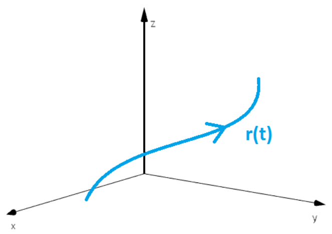
Movimento no espaço:



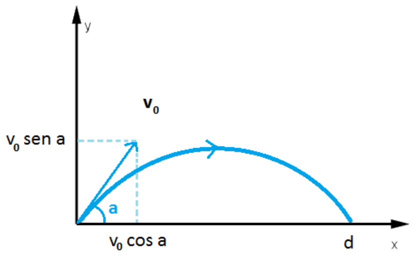
Posição da partícula no instante t

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

A curva na forma parametrizada aparece naturalmente quando resolvemos a Equação de Newton vetorial.

$$m\,\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t).$$

Exemplo 1 (Projétil)**.** Considere a função vetorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ que representa a posição, no instante t, de um projétil. Considere $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}_0 = (v_0 \cos a, v_0 \operatorname{sen} a)$.



A aceleração do projétil é dada por $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t))$. Temos:

$$m\,\mathbf{a}(t) = (0, -mg)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx'' = 0 \Leftrightarrow x(t) = (v_0 \cos a)t \\ my'' = -mg \Leftrightarrow y(t) = \dfrac{-gt^2}{2} + (v_0 \operatorname{sen} a)t. \end{cases}$$

Logo, $\mathbf{r}(t) = ((v_0 \cos a)t, \dfrac{-gt^2}{2} + (v_0 \operatorname{sen} a)t)$.

Exemplo 2. Equação Diferencial Vetorial

$$\begin{cases} x' = x + y + e^t & x(0) = 1 \\ y' = y & y(0) = 2 \end{cases}$$

Para este caso, podemos resolver a segunda equação e substituir o resultado na primeira.

$$y' = y, \;\; y(0) = 2 \Leftrightarrow y = 2e^t.$$

Substituindo na primeira equação:

$$x' = x + 3e^t \Leftrightarrow x' - x = 3e^t$$

Fator integrante:

$$I(t) = e^{\int -1dt} = e^{-t}.$$

Reescrevemos a equação diferencial como:

$$\begin{aligned} & x'e^{-t} - xe^{-t} = 3e^t e^{-t} \\ \Leftrightarrow \quad & (xe^{-t})' = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & xe^{-t} = 3t + c \\ \Leftrightarrow \quad & x = (3t+c)e^t. \end{aligned}$$

Como $x(0) = 1$, obtemos $c = 1$.

Exemplo 3.

$$\begin{cases} x' = 2x - y & x(0) = 1 \\ y' = x & y(0) = 2. \end{cases}$$

Note que neste caso, não conseguimos resolver nenhuma das equações de forma independente. Iremos então, derivar a primeira equação, fazendo y' aparecer nesta, e assim faremos a substituição $y' = x$.

$$x'' = 2x' - y' \Leftrightarrow x'' = 2x' - x \Leftrightarrow x'' - 2x' + x = 0$$

A equação característica é dada por:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = 1.$$

Assim, a solução da equação diferencial $x'' - 2x' + x = 0$ é:

$$x = c_1 e^t + c_2 t e^t, \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $x(0) = 1$ e $x'(0) = 2x(0) - y(0) = 0$, facilmente calculamos $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$.

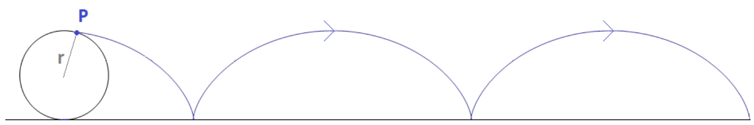
Para determinar y, poderíamos integrar a equação $y' = x$. Ou melhor, podemos utilizar a primeira equação:

$$\begin{aligned} x' = 2x - y \Leftrightarrow y &= 2x - x' \\ &= 2(e^t - te^t) - (e^t - e^t - te^t) \\ &= 2e^t - te^t. \end{aligned}$$

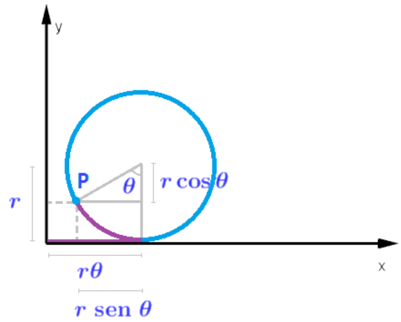
Mais exemplos de parametrizações de curvas

Ciclóide

Fixe um ponto P na borda de uma moeda. A ciclóide é a curva descrita pelo ponto P quando rodamos a moeda sobre uma reta.



Queremos determinar as coordenadas do ponto P depois de rodar a moeda de raio r em um ângulo θ.



Considere, sem perda de generalidade, que inicialmente P está na origem. Em seguida a moeda é rotacionada em um ângulo θ. A distância do ponto da circunferência que toca o eixo x à origem (o que a moeda rodou pelo chão) é igual ao comprimento do arco de ângulo θ, dado por $r\theta$.

Considerando as relações do triângulo mostradas na Figura , temos que as coordenadas de P são dadas por:

$$x = r\theta - r\,\text{sen}\,\theta$$
$$y = r - r\cos\theta.$$

Vamos calcular o comprimento de arco da ciclóide para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

Lembrando que $\cos(2\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha \Leftrightarrow 4\,\text{sen}^2\alpha = 2 - 2\cos(2\alpha)$, podemos escrever (com $\alpha = \theta/2$):

$$\begin{aligned} L &= 2r\int_0^{2\pi} \sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta \\ &= 2r\int_0^{2\pi} \left|\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\, d\theta \end{aligned}$$

Como no intervalo de 0 a 2π, sen $\left(\frac{\theta}{2}\right)$ é não-negativo,

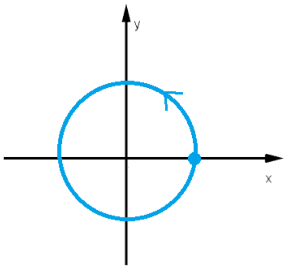
$$\begin{aligned} L &= 2r\int_0^{2\pi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta \\ &= 4r\left[-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 8r. \end{aligned}$$

Vamos agora parametrizar a ciclóide de uma maneira alternativa, dividindo o movimento em duas partes:

(1) rotação da moeda, em θ graus, em torno do centro;

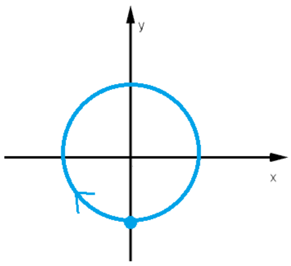
(2) translação horizontal.

Primeiramente parametrizamos o círculo.



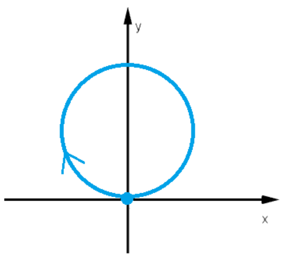
Círculo centrado na origem percorrido no sentido anti-horário, com ponto inicial no eixo x positivo.

$$\mathbf{r}(\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$



Círculo centrado na origem percorrido no sentido horário com ponto inicial no eixo y negativo.

$$\mathbf{r}(\theta) = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, -r\cos\theta),\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$



Círculo centrado em $(0, r)$ percorrido no sentido horário com ponto inicial na origem.

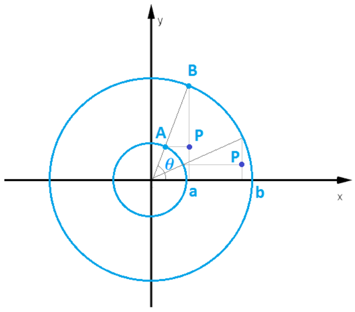
$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\theta) &= (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, -r\cos\theta) + (0, r)\\ &= (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r - r\cos\theta),\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.\end{aligned}$$

Em seguida, a translação horizontal.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\theta) &= (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r - r\cos\theta) + (r\theta, 0)\\ &= (r\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta, r - r\cos\theta),\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.\end{aligned}$$

Exemplo 4. Considere os círculos, C_a e C_b, centrados na origem de raios a e b, com $a < b$. Seja r o segmento de reta que parte da origem e forma um ângulo θ com o eixo x. Os pontos A e B são os pontos de interseção entre r e os círculos C_a e C_b, respectivamente. Por fim, P é o ponto de interseção entre a reta vertical que passa por B e a reta horizontal que passa por A.

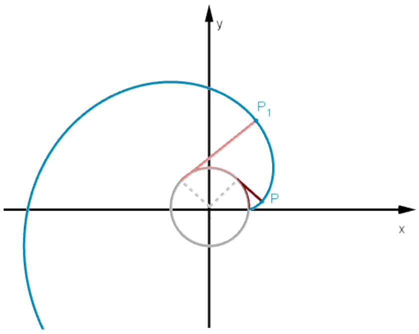
Parametrize a curva descrita por P, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



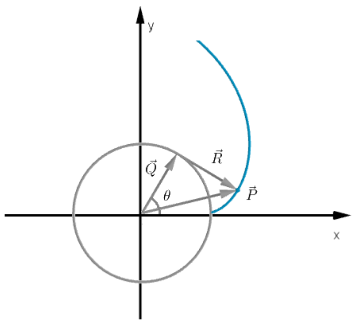
Note que, a abscissa do ponto P é a mesma do ponto B, dada por $b\cos\theta$. A ordenada do ponto P é a mesma do ponto A, dada por $a\,\text{sen}\,\theta$. Assim, a curva é uma elipse e pode ser parametrizada por:

$$\mathbf{r}(\theta) = (b\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Exemplo 5. Considere um barbante enrolado ao redor de um disco. O barbante começa a ser desenrolado, de modo que este é mantido sempre esticado. Parametrize a curva definida pela trajetória que o ponto P na ponta do barbante descreve.



Considere os vetores auxiliares, $\vec{Q}$ e $\vec{R}$, mostrados na figura abaixo. Temos que $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$ e $\vec{Q} = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$.



Note que, o comprimento de $\vec{R}$ é dado por $r\theta$ e $\vec{R}$ é tangente ao círculo, ou, perpendicular a $\vec{Q}$. Como encontramos, de maneira simples, um vetor perpendicular a outro no plano?

Rotacionando-o 90°.

Fazer uma rotação de 90°, no sentido horário, corresponde a 'enviar o eixo positivo do y no o eixo positivo do x, e o eixo positivo do x no o eixo negativo do y'. Mais precisamente, é o mesmo que trocar as coordenadas e fazer uma reflexão na horizontal.

$$(a,b) \xrightarrow{\text{troca}} (b,a) \xrightarrow{\text{reflexão}} (b,-a)$$

A direção e sentido de $\vec{R}$ é então dada por $(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$. Assim,

$$\vec{R} = r\theta(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta) = (r\theta\operatorname{sen}\theta, -r\theta\cos\theta)$$

. Por fim,

$$\begin{aligned} \vec{P} &= (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) + (r\theta\operatorname{sen}\theta, -r\theta\cos\theta) \\ &= (r\cos\theta + r\theta\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\theta - r\theta\cos\theta). \end{aligned}$$

Vamos calcular o comprimento da curva descrita por $\vec{P}$, quando $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\ d\theta \\ &= r\int_0^\pi \sqrt{(-\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta)^2 + (\cos\theta - \cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta)^2}\ d\theta \\ &= r\int_0^\pi \theta\ d\theta = r\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$