pontos P' e Q'.

Resp.: $\sqrt{13}$

04. Considere os pontos A = (1, 0, 1), B = (1, 1, 2), C = (0, 2, 1), D = (1, 2, 0) e E = (3, 0, 0). Calcular a intersecção da reta DE, orientada no sentido de D para E, com o plano ABC.

Resp.: P' = (−2, 5, 0)

3. DISTÂNCIA DE PONTO A PLANO



Considere α um plano que contém o ponto A e ortogonal ao vetor unitário $\vec{n}$. Queremos a distância do ponto P ao plano α.

Dedução:

Do triângulo retângulo PNA:

$$\boxed{d(P, \alpha) = |(A - P)| \cos \theta}$$

O segundo membro da igualdade acima não se altera, se o multiplicarmos por $|\vec{n}|$:

$$d(P, \alpha) = |(A - P)|\,|\vec{n}| \cos \theta$$

que exprime o produto escalar entre os vetores (A – P) e $\vec{n}$. Donde se infere a fórmula:

$$\boxed{d(P, \alpha) = (A - P) \cdot \vec{n}}$$

OBSERVAÇÃO

A $d(P, \alpha)$ é convencionada positiva se o segmento orientado $\overline{PN}$ tiver o sentido de $\vec{n}$; negativa se $\overline{PN}$ tiver o sentido contrário a $\vec{n}$.

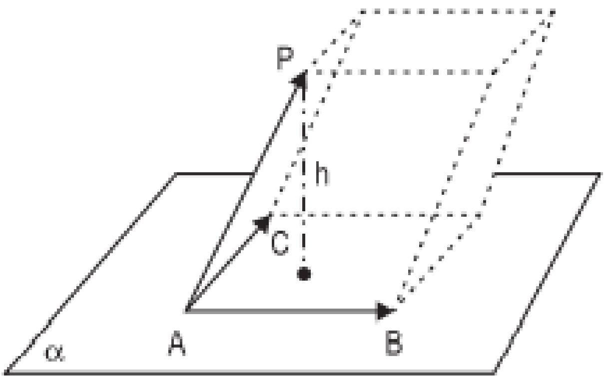
Pé da normal (N)

Trata-se da fórmula da projeção ortogonal de um ponto sobre um plano (deduzida no item anterior).

Então:

$$\boxed{N = P + [(A - P) \cdot \vec{n}]\,\vec{n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{N = P + d(P, \alpha)\,\vec{n}}$$

Se o plano α for individualizado por três pontos A, B e C, é mais cômodo calcular a distância do ponto P ao plano a como a altura do paralelepípedo cujas arestas são (B – A), (C – A) e (P – A).



$$d(P, \alpha) = h \text{ (altura do paralelepípedo)}$$
$$= \frac{\text{volume do paralelepípedo}}{\text{área da base}}$$

$$d(P,\alpha) = \frac{(B - A) \times (C - A) \cdot (P - A)}{|(B - A) \times (C - A)|}$$

Exercícios

01. Conhecidos os pontos A = (0, 1, 2), B = (1, 1, 3), C = (1, 3, 3) e D = (2, 1, 5), achar:

a) a altura do tetraedro ABCD relativa ao vértice A;

Resp.: $h = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) o pé da normal baixada de A sobre o plano BCD.

Resp.: $N = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{9}{5}\right)$

01. Dados os pontos A = (2, 4, 0), B = (0, 2, 4), C = (6, 0, 2), calcular:

a) a altura do tetraedro OABC relativa a O (origem);

Resp.: $h = \dfrac{13\sqrt{2}}{5}$

b) o pé da normal baixada de O sobre o plano ABC.

Resp.: $N = \left(\dfrac{39}{25}, \dfrac{13}{5}, \dfrac{52}{25}\right)$

01. Achar a distância do ponto P ao plano determinado pelos pontos A, B e C.
Dados: P = (–5, –4, 8), A = (2, 3, 1), B = (4, 1, –2) e C = (6, 3, 7).

Resp.: 11

Lista 02 de exercícios para entrega

1) Dados os pontos A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) e C(2, -1, -3), determinar o ponto D tal que $\vec{AD} = \vec{BC} \times \vec{AC}$.

2) Determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot (1, 4, -3) = -7$ e $\vec{x} \times (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$.

3) Resolver os sistemas:

$$a)\begin{cases} \vec{x} \times \hat{j} = \hat{k} \\ \vec{x} \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 10 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} \vec{x} \times (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 12 \end{cases}$$

4) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, -3, 4)$, calcular:

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

5) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, a)$, calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $\sqrt{62}$.

6) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, -1, 0) e C(4, 2, -2), determinar:

a) a área do triângulo ABC; b) a altura do triângulo relativa ao vértice C.

7) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular:

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ b) $[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

8) Verificar se são coplanares os vetores:

a) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$

b) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$

9) Determinar o valor de k para que sejam coplanares os vetores:

a) $\vec{u} = (2, -1, k)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (k, 3, k)$.

b) $\vec{u} = (2, k, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, k)$ e $\vec{w} = (3, 0, -3)$

10) Dados os vetores **u** = (1, 2, 3) e **v** = (2, -1, 4) obtenha o vetor **w**, de forma de **w** seja a projeção de **u** sobre **v** somada à projeção de **v** sobre **u**. Represente graficamente.