Aula 8

Produto Escalar

O produto escalar (ou interno) entre dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, escritos em coordenadas relativamente a uma base, é definido como:

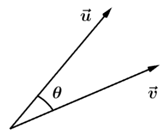
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

De maneira semelhante, pode definir-se o produto escalar entre dois vetores de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos, então

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos\theta}$$

onde θ é o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Este importante teorema pode ser provado usando a Lei dos Cossenos que, por sua vez, é consequência do Teorema de Pitágoras. Em particular, segue deste teorema que a definição de produto escalar não depende da base que escolhemos para escrever os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ através de coordenadas. Também segue deste teorema os seguintes resultados.

Corolário 1. O ângulo θ entre os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}}$$

Corolário 2 (Ortogonalidade)**.** Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *ortogonais* ($\theta = \frac{\pi}{2}$) se, e somente se, o produto escalar entre eles é zero:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Exemplo 1. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (6, -3, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

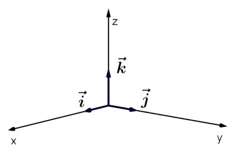
$$\cos\theta = \frac{6 \times 2 - 3 \times 1 + 2 \times (-2)}{\sqrt{36 + 9 + 4}\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{21}$$
$$\Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{5}{21}\right).$$

Exemplo 2. Os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$ e $\vec{v} = (5, -1, 1)$ são ortogonais?

Sim, pois $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 - 2 - 3 = 0$.

Produto Vetorial

Sejam $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ os vetores coordenados unitários de $\mathbb{R}^3$, como na figura ao lado.



Então $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é uma notação abreviada para $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$.

O produto vetorial (ou externo) entre os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é definido como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

onde $|\ \ |$ representa o determinante da matriz, que pelo Teorema de Laplace pode ser calculado como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

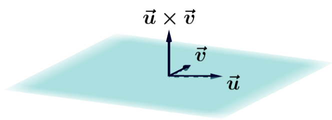
Exemplo 3. Calcule o produto vetorial entre $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-2, 4, 1)$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= \vec{i}(2 - 12) - \vec{j}(1 + 6) + \vec{k}(4 + 4) \\ &= (-10, -7, 8) = \vec{n}. \end{aligned}$$

Note que $\vec{n} \cdot \vec{u} = -10 - 14 + 24 = 0$ e $\vec{n} \cdot \vec{v} = 20 - 28 + 8 = 0$. Isto não foi por acaso, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2. O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

($\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$)



Demonstração. Para mostrar que $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$, basta mostrar que o produto escalar entre estes vetores é igual a 0.

Observe que para fazer o produto escalar entre $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{u}$, trocamos $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ pelas coordenadas de $\vec{u}$:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Isto corresponde a colocar as coordenadas de $\vec{u}$ na primeira linha da matriz:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

pois o determinante de uma matriz com duas linhas iguais é nulo.

Analogamente, vemos que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$. $\square$

Também é possível mostrar que a definição de produto vetorial não depende da base relativamente à qual escrevemos as coordenadas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

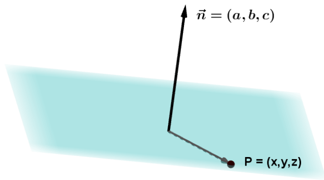
Planos

Vamos determinar primeiro os planos (dentro do espaço $\mathbb{R}^3$) que contém a origem. Um destes planos é determinado por um vetor $\vec{n}$ normal (ortogonal) a ele.

Plano que passa pela origem, ortogonal a $\vec{n} = (a, b, c)$:

$(x, y, z) \in$ Plano $\Leftrightarrow (x, y, z) \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{ax + by + cz = 0}.$$



De modo geral, para determinar um plano, precisamos de um ponto P pertencente ao plano e um vetor $\vec{n}$ normal a ele.

Plano ortogonal a $\vec{n} = (a, b, c)$ que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$:

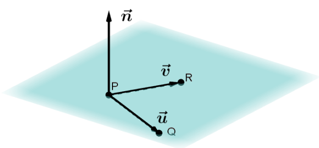
$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0} \quad \to \text{Equação cartesiana}$$

Note que uma equação envolvendo as 3 variáveis cartesianas, representa um objeto de 'dimensão 2', isto é, com área. (Heuristicamente, se não temos nenhuma restrição nas variáveis cartesianas x, y, z, então temos o espaço inteiro, com 'dimensão 3', com volume. Se temos 1 restrição (equação) nas variáveis cartesianas x, y, z, então temos um objeto com dimensão igual a 3-1=2, com área.) Neste caso, como a equação é linear, trata-se de um plano. Na próxima aula, vamos ver iniciar o estudo em que a equação não é linear. Tratam-se de objetos com área, que chamaremos de 'superfícies'. Os planos são as superfícies mais simples.

Exemplo 4. O que a equação $x = 0$ representa? Um ponto? Uma reta? Um plano?

Depende. Para responder a esta pergunta, precisamos saber que espaço estamos considerando: Em $\mathbb{R}$ é um ponto. Em $\mathbb{R}^2$ é uma reta. Em $\mathbb{R}^3$ é um plano (com $a = 1$, $b = c = 0$), usualmente conhecido por 'plano yz'

Exemplo 5. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $P = (3, -1, 2)$, $Q = (8, 2, 4)$ e $R = (-1, -2, -3)$.



Vetores 'tangentes' ao plano:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{Q} - \vec{P} = (5, 3, 2) \\ \vec{v} &= \vec{R} - \vec{P} = (-4, -1, -5). \end{aligned}$$

Vetor normal ao plano:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-13, 17, 7).$$

Plano normal a $\vec{n}$ passando por P:

$$-13(x - 3) + 17(y + 1) + 7(z - 2) = 0 \Leftrightarrow -13x + 17y + 7z = -42.$$

Exemplo 6. Determine se os seguintes planos são paralelos, perpendiculares ou, se nenhum dos casos, calcule o ângulo entre eles.

(1) $2z = 4y - x$ e $3x - 12y + 6z = 1$.

Os vetores normais são $\vec{n_1} = (-1, 4, -2)$ e $\vec{n_2} = (3, -12, 6)$. Como $\vec{n_2} = -3\vec{n_1}$, os planos são paralelos.

(2) $x + 2y + 2z = 1$ e $2x - y + 2z = 1$.

Os vetores normais são $\vec{n_1} = (1, 2, 2)$ e $\vec{n_2} = (2, -1, 2)$. O produto escalar, $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 4$. Logo, o ângulo θ entre os planos é dado por

$$\begin{aligned} & \cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \, \|\vec{n_2}\|} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}. \\ \Rightarrow \quad & \theta = \arccos\left(\tfrac{4}{9}\right). \end{aligned}$$

Exemplo 7. Determine a equação paramétrica da reta que é interseção dos planos

$$z = 2x - y - 5 \text{ e } z = 4x + 3y - 5.$$

1^a maneira (algébrica) - Resolver o sistema:

$$\begin{cases} z = 2x - y - 5 \\ z = 4x + 3y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 4x + 3y - 5 \\ z = 4x + 3y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ z = \frac{5x}{2} - 5 \end{cases}$$

Como x é uma variável livre, podemos fazer $x = t$ para obter a parametrização:

$$x = t, \; y = -\frac{t}{2}, \; z = \frac{5t}{2} - 5, \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

2^a maneira (geométrica) - A reta r de interseção dos planos está contida no 1^o plano, logo r é perpendicular ao vetor normal $\vec{n_1}$ do 1^o plano. Da mesma maneira, r também está contida no 2^o plano, logo r é perpendicular ao vetor normal $\vec{n_2}$ do 2^o plano. Então, um vetor diretor $\vec{v}$ da reta r satisfaz: $\vec{v} \perp \vec{n_1}$ e $\vec{v} \perp \vec{n_2}$. Podemos tomar:

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4, -2, 10).$$

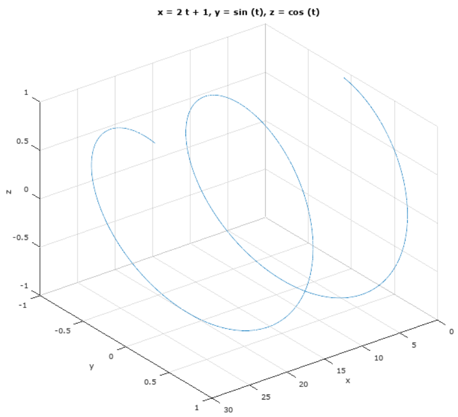
É fácil ver que o ponto $P = (0, 0, -5)$ pertece à reta r (satisfaz as 2 equações dos planos). Logo, uma parametrização para a reta r é dada por:

$$r : \vec{P} + s\vec{v} = (0, 0, -5) + s(4, -2, 10) = (4s, -2s, 10s - 5), \; \forall s \in \mathbb{R}.$$

(Note que obtivemos uma parametrização diferente para r. As duas parametrizações, da mesma reta r, estão relacionadas pela mudança de parâmetro $t = 4s$.)

Exemplo 8. Considere o ponto $P_0 = \left(\frac{\pi}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e a curva C parametrizada por:

$$\mathbf{r}(t) = (2t + 1, \operatorname{sen} t, \cos t), \; t \in [0, 4\pi].$$



(1) Determine a equação da reta tangente à curva C no ponto P_0.

Temos que

$$P_0 = \mathbf{r}(t_0) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}+1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (2t_0+1,\, \operatorname{sen} t_0, \cos t_0) \Leftrightarrow t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

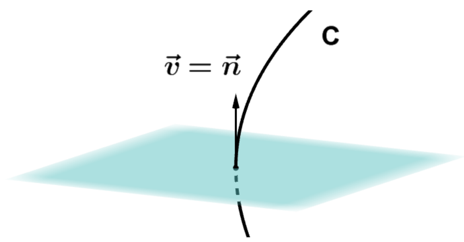
Um vetor tangente à curva C no ponto P_0 é dado por:

$$\vec{v} = \mathbf{r}'(t)|_{t=t_0} = (2, \cos t, -\operatorname{sen} t)|_{t=t_0} = (2, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}).$$

Finalmente a equação da reta:

$$\vec{P_0} + t\vec{v} = \left(\frac{\pi}{2}+1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(2) Determine a equação do plano perpendicular à curva C no ponto P_0.



Note que o vetor $\vec{v}$ tangente à curva, é perpendicular ao plano. Logo podemos tomar $\vec{n} = \vec{v}$ para o vetor normal ao plano:

$$2\left(x - \frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y - \tfrac{\sqrt{2}}{2}z = \pi + 2.$$