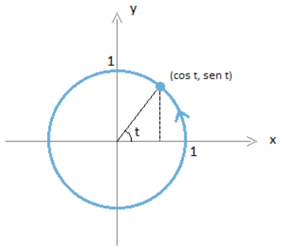
Aula 6

Curvas ou Funções Vetoriais:

Exemplo 1. Círculo como 'coleção de vetores'.

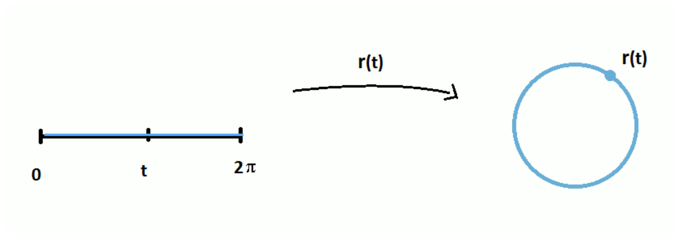
Vetor posição de curva:

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen } t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$



$\mathbf{r}(t)$ pode ser vista como uma função vetorial:

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

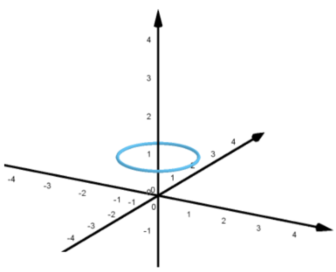


Doravante iremos dizer que $\mathbf{r}(t)$ é uma **parametrização** da curva, e t é o parâmetro usado para descrever a curva.

Exemplo 2. Considere

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen } t, 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Que curva é representada por esta parametrização?



$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Curva no espaço

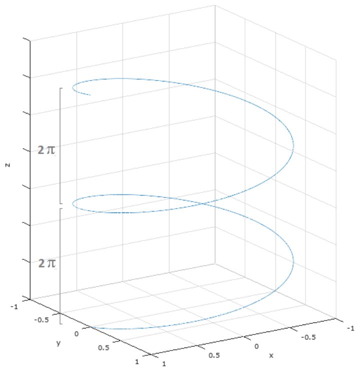
É simplesmente o círculo do exemplo anterior colocado na 'altura 1'.

Exemplo 3.

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen } t, t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Qual é a curva representada por esta parametrização?

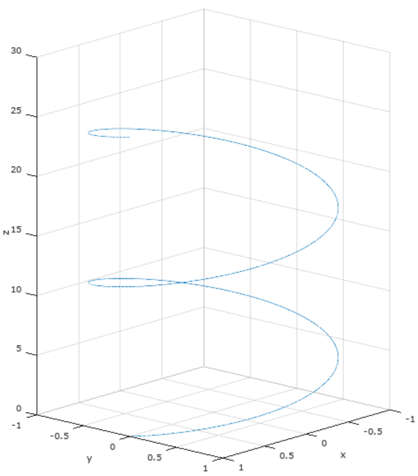
Note que agora, à medida que vamos 'rodando' (t aumenta), vamos 'subindo'. Trata-se de uma hélice. Como o parâmetro t (ângulo) vai de 0 a 4π, a hélice dá 2 voltas.



Hélice

Exemplo 4.

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen } t, 2t), \quad 0 \le t \le 4\pi.$$

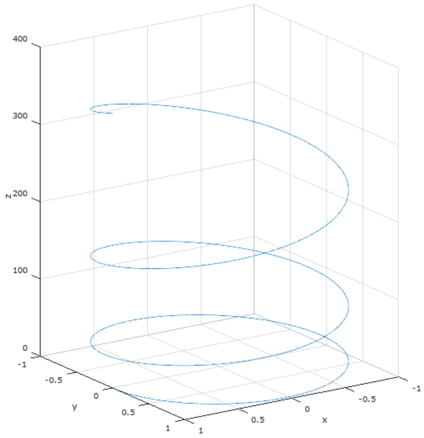


Trata-se da hélice do exemplo anterior 'esticada' verticalmente por um fator $\times 2$.

Exemplo 5.

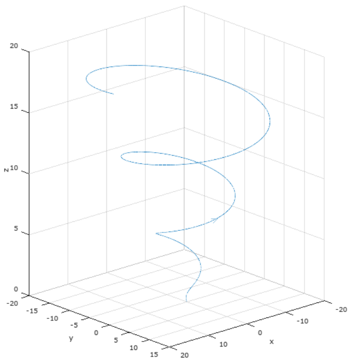
$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen } t, t^2), \quad 0 \le t \le 6\pi.$$

Trata-se de uma hélice, com 3 voltas, que começa 'comprimida' e vai 'esticando' cada vez mais.



Exemplo 6.

$$\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\text{sen } t, t), \quad 0 \leq t \leq 6\pi.$$

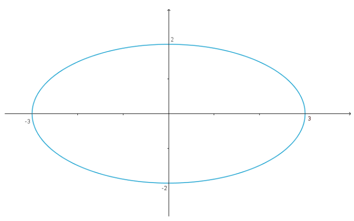


À medida que vamos 'rodando', vamos 'subindo' e 'alargando'

Exemplo 7. $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 2\,\text{sen }t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

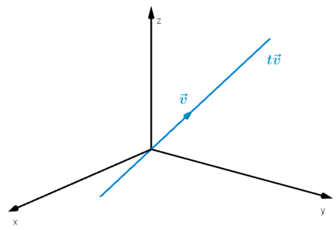
Os pontos desta curva satisfazem

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\,\text{sen }t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$



Elipse

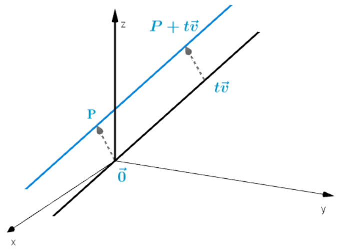
Exemplo 8. Reta com a direção do vetor $\vec{v}$, passando na origem.



$$\vec{v} = (a, b, c) \quad \text{vetor diretor}$$

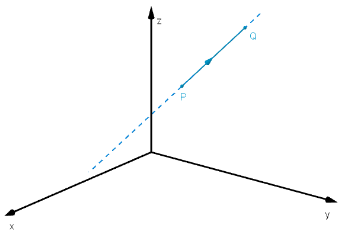
$$\mathbf{r}(t) = t\vec{v} = (ta, tb, tc), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 9. Reta com vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$, passando pelo ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$



$$\mathbf{r}(t) = \vec{P} + t\vec{v} = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc), \quad t \in \mathbb{R}.$$

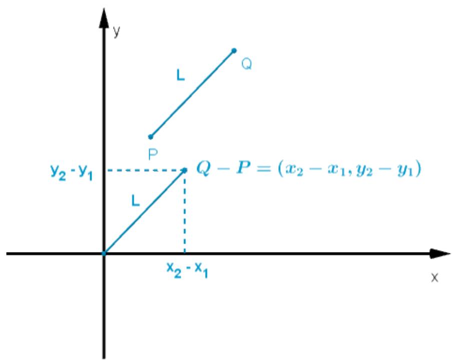
Exemplo 10. Segmento de reta entre os pontos $P = (-2, 0, 1)$ e $Q = (-2, 2, 4)$.



$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \vec{P} + t(\vec{Q} - \vec{P}) \\ &= (-2, 0, 1) + t(0, 2, 3) \\ &= (-2, 2t, 1 + 3t), \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Comprimento de segmento de reta no plano ligando os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$



Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

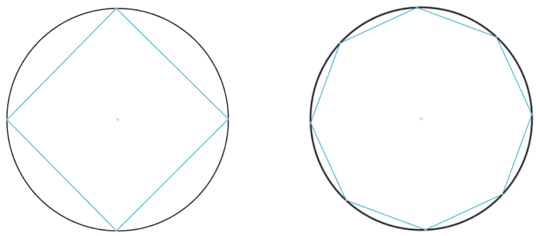
Qual o comprimento de um círculo de raio 1?

Definição: π é razão entre o comprimento de um círculo pelo seu diâmetro.

Então, por definição, o comprimento de um círculo de raio r é igual a $2\pi r$. Mas qual o valor π? Ou, qual o comprimento de um círculo de raio 1?

Método da Exaustão de Arquimedes

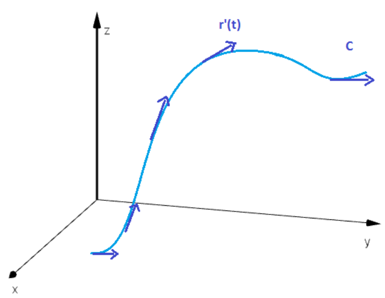
Arquimedes encontrou um valor aproximado para π calculando o comprimento de poligonais inscritas no círculo.



Aumentando cada vez mais o número de segmentos de reta da poligonal, no 'limite' obteriamos o comprimento exato do circulo.

Derivadas ou Vetores Tangentes

Sejam f, g e h funções reais de classe C^1, isto é, funções diferenciáveis com derivadas contínuas.



Considere a função vetorial

$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)),\ a \leq t \leq b.$

A derivada de $\mathbf{r}(t)$ é feita componente a componente porque as operações envolvidas na derivada (diferença de vetores, divisão de vetor por escalar e limite de vetores) são feitas componente a componente.

$\mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)),\ a \leq t \leq b.$

Comprimento de arco

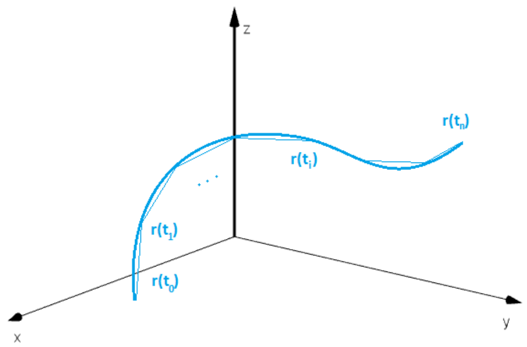
Seja C uma curva parametrizada pela função vetorial de classe C^1

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)),\ a \leq t \leq b.$$

Vamos obter uma fórmula para o comprimento L da curva C, usando cáculo diferencial e integral.

Considere pontos $t_i, 0 \leq i \leq n$ do intervalo $[a, b]$ tais que

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$



Já vimos que o comprimento do segmento de reta ligando os pontos $\mathbf{r}(t_{i-1})$ e $\mathbf{r}(t_i)$ é

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| &= \|(f(t_i) - f(t_{i-1}), g(t_i) - g(t_{i-1}), h(t_i) - (t_{i-1}))\| \\ &= \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2 + (h(t_i) - h(t_{i-1}))^2} \end{aligned}$$

Então

$L \approx$ soma dos comprimentos dos segmentos de reta ligando os pontos $\mathbf{r}(t_{i-1})$ e $\mathbf{r}(t_i)$, $1 \leq i \leq n$.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2 + (h(t_i) - h(t_{i-1}))^2}$$

Observe que estamos somando uma grande quantidade de valores 'pequenos', porém o resultado não é necessariamente pequeno. Pelo teorema do valor intermédio de Lagrange, existem $t_i^*, t_i^{**}, t_i^{***} \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(t_i^*)\Delta t_i)^2 + (g'(t_i^{**})\Delta t_i)^2 + (h'(t_i^{***})\Delta t_i)^2},$$

onde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Assumindo que $\max_i \Delta t_i \to 0$ quando $n \to \infty$, ambos os pontos $t_i^*, t_i^{**}, t_i^{***}$ estão arbitrariamente próximos de t_i. Como f, g, h são de classe C^1,

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(t_i))^2 + (g'(t_i))^2 + (h'(t_i))^2}\, \Delta t_i$$

Lembre-se que, sendo $F(t)$, $t \in [a, b]$ uma função real contínua,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(t_i)\Delta t_i = \int_a^b F(t)\ dt.$$

Logo, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{(f'(t_i))^2 + (g'(t_i))^2 + (h'(t_i))^2}\ dt}$$

Outra notação: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leq t \leq b.$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$

ou ainda,

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\ dt.$$

Esta última notação é bem sugestiva pois, no caso em que $\mathbf{r}(t)$ representa o vetor posição de uma partícula no instante t, o vetor velocidade é dado por $\mathbf{r}'(t)$ e a velocidade escalar é $\|\mathbf{r}'(t)\|$. Assim, o comprimento da curva descrita pela partícula pode ser escrito como a integral no tempo da velocidade escalar.

Exemplo 11. Calcule o comprimento da hélice parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\ t, 4t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Temos que

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\,\text{sen}\ t, 2\cos t, 4), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 16}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{20}\ dt \\ &= 2\pi\sqrt{20}. \end{aligned}$$

Exemplo 12. Calcule o comprimento da curva parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (12t, 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Temos que

$$\mathbf{r}'(t) = (12, 12t^{\frac{1}{2}}, 6t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{12^2 + 12^2 t + 6^2 t^2}\ dt \\ &= 6\int_0^1 \sqrt{4 + 4t + t^2}\ dt \\ &= 6\int_0^1 \sqrt{(t+2)^2}\ dt \\ &= 6\int_0^1 t + 2\ dt \\ &= 6[t^2/2 + 2t]_0^1 = 15. \end{aligned}$$

Em geral, calcular o comprimento de uma curva é uma tarefa difícil pois envolve a integral de uma raiz quadrada.

Considere a elipse parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

onde $0 < b < a$.

Temos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\,\mathrm{sen} t)^2 + (b\cos t)^2}\;dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\;dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\cos^2 t}\;dt. \end{aligned}$$

Esta é uma integral elítica, muito complicada de se calcular. Para valores de $a \approx b$, existem aproximações muito boas encontradas pelo genial matemático indiano S. Ramanujan (faça uma pesquisa na internet).

Exercício 1) Calcule o comprimento da curva de equação paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(2t)+1, \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$