Aula 9

Cilindros e Quádricas

Cilindros

Dizemos que uma superfície é um *cilindro* se na equação cartesiana da superfície há uma variável que não aparece.

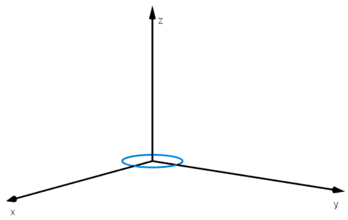
Exemplo 1.

$$x^2 + y^2 = 1$$

No espaço, o conjunto de pontos que satisfazem esta equação é uma superfície. Por definição, trata-se de um cilindro pois a variável z não aparece na sua equação. Fazendo várias interseções da superfície com planos horizontais, obtemos várias curvas dentro da superfície (seu "esqueleto"), e temos uma ideia de como é a superfície.

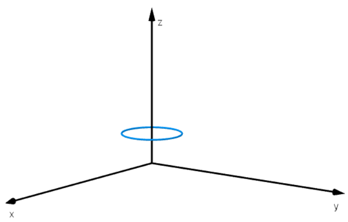
Interseção da superfície com o plano $z = 0$:

$x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$.



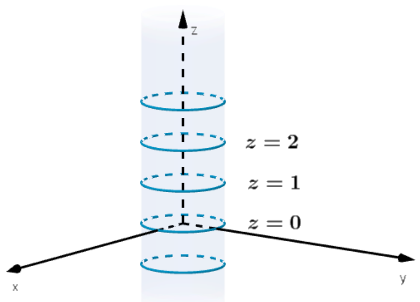
Interseção da superfície com o plano $z = 1$:

$x^2 + y^2 = 1$ e $z = 1$.



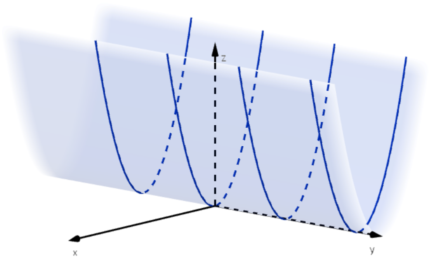
Na prática, para esboçar um cilindro, podemos:

- Desenhar a curva no plano onde aparecem as duas variáveis;
- "Arrastar" a curva ao longo da variável livre (que não aparece na equação).



Exemplo 2.

$$z = x^2$$



Exemplo 3. Identifique e parametrize a curva C de interseção entre a superfície $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $x + y + z = 1$.

A projeção da curva C no plano $z = 0$ é uma circunferência de raio 1: $x^2 + y^2 = 1$. Isto permite-nos começar por parametrizar as coordenadas x e y da curva C (as mesmas da curva projetada):

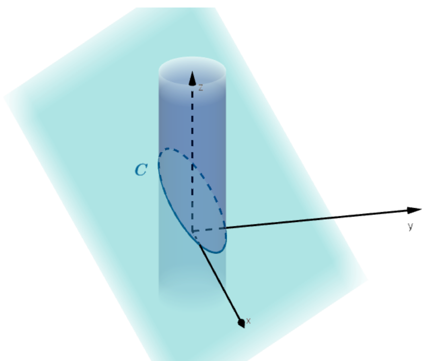
$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \underline{\quad ? \quad}), \ t \in [0, 2\pi].$$

Para parametrizar a coordenada z, vamos utilizar a outra equação:

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - x - y = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t.$$

Assim, a curva C é parametrizada por

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos t - \operatorname{sen} t), \ t \in [0, 2\pi].$$

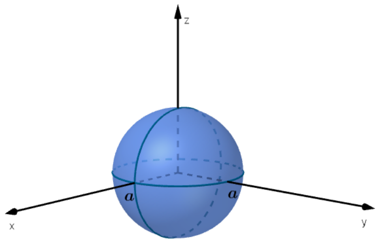


<u>Quádricas</u>

Vamos dividir as superfícies quádricas em 6 classes.

I) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Pelo Teorema de Pitágoras, trata-se do conjunto de pontos (x, y, z) que estão à distância 1 da origem: esfera de raio $a = 1$.

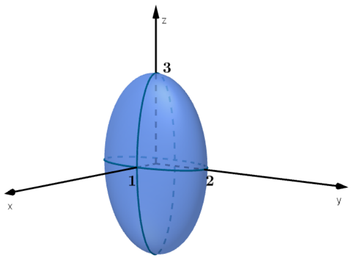


E a superfície de equação $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$?

Podemos escrever

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1.$$

Esta superfície é uma "distorção" da esfera de raio 1, obtida esticando a esfera duas vezes na direção y e três vezes na direção z.



Elipsóide

De fato, nas coordenadas

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \frac{y}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{z}{3},$$

temos a esfera

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1,$$

e

$$x = \bar{x}, \quad y = 2\bar{y} \quad \text{e} \quad z = 3\bar{z}.$$

Mais geralmente,

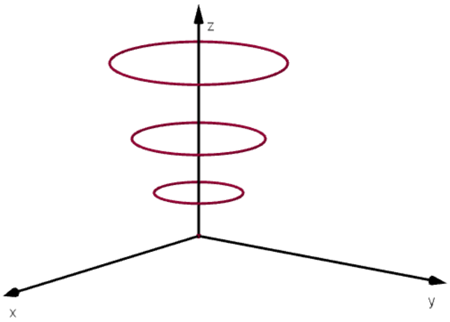
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

é um **Elipsóide** com semi-eixos a, b e c.

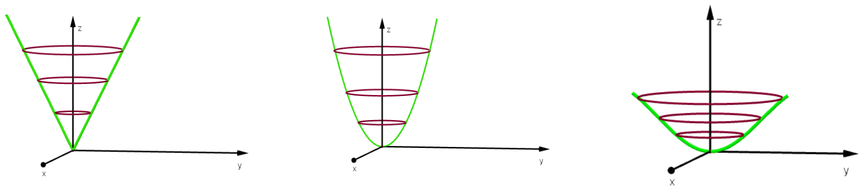
II) $z = x^2 + y^2$

Vamos fazer interseções da superfície com planos horizontais: " cortes horizontais".

$$\begin{array}{lll} z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 0: & x^2 + y^2 = 0 & \quad (0,0) \\ z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 1: & x^2 + y^2 = 1 & \\ z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 2: & x^2 + y^2 = 2 & \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

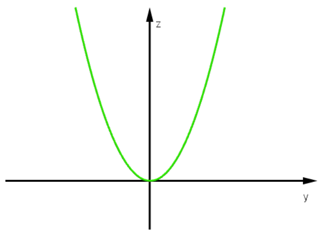


Qual a superfície correspondente? Qual das superfícies abaixo?

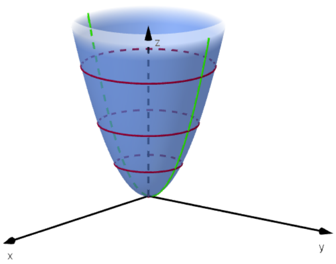


Vamos determinar a curva verde, fazendo uma interseção da superfície com o plano vertical $x = 0$: um "corte vertical".

$$z = x^2 + y^2 \text{ e } x = 0 \Leftrightarrow z = y^2 \rightarrow \text{ Parábola no plano } yz$$



Assim, a superfície é:



Parabolóide Elíptico

A superfície

$$z = 4x^2 + 3y^2$$

é um parabolóide "distorcido". Os cortes horizontais são elipses e o corte vertical $x = 0$ é um parábola $z = 3y^2$.

Mais geralmente,

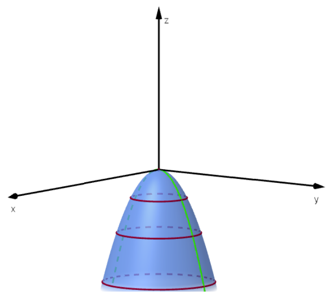
$$\boxed{\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

é um **Parabolóide elíptico**.

Exemplo 4.

$$z = -x^2 - y^2$$

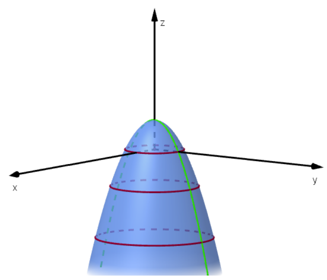
É um parabolóide virado para baixo. (Note que c pode ser negativo: neste caso $a = b = 1$ e $c = -1$)



Exemplo 5.

$$x^2 + y^2 + z = 1$$

Podemos escrever $-(z - 1) = x^2 + y^2$. É um parabolóide virado para baixo e centrado no ponto $(0, 0, 1)$.

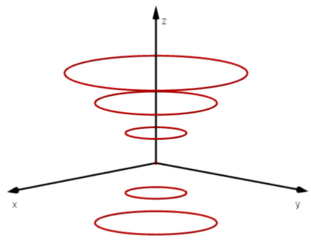


III) $z^2 = x^2 + y^2$

Há uma simetria em z, trocando na equação da superfície z por $-z$, nada se altera. Isto significa que a parte superior da superfície ($z > 0$) é espelhada através do plano xy, na parte inferior da superfície ($z < 0$). Desta maneira, basta analisar o que se passa para $z \geq 0$ e depois "espelhar" para $z < 0$.

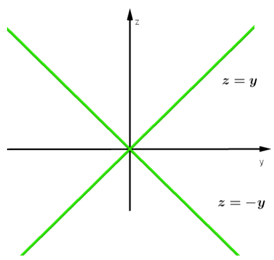
Cortes horizontais:

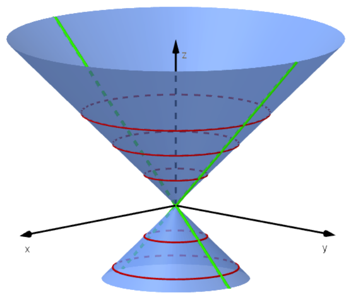
$$z = 0: \ x^2 + y^2 = 0, \quad (0, 0)$$
$$z = 1: \ x^2 + y^2 = 1$$
$$z = 2: \ x^2 + y^2 = 4$$
etc.



Corte vertical:

$$x = 0: \ z^2 = y^2 \ \Leftrightarrow \ z = \pm y \ \rightarrow \ \text{duas retas no plano } yz.$$





Cone

(Nota: a parte de baixo da figura aparece desenhada “mais pequena” porque o Geogebra desenha as superfícies em *perspectiva*. Como mencionado antes, a parte de baixo da figura é igual à parte de cima refletida sobre o plano xy.)

Mais geralmente,

$$\boxed{\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

é um **Cone**.

Podemos escrever a equação do cone $z^2 = x^2 + y^2$ como $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Nas próximas quádricas, vamos considerar dois tipos de superfícies, que correspondem a

$$x^2 + y^2 - z^2 = \epsilon$$

onde $\epsilon > 0$ ou $\epsilon < 0$.

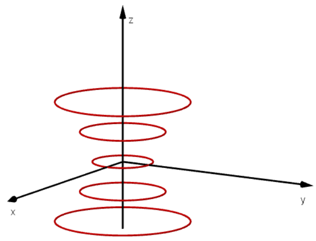
Note que quando ϵ estiver próximo de zero, estas superfícies deverão estar "próximas" do cone.

IV) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Esta superfície é simétrica em z.

Cortes horizontais:

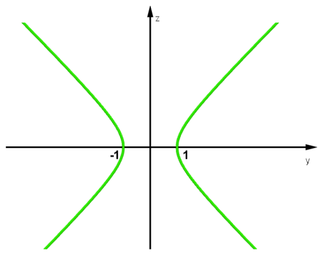
$$\begin{aligned} z = 0 &: \; x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 &: \; x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 &: \; x^2 + y^2 = 5 \\ & \qquad\qquad \textit{etc.} \end{aligned}$$

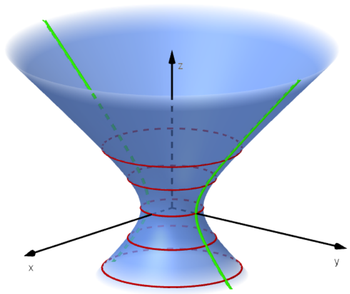


Corte vertical:

$x = 0 :$ $\quad y^2 - z^2 = 1$

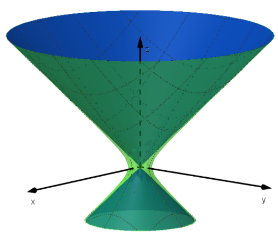
hipérbole no plano yz





Hiperbolóide de uma folha

Fazendo $x^2 + y^2 - z^2 = \epsilon$ com $\epsilon > 0$ pequeno, o hiperbolóide de uma folha (verde) fica próximo do cone $x^2 + y^2 = z^2$ (azul), com o cone na parte de dentro do hiperbolóide de uma folha.



Mais geralmente,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

é um **Hiperbolóide de uma folha**.

V) $x^2+y^2-z^2=-1$

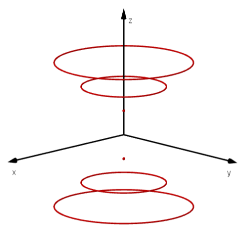
Ou podemos escrever $-x^2-y^2+z^2=1$.

<u>Cortes horizontais:</u>

$z=0: x^2+y^2=-1 \rightarrow$ a superfície não tem nenhum ponto em $z=0$.

Isto, juntamente com o fato de a superfície ser simétrica em relação a z implicam que a superfície é composta por duas peças separadas. Uma na parte de cima, $z>0$ e ou na parte de baixo, $z<0$.

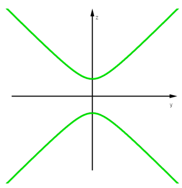
$$\begin{array}{lll} z=1: & x^2+y^2=0 & \rightarrow (0,0) \\ z=2: & x^2+y^2=3 & \\ z=3: & x^2+y^2=8 & \rightarrow \text{ circunferências} \end{array}$$

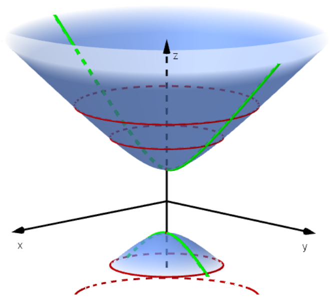


<u>Corte vertical:</u>

$x=0:$ $z^2-y^2=1$

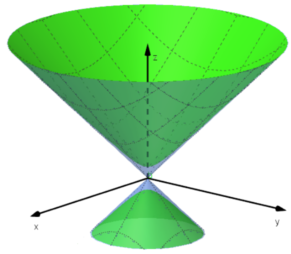
hipérbole no plano yz





Hiperbolóide de duas folhas

Fazendo $x^2 + y^2 - z^2 = -\epsilon$ com $\epsilon > 0$ pequeno, o hiperbolóide de duas folhas (verde) fica próximo do cone $x^2 + y^2 = z^2$ (azul), com o o hiperbolóide de duas folhas na parte de dentro do cone.



Sugestão: Plote (no Geogebra) a superfície $x^2 + y^2 - z^2 = \epsilon$, onde ϵ é um parâmetro, e deslize o cursor de ϵ de -1 a +1 para ver a figura correspondente em movimento.

Mais geralmente,

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

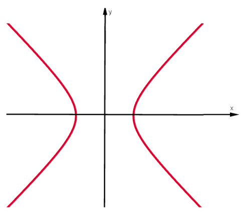
é um **Hiperbolóide de duas folhas**.

VI) $z = y^2 - x^2$

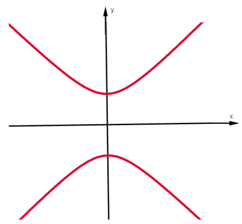
Todas as equações das quádricas vistas têm quadrado em todas as variáveis x, y e z, exceto o parabolóide elíptico e esta.

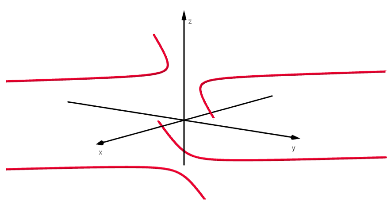
Cortes horizontais:

$z = 1 : \quad y^2 - x^2 = 1$



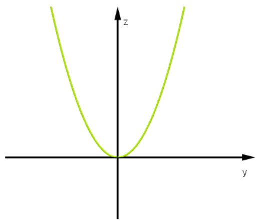
$z = -1 : \quad y^2 - x^2 = -1$

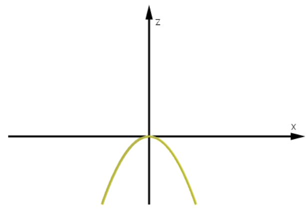


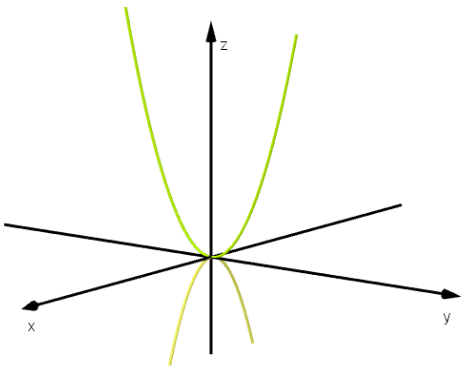


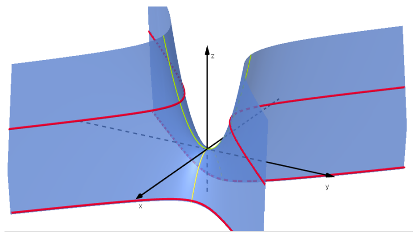
<u>Cortes verticais:</u>

$x = 0: \quad z = y^2$ $\qquad\qquad$ $y = 0: \quad z = -x^2$





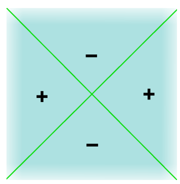




Parabolóide Hiperbólico

"Sela de cavalo"

Imagine uma folha de papel (plano $z = 0$) e as retas $y = \pm x$, que dividem a folha em 4 regiões. Agora tente botar duas regiões opostas para cima e as outras duas para baixo, mantendo as retas fixas. Se isto fosse possível, sem vincar ou rasgar a folha de papel, obteríamos uma superfície como a sela de cavalo.

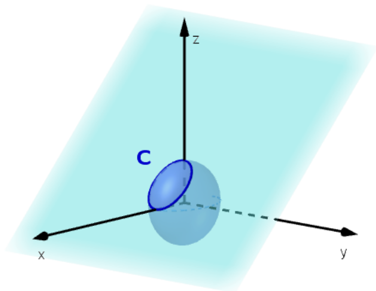


Mais geralmente,

$$\boxed{\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

é um **Parabolóide hiperbólico**.

Exemplo 6. Identifique e parametrize a curva C obtida pela interseção das superfícies $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ e $x + z = 1$.



Como fizemos no exemplo 3, vamos identificar primeiro a projeção da curva C no plano xy (obter a equação envolvendo apenas as variáveis x e y).

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x^2 + 2y^2 + (1-x)^2 = 1$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Trata-se de um círculo de raio $\frac{1}{2}$ com centro em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Então, as coordenadas x e y da curva C podem ser parametrizadas por:

$$r(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \ \underline{\quad ? \quad}\right), \ t \in [0, 2\pi].$$

Para a coordenada z, temos:

$$x + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - x \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t.$$

Finalmente, uma parametrização de C é:

$$r(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t\right), \ t \in [0, 2\pi].$$

Exercício 1) Identifique e esboce a superfície

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0.$$