



ROBERTO PETTRES

# UM CURSO INTRODUTÓRIO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

VOLUME 2

Universidade Federal do Paraná

CURITIBA

2025

ISBN: 978-65-5458-361-9

**CDL**



9 786554 583619

ISBN: 978-65-5458-360-2

**CDL**



9 786554 583602

**ROBERTO PETTRES<sup>1</sup>**

**UM CURSO INTRODUTÓRIO AO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO  
VOLUME 2**

**CURITIBA**

**2025**

---

<sup>1</sup> Roberto Pettres é Professor Associado da Universidade Federal do Paraná e atua no Departamento de Matemática. Sua formação é de Licenciado em Matemática pela Universidade do Contestado, Mestre e Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná e Pós-doutor em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina.

## **DIREITOS DE REPRODUÇÃO**

Essa obra foi desenvolvida com o apoio da Universidade Federal do Paraná para disseminação de conhecimentos em Ciências Exatas. A reprodução e distribuição de seu conteúdo sem fins lucrativos estão permitidos.

## **UM CURSO INTRODUTÓRIO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO – VOLUME 2**

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

P511    Pettres, Roberto  
        Um curso introdutório ao método dos elementos de contorno. /  
        Roberto Pettres. – Curitiba, 2025.  
        64p. : il.; tabs.: color. v.2.

        ISBN 978-65-5458-361-9 (E-book)  
        ISBN 978-65-5458-360-2 (Broch.)

        1. Métodos de elemento de contorno. 2. Laplace, equação de.  
        I. Universidade Federal do Paraná. II. Título.

CDD. 515.35

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

***Dedico este trabalho à minha família.***

**A questão sempre foi a escolha.**

$$\underline{L} + \underline{E} = \underline{R}.$$

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Ilustração genérica de um domínio e seu contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 17 |
| Figura 2 – Ilustração da discretização do domínio do problema em elementos de contorno.<br>.....                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 19 |
| Figura 3 – Ilustração das condições de contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 22 |
| Figura 4 – Ilustração da solução do MEC para $u$ (cor vermelha) e $q$ (cor azul) com $k_1=1=k_2$<br>com dez elementos lineares de contorno.....                                                                                                                                                                                                                                              | 23 |
| Figura 5 – Ilustração da solução do MEC para $u$ e $q$ com $k_1=2$ e $k_2=1$ utilizando dez<br>elementos lineares de contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                           | 24 |
| Figura 6 – Ilustração da solução do MEC para $u$ e $q$ com $k_1=1$ e $k_2=2$ utilizando dez<br>elementos lineares de contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                           | 26 |
| Figura 7 – Seção da barragem de terra.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 30 |
| Figura 8 – Ilustração das linhas genéricas de percolação de água.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 31 |
| Figura 9 – Discretização do contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 32 |
| Figura 10 – Condições de contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 33 |
| Figura 11 – Campo de velocidades (vetores unitários) com $k_1=10^{-7}$ m/s e $k_2=10^{-5}$ m/s.....                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 33 |
| Figura 12 – Campo escalar de velocidade com $k_1=10^{-7}$ m/s e $k_2=10^{-5}$ m/s.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 34 |
| Figura 13 – Potencial de velocidades distribuídos sobre o contorno da barragem.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 35 |
| Figura 14 – Condições de contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 35 |
| Figura 15 – Campo de velocidades (vetores unitários).....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 36 |
| Figura 16 – Distribuição do potencial de velocidade no contorno da barragem.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 36 |
| Figura 17 – Campos de velocidade dentro do filtro para diferentes condições de contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 37 |
| Figura 18 – Outra visualização dos campos de velocidade dentro do filtro para diferentes<br>condições de contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                                       | 38 |
| Figura 19 – Ilustração da sobreposição de blocos bidimensionais de concreto com o uso de<br>sub-regiões.....                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 39 |
| Figura 20 – Temperatura em °C para um intervalo de 120 h de análise da barragem<br>construída em camadas.....                                                                                                                                                                                                                                                                                | 40 |
| Figura 21 – Principais categorias de fundação: fundação profunda à esquerda e superficial<br>à direita.....                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 41 |
| Figura 22 – Características de uma estaca escavada e exemplos de possíveis anomalias. A)<br>Perfil longitudinal de uma estaca integral concretada perfeitamente em todo seu<br>comprimento. B) Corte transversal com identificação do diâmetro da estaca, estrutura<br>metálica da estaca e cobrimento de concreto. C) Exemplos típicos de anomalias observadas<br>em estacas escavadas..... | 44 |
| Figura 23 – Distribuição teórica de temperatura comparada com medições de campo ao<br>longo de uma seção transversal de uma estaca de 13,3 m de diâmetro.....                                                                                                                                                                                                                                | 45 |
| Figura 24 – Reconstrução digital 3D de uma estaca de concreto escavada usando o<br>algoritmo.....                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 46 |
| Figura 25 – Ilustração do domínio da equação (34) e seu contorno.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 49 |
| Figura 26 – Ilustração dos vetores normais do domínio da equação (37).....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 50 |

|                                                                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figura 27 – Ilustração da discretização de uma face do cubo em triângulos e de contorno.</b>                                                             | 51 |
| <b>Figura 28 – Transformação de coordenadas de <math>x</math> e <math>y</math> em <math>U</math> e <math>V</math>.</b>                                      | 53 |
| <b>Figura 29 – Ilustração da localização do ponto campo <math>X</math>.</b>                                                                                 | 54 |
| <b>Figura 30 – Ilustração da localização dos pontos de integração para o caso singular (<math>X = \xi</math>) e da subdivisão do elemento transformado.</b> | 55 |
| <b>Figura 31 – Ilustração genérica da discretização das faces do cubo e condições de contorno.</b>                                                          | 56 |
| <b>Figura 32 – Solução <math>u(x,y,z)</math> para as faces do cubo com o MEC-3D.</b>                                                                        | 57 |
| <b>Figura 33 – Solução <math>q(x,y,z)</math> para as faces do cubo com o MEC-3D.</b>                                                                        | 57 |



## **LISTAS DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CCR - CONCRETO EXECUTADA EM CAMADAS COMPACTADAS A ROLO

CFD - DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

MEC - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

MEF - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

MDF - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

MEC - 2D - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA DOMÍNIOS COM DUAS DIMENSÕES

MEC - 2D - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA DOMÍNIOS COM TRÊS DIMENSÕES

UFPR - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                    |                                                                                                        |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mu$              | viscosidade do fluido                                                                                  |
| $V$                | campo escalar de velocidades (m/s),                                                                    |
| $p$                | pressão                                                                                                |
| $\mathbf{g}$       | e forças externas locais                                                                               |
| $c$                | contorno (superíndice)                                                                                 |
| $C$                | calor específico, $\text{W.h.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$                                                  |
| $d$                | domínio (superíndice)                                                                                  |
| $k$                | condutividade térmica, $\text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$                                                |
| $L$                | comprimento da aresta                                                                                  |
| $q$                | fluxo de transferência de calor, $\text{W.m}^{-2}$                                                     |
| $\hat{q}$          | condição de contorno de fluxo prescrito                                                                |
| $q^*$              | derivada da solução fundamental                                                                        |
| $r$                | distância entre $X$ e $\zeta$                                                                          |
| $u$                | variável da Equação de Laplace, sendo o potencial de temperatura, $\text{°C}$<br>nos exemplos testados |
| $\hat{u}$          | condição de contorno de potencial prescrito                                                            |
| $u^*$              | solução fundamental                                                                                    |
| $w$                | fluxo na direção normal para ao contorno                                                               |
| $X$                | ponto campo                                                                                            |
| $J$                | Jacobiano de transformação                                                                             |
| $\Gamma$           | Contorno                                                                                               |
| $\zeta$            | ponto fonte                                                                                            |
| $\rho$             | massa específica ou densidade, $\text{kg.m}^{-3}$                                                      |
| $ci$               | elementos triangulares de contorno                                                                     |
| $\phi$             | função de aproximação linear                                                                           |
| $\psi$             | função constante unitária                                                                              |
| $\Omega$           | Domínio                                                                                                |
| $\mathbf{x}$       | vetor de incógnitas                                                                                    |
| $\mathbf{y}$       | vetor com as condições de contorno                                                                     |
| $\mathbf{H}$       | matriz $A_{\text{esquerda}}$                                                                           |
| $\mathbf{G}$       | matriz $B_{\text{direita}}$ do sistema de equações                                                     |
| $k_1$ e $k_2$      | coeficientes de condutividade                                                                          |
| $k_{\text{earth}}$ | coeficiente de permeabilidade da terra                                                                 |
| $k_{\text{sand}}$  | coeficiente de permeabilidade da areia                                                                 |
| $k_1$ e $k_2$      | coeficientes de condutividade                                                                          |
| $\Re^2$            | espaço real de duas dimensões                                                                          |
| $X_b$              | centróide do elemento de contorno triangular                                                           |
| $X_b$              | centróide do elemento de contorno triangular                                                           |
| $k_1, k_2$ e $k_3$ | vértices do elemento de contorno triangular                                                            |
| $\vec{n}$          | vetor normal                                                                                           |

## SUMÁRIO

|          |                                                                                                                                           |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                                                                                                   | <b>13</b> |
| <b>2</b> | <b>EQUAÇÃO DE LAPLACE EM DUAS DIMENSÕES: MEC – 2D E O USO DE SUB-REGIÕES.....</b>                                                         | <b>16</b> |
| 2.1      | UM PROBLEMA COM A APLICAÇÃO DE ELEMENTOS LINEARES DE CONTORNO .....                                                                       | 18        |
| 2.2      | NOTAÇÃO MATRICIAL E SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA COM SUB-DOMÍNIO DE MESMO MATERIAL .....                                              | 21        |
| 2.3      | SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA COM SUB-DOMÍNIOS DE MATERIAIS DIFERENTES .....                                                           | 24        |
| 2.4      | UMA APLICAÇÃO DO MEC - 2D PARA ANÁLISE DO CAMPO DE VELOCIDADES: O PROBLEMA DE PERCOLAÇÃO DE ÁGUA EM MEIOS POROSOS.....                    | 27        |
| 2.4.1    | Modelo geométrico - Filtro vertical de areia dentro da barragem de terra.....                                                             | 29        |
| 2.4.2    | MEC - 2D com sub-regiões para análise do campo de velocidades .....                                                                       | 31        |
| 2.4.3    | Exemplo - Seção da barragem com filtro de areia vertical, barragem com base não permeável e velocidade constante do fluxo de fluido ..... | 32        |
| 2.4.4    | Exemplo - Seção da barragem com filtro vertical permeável e velocidade constante do fluxo de fluido.....                                  | 35        |
| 2.5      | UMA APLICAÇÃO DO MEC - 2D PARA ELEVAÇÃO DE TEMPERATURA EM BARRAGEM CCR.....                                                               | 39        |
| 2.6      | UMA APLICAÇÃO DO MEC PARA RECONSTRUÇÃO DIGITAL DE UMA ESTACA PROFUNDA DE CONCRETO.....                                                    | 41        |
| <b>3</b> | <b>A EQUAÇÃO DE LAPLACE EM TRÊS DIMENSÕES: MEC – 3D.....</b>                                                                              | <b>48</b> |
| 3.1      | INTEGRAÇÃO DO CONTORNO: ELEMENTOS TRIANGULARES.....                                                                                       | 51        |
| 3.2      | NOTAÇÃO MATRICIAL E SOLUÇÃO DO MEC-3D .....                                                                                               | 55        |
| 3.2.1    | Um problema com a aplicação de elementos triangulares de contorno – MEC-3D.....                                                           | 56        |
| 3.2.2    | Cálculo do potencial e sua derivada direcional nos pontos internos ao domínio .....                                                       | 58        |
| <b>4</b> | <b>CONSIDERAÇÕES DO AUTOR.....</b>                                                                                                        | <b>60</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS.....</b>                                                                                                                   | <b>61</b> |

## PREFÁCIO

*Esse material foi desenvolvido com o intuito de apresentar de forma introdutória o Método dos Elementos de Contorno para resolução numérica de problemas potenciais em duas e três dimensões. Exemplos resolvidos e discutidos apresentam-se como notas de aulas sequenciais e orienta-se ao Leitor que experimenta o Método pela primeira vez, que passe para a próxima seção após reproduzi-los e compreendê-los e que dedique um pouco de tempo para leitura do Volume 1 (PETTRES, 2020) desta obra, disponível no link: [Volume 1](#). Para o Leitor com conhecimento prévio sobre o Método, sugere-se que avance para a seção de interesse. Sugestões, revisões, críticas e correções são sempre boas oportunidades para melhor o material. Para isso, deixo o meu contato pettres@ufpr.br, que também servirá para o compartilhamento de rotinas computacionais.*

O Autor

## 1 INTRODUÇÃO

### A Equação de Laplace

A Equação de Laplace<sup>2</sup> (LAPLACE, 1846) é uma equação diferencial elíptica muito utilizada para representar matematicamente diversos problemas em diferentes campos das ciências, entre eles, problemas como torção de barras de Saint Venant (prismáticas), deflexão de membranas elásticas, flexão de placas apoiadas, transferência de calor, escoamento de fluidos ideais, escoamento em meios porosos, eletromagnetismo e gravitação, por exemplo. Esta equação descreve a distribuição estacionária de um campo escalar em um domínio, como exemplos, a distribuição de temperatura, de pressão, de potencial elétrico ou de outra grandeza física que não varia com o tempo.

Em um sentido geométrico, a Equação de Laplace pode descrever o estado de equilíbrio de um sistema físico. O significado físico da Equação de Laplace pode ser considerado como a propagação das condições de contorno impostas na superfície para o volume de um domínio, mesmo não havendo fontes ou cargas explicitamente identificadas. Por exemplo, em eletrostática, esta equação descreve o campo potencial na ausência de cargas, sugerindo que o potencial é suave e contínuo.

Em problemas matemáticos decorrentes de situações físicas, há duas considerações envolvidas ao encontrar uma solução: (1) a solução e suas derivadas devem satisfazer uma equação diferencial, que descreve como a quantidade se comporta dentro do domínio; e (2) a solução e suas derivadas devem satisfazer outras condições auxiliares, descrevendo a influência de fora do domínio (valores de contorno).

A relação entre física e a solução numérica é importante aqui, porque nem sempre é possível obter uma solução de uma equação diferencial satisfazendo condições escolhidas arbitrariamente, no entanto, se o problema representa uma situação física real, geralmente é possível provar que uma solução existe, mesmo que ela não possa ser explicitamente encontrada.

---

<sup>2</sup> A equação foi descoberta pelo matemático e astrônomo francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827), autor de *Traité de mécanique céleste* (1-5).

A variável presente na Equação de Laplace (equação (2) em duas dimensões ou equação (34) em três dimensões), aqui inicialmente chamada de  $u$ , e, como um exemplo simbólico representando uma altura ou altitude de cada posição em um relevo, tem seu valor maior quando se é medida no alto de uma colina, por outro lado, tem um valor menor em um vale. O operador diferencial de segunda ordem (Nabla) da variável  $u$ , é um conjunto de operações coletivamente chamado de Laplaciano, que mede o equilíbrio entre os valores crescentes e decrescentes de  $u$  (alturas ou altitude) ao longo do relevo. Estando no ponto mais alto de uma colina, não importa em que direção escolha se mover, sempre encontrará um caminho de descida, que matematicamente é representado por um valor de Laplaciano negativo. De forma oposta, estando no ponto mais baixo do vale, só resta o movimento de subida, o que implica em um valor positivo para o Laplaciano. Em algum lugar entre esses dois movimentos, haverá um lugar onde um passo pode levá-lo para cima tanto quanto para baixo, cujo equivalente seria mover-se em um caminho em forma de curva de nível, estando subida e descida perfeitamente equilibrados, revelando um Laplaciano nulo (COLE, 2016).

A equação deve ser integrada para revelar o equilíbrio e a dependência simultânea das variáveis  $x$  e  $u(x)$ , caso unidimensional,  $x$  e  $y$  e  $u(x,y)$ , caso bidimensional ou  $x$ ,  $y$  e  $z$ , cujas taxas de variação de quantidades continuamente variáveis a partir da solução para  $u(x, y, z)$ , sob condições específicas de contorno. A solução de uma equação diferencial produz uma função que pode ser usada para prever o comportamento do sistema original dentro de certas restrições.

Para a análise de meios contínuos não homogêneos, é possível a aplicação de uma técnica baseada em sub-regiões setorialmente homogêneas, cujo domínio é subdividido em sub-domínios homogêneos e o acoplamento de suas interfaces é administrado com a aplicação de condições de compatibilidade, mesmo potencial e fluxo oposto na região de contato.

Atualmente, devido à maior abrangência, as soluções da Equação de Laplace por meio de métodos analíticos têm dado lugar às soluções aproximadas, obtidas através do uso de métodos numéricos, que oferecem a possibilidade de solucionar problemas complexos em tempo reduzido, pois seus cálculos são feitos computacionalmente. Estão entre os métodos numéricos mais utilizados: o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989), o

Método dos Elementos Finitos (MEF) (REDDY, 2005) e o Método das Diferenças Finitas (MDF) (LEVEQUE, 2007).

Neste trabalho, a solução para  $u(x, y)$  e  $u(x, y, z)$  foram obtida numericamente aplicado-se o Método dos Elementos de Contorno à Equação de Laplace, MEC-2D e MEC-3D, substituindo a solução da equação diferencial parcial por um sistema de equações simultâneas, cada uma das quais de primeira ordem, de modo que, técnicas de álgebra linear possam ser aplicadas. A formulação desenvolvida requer uma infraestrutura matemática que pode ser implementada computacionalmente sem grande dificuldade, cujas alterações nas condições de contorno podem ser rapidamente computadas reposicionando-se linhas e colunas nas matrizes do sistema de equações.

Os resultados do MEC-2D com sub-regiões e MEC-3D são comparados aos resultados analíticos de problemas simplificados, cujos detalhes da formulação desenvolvida e dos problemas testados são apresentados a seguir, além de serem apresentados e discutidos problemas de engenharia resolvidos com o uso do MEC.

## 2 EQUAÇÃO DE LAPLACE EM DUAS DIMENSÕES: MEC – 2D E O USO DE SUB-REGIÕES

O Método dos Elementos de Contorno aplicado a um meio homogêneo transforma a equação diferencial que rege o fenômeno numa equação integral de contorno. A discretização geométrica e as aproximações funcionais são feitas apenas no contorno da região, ao contrário do que ocorre nos métodos de domínio onde todo o domínio deve ser discretizado (mesmo quando o meio é homogêneo). No caso de regiões compostas de sub-regiões homogêneas, aplica-se o método dos elementos de contorno a cada sub-região homogênea impondo condições de compatibilidade entre as diversas sub-regiões nas interfaces (mesmo potencial e fluxos normais opostos) (JESUS e PEREIRA, 2004).

Este trabalho inicia-se com a apresentação e resolução de um problema baseado na Equação de Laplace bidimensional, cujo domínio pode ser composto por dois materiais distintos, e cada sub-domínio passa a figurar com um meio setorialmente homogêneos, fazendo uso da técnica das sub-regiões com elementos lineares de contorno.

O problema é organizado reposicionando linhas e colunas das matrizes **H** e **G** diretamente nas matrizes *A\_esquerda* ou *B\_direita* do sistema de equações, nesse última, acumulados no vetor de termos independentes.

Seja um problema descrito pela equação:

$$A_{\_esq} \mathbf{x} = B_{\_dir} \mathbf{y} \quad (1)$$

onde **x** é o vetor de incógnitas e **y** o é o vetor com as condições de contorno.

Assim, considere a Equação de Laplace, que em duas dimensões é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad em \quad \Omega \quad (2)$$



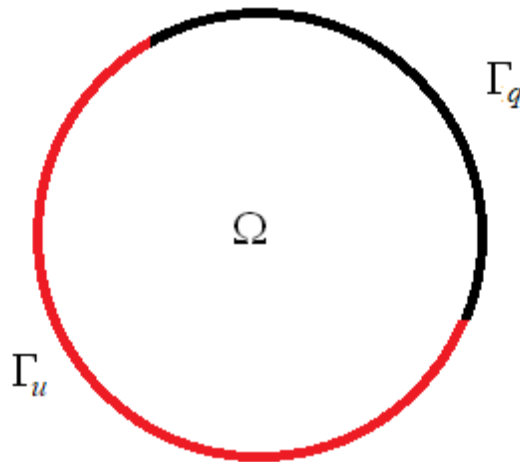
com as condições de contorno essenciais (3) e naturais (4), respectivamente:

$$u = \hat{u} \quad em \quad \Gamma_u \quad (3)$$

$$q = \hat{q} = \frac{\partial u}{\partial n} \quad em \quad \Gamma_q \quad (4)$$

onde  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ , como ilustra a Figura 1.

**Figura 1 – Ilustração genérica de um domínio e seu contorno.**



**Fonte: O Autor (2025).**

Para a Equação de Laplace, a equação integral básica do Método dos Elementos de Contorno é:

$$C(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X) d\Gamma \quad (5)$$

onde a expressão de  $u^*(\xi, X)$  é:

$$u^*(\xi, X) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (6)$$

onde  $r = |X - \xi|$  é a distância entre  $X$  e  $\xi$  (GREENBERG, 1971) e a sua derivada em relação à direção normal ao contorno é denotada por  $q^*$  e calculada como:

$$q^*(\xi, X) = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{dr}{dn} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{dr}{dn} \quad (7)$$

O termo  $C(\xi)$  é designado por coeficiente de forma, dado por:

$$C(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \notin \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \xi \text{ é ponto de contorno suave } (\theta = \pi) \\ 1, & \text{se } \xi \in \Omega \end{cases} \quad (8)$$

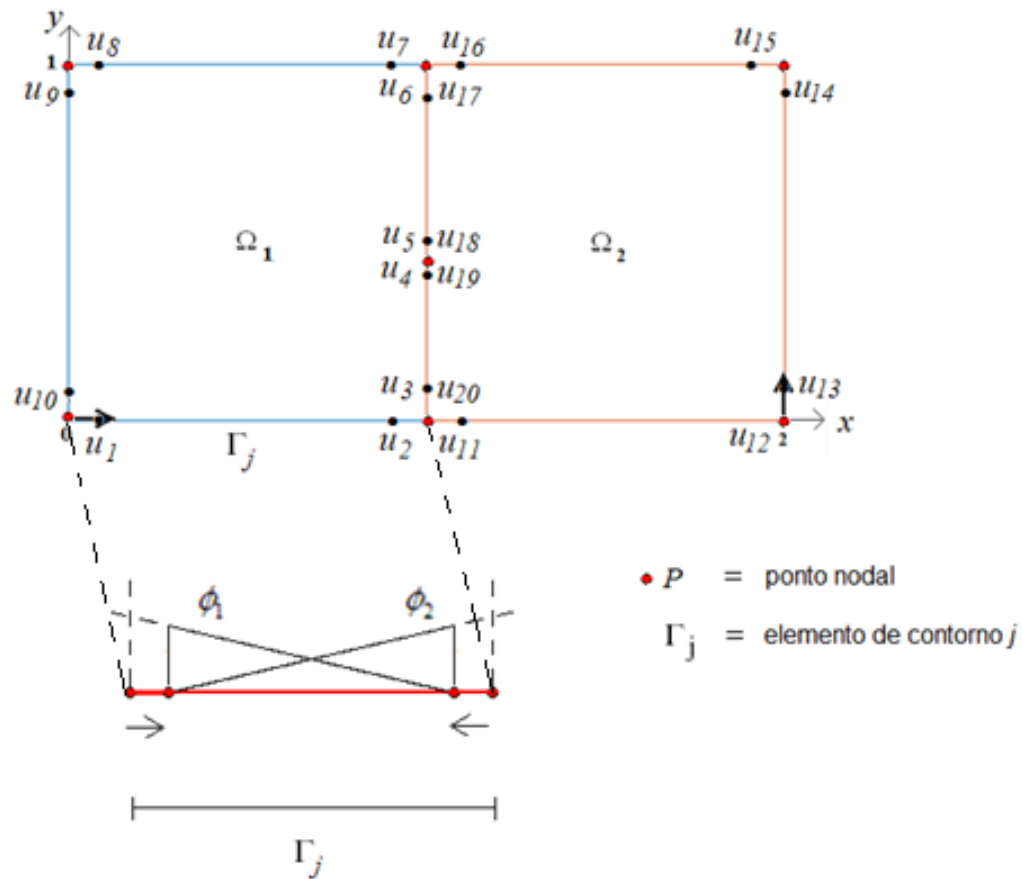
## 2.1 UM PROBLEMA COM A APLICAÇÃO DE ELEMENTOS LINEARES DE CONTORNO

- a) Para a Equação de Laplace,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , com  $0 \leq x_1 \leq L$  e  $0 \leq y_1 \leq L$ , onde  $(x_1, y_1) \in \Omega_1$ , e  $L \leq x_2 \leq 2L$  e  $0 \leq y_2 \leq L$ , onde  $(x_2, y_2) \in \Omega_2$ , com  $L=1$ , sob as condições de contorno  $q(x,0) = 0$ ,  $u(2,y) = 2$ ,  $q(x,1) = 0$ ,  $u(0,y) = 1$  e com os coeficientes de condutividade  $k_1 = 2$  e  $k_2 = 1$ , apresente soluções para as incógnitas  $u(x,0)$ ,  $q(2,y)$ ,  $u(x,1)$  e  $q(0,y)$ .

Solução:

Discretizando o domínio em elementos lineares descontínuos e identificando com  $u_i$  o respectivos nós, tem-se a Figura ilustrando o problema:

Figura 2 – Ilustração da discretização do domínio do problema em elementos de contorno.



Fonte: O Autor (2025).

Aproximando-se a geometria de cada elemento  $\Gamma_j$  em função de suas coordenadas nodais, de acordo com a Figura 2, para um ponto  $P$  qualquer, temos:

$$x_1(P) = \phi_1(P)x_1^{j1} + \phi_2(P)x_1^{j2} \quad (9)$$

$$x_2(P) = \phi_1(P)x_2^{j1} + \phi_2(P)x_2^{j2} \quad (10)$$

onde  $j$  indica o elemento  $\Gamma_j$ ,  $\phi$  é a função de aproximação linear (equações 11 e 12) e  $x_1$  e  $x_2$  são os nós extremos do elemento (TAGUTI, 2010).

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (11)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (12)$$

Dessa forma, as integrais de contorno são calculadas da seguinte maneira:

$$\int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r} \frac{dr}{dn} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Discretizando a equação (5) de acordo com a Figura 2, temos:

$$C(\xi)_i u(\xi)_i = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_{i,j}} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma_{i,j} \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_{i,j}} \frac{1}{2\pi r} \frac{dr}{dn} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma_{i,j} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

## 2.2 NOTAÇÃO MATRICIAL E SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA COM SUB-DOMÍNIO DE MESMO MATERIAL

A matriz  $\mathbf{G}$  é calculada a partir das integrais  $\int_{\Gamma_{i,j}} u^* d\Gamma_{i,j}$ , a matriz  $\mathbf{H}$  é calculada a partir das integrais  $\int_{\Gamma_{i,j}} q^* d\Gamma_{i,j}$  e o esquema de montagem das matrizes para o caso de sub-regiões é descrito a seguir a partir do sistema global de matrizes de contorno:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_{1,2}^c \\ \mathbf{u}_2^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} & \mathbf{G}_{1,2}^{cc} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} & \mathbf{G}_{2,2}^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_{1,2}^c \\ \mathbf{q}_2^c \end{bmatrix} \quad (16)$$

Pelas condições de continuidade e equilíbrio (compatibilidade), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^c &= \mathbf{u}_2^c \\ \mathbf{q}_1^c &= -\mathbf{q}_2^c \end{aligned} \quad (17)$$

A partir das equações de compatibilidade, monta-se um sistema de equações somando-se as colunas de coeficientes relacionados às variáveis equivalentes no vetor de incógnitas.

Nesse exemplo, a partir da Figura 2, tem-se que

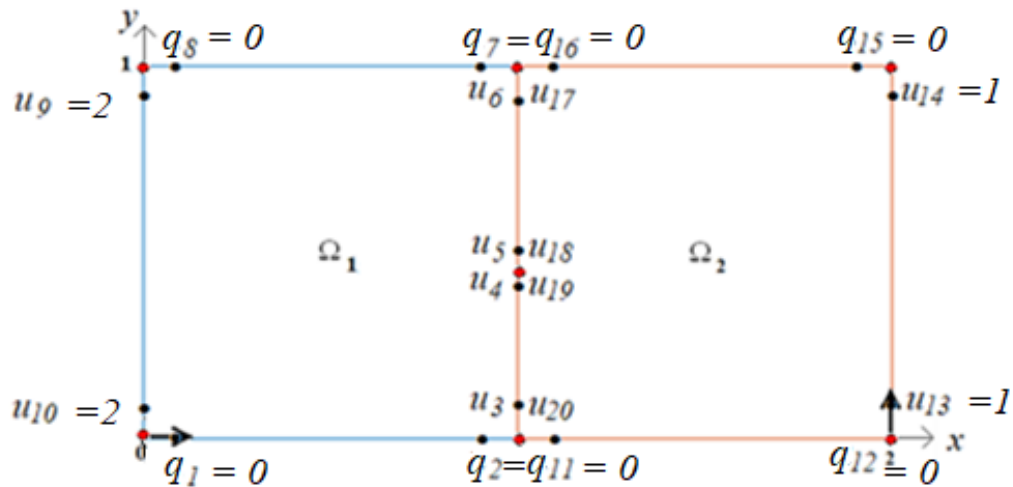
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_4^c &= \mathbf{u}_{19}^c \\ \mathbf{u}_5^c &= \mathbf{u}_{18}^c \\ \mathbf{q}_4^c &= -\mathbf{q}_{19}^c \\ \mathbf{q}_5^c &= -\mathbf{q}_{18}^c \end{aligned} \quad (18)$$

o que implica na soma das colunas 19 à 4 e 18 à 5 da matriz com coeficiente de  $\mathbf{H}$  e na diferença entre 4 e 19 e 5 e 18, respectivamente, da matriz com coeficientes de  $\mathbf{G}$ . As colunas e linhas 18 e 19 são excluídas do sistema global de matrizes. Chamando de  $\mathbf{u}_{1,2}^d$  as incógnitas  $\mathbf{u}_{1,2}^c$ , o novo sistema ficará com a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_{1,2}^d \\ \mathbf{u}_2^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} & \mathbf{G}_{1,2}^{cc} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} & \mathbf{G}_{2,2}^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_2^c \end{bmatrix} \quad (19)$$

O sistema anterior pode ser remanejado de acordo com as condições de contorno de determinado problema. Nesse exemplo, temos condições de contorno mistas, ou seja, arestas com  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{q}$  prescritas, como ilustra a Figura 3:

**Figura 3 – Ilustração das condições de contorno.**



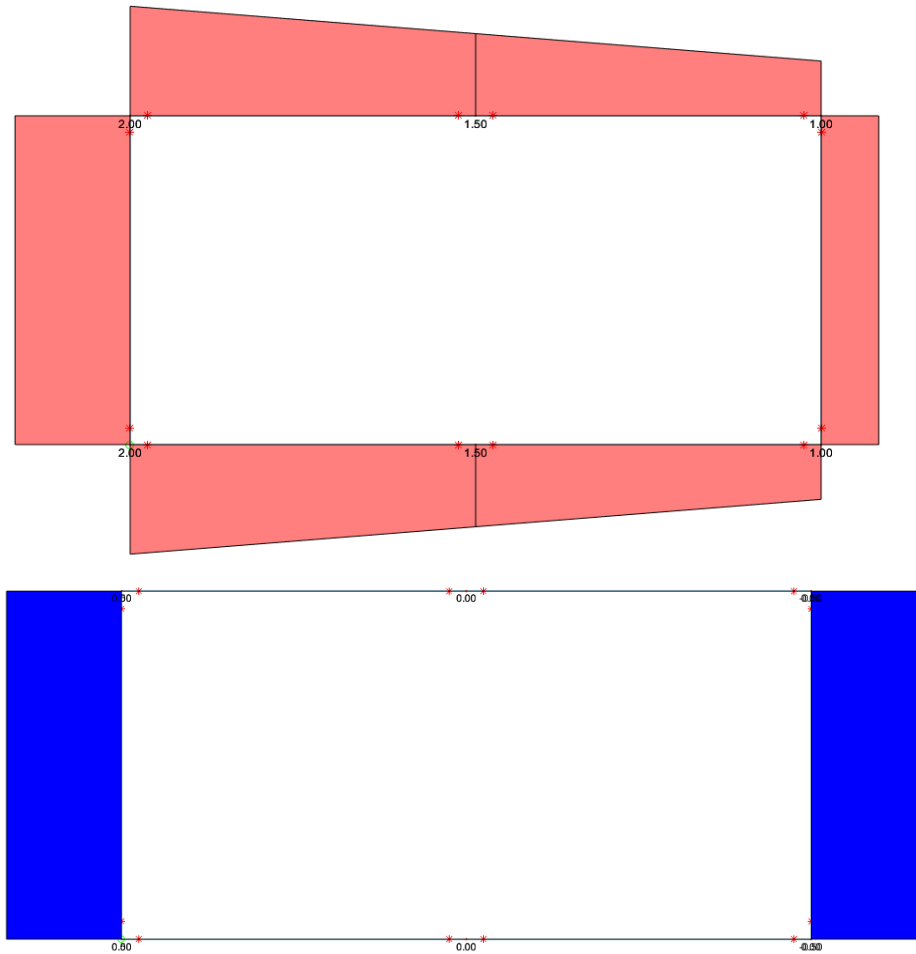
Fonte: O Autor (2025).

Assim, aplicando as condições de contorno e assumindo  $k_1 = 1 = k_2$ , tem-se a solução para cada uma das incógnitas de contorno e também para os potenciais na interface ou domínio:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}_{\text{contorno}} = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 1.5000 \\ 1.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_{15} \\ u_{16} \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}_{\text{contorno}} = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 1.5000 \\ 1.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_3 = u_{20} \\ u_4 = u_{19} \\ u_5 = u_{18} \\ u_6 = u_{17} \end{bmatrix}_{\text{domínio}} = \begin{bmatrix} 1.5000 \\ 1.5000 \\ 1.5000 \\ 1.5000 \end{bmatrix}$$

A solução analítica para o problema é  $u(x, y) = 2 - \frac{x}{2}$  (fica para o leitor calcular os valores de  $q(x, y)$ ). O resultado do MEC é ilustrado pela Figura 4:

**Figura 4 – Ilustração da solução do MEC para  $u$  (cor vermelha) e  $q$  (cor azul) com  $k_1=1=k_2$  com dez elementos lineares de contorno.**



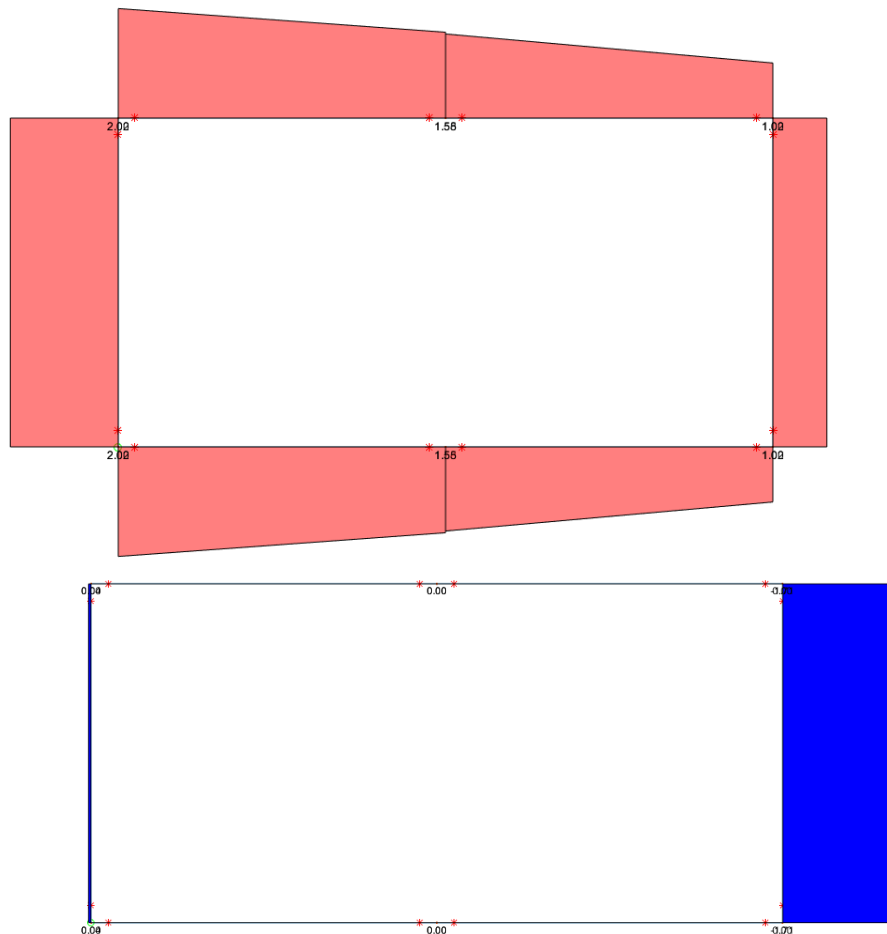
Fonte: O Autor (2025).

Os resultados para  $u$  e  $q$  foram obtidos com dez elementos lineares e dez pontos de Gauss para as integrais de contorno (para maiores informação verifique o *Volume 1* desta obra).

### 2.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA COM SUB-DOMÍNIOS DE MATERIAIS DIFERENTES

Agora adotando  $k_1=2$  e  $k_2=1$ , e aplicando as condições de contorno, tem-se a solução para o problema ilustrada pela Figura 5:

**Figura 5 – Ilustração da solução do MEC para  $u$  e  $q$  com  $k_1=2$  e  $k_2=1$  utilizando dez elementos lineares de contorno.**



Fonte: O Autor (2025).



O mesmo resultado é apresentado a seguir para cada uma das incógnitas de contorno e também para os potenciais no domínio:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}_{\text{contorno}} = \begin{bmatrix} 1.9991 \\ 1.6055 \\ 1.5251 \\ 1.0431 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_{15} \\ u_{16} \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}_{\text{contorno}} = \begin{bmatrix} 1.0431 \\ 1.5251 \\ 1.6055 \\ 1.9991 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_3 = u_{20} \\ u_4 = u_{19} \\ u_5 = u_{18} \\ u_6 = u_{17} \end{bmatrix}_{\text{domínio}} = \begin{bmatrix} 1.5478 \\ 1.5350 \\ 1.5350 \\ 1.5478 \end{bmatrix}$$

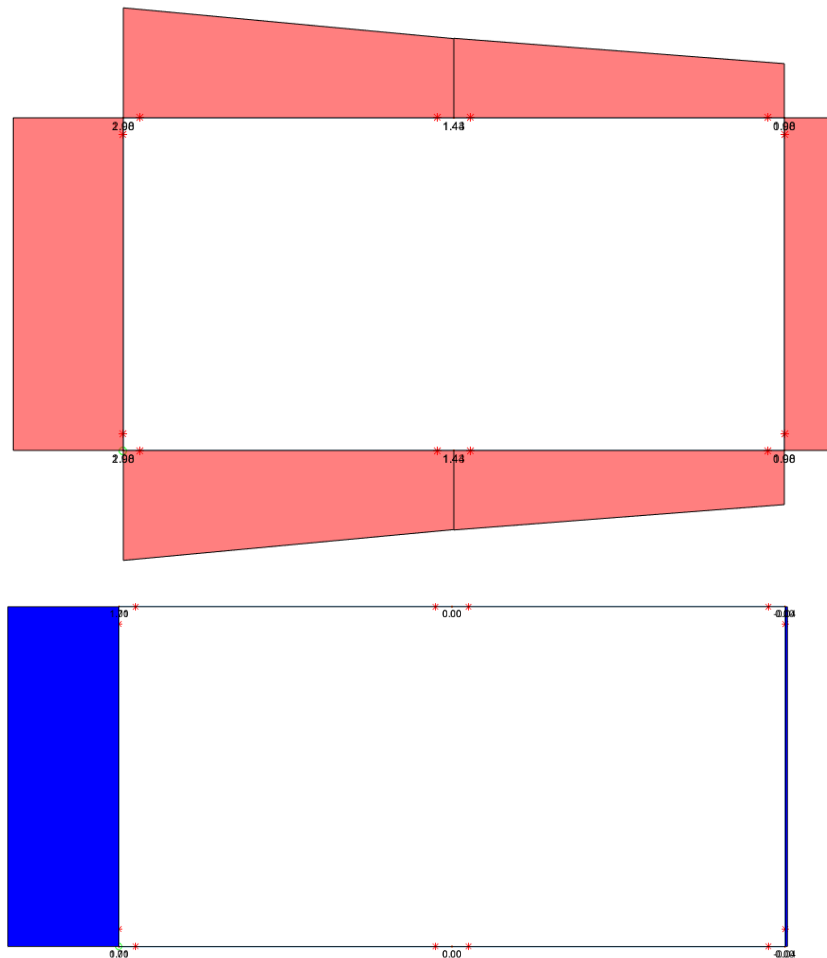
b) Para o problema resolvido em a, apresente soluções para as incógnitas adotando  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 2$ .

Resposta:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}_{\text{contorno}} = \begin{bmatrix} 1.9570 \\ 1.4566 \\ 1.4126 \\ 1.0008 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_{15} \\ u_{16} \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}_{\text{contorno}} = \begin{bmatrix} 1.0008 \\ 1.4126 \\ 1.4566 \\ 1.9570 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_3 = u_{20} \\ u_4 = u_{19} \\ u_5 = u_{18} \\ u_6 = u_{17} \end{bmatrix}_{\text{domínio}} = \begin{bmatrix} 1.4556 \\ 1.4685 \\ 1.4685 \\ 1.4556 \end{bmatrix}$$

Ilustrados pela Figura 5:

**Figura 6 – Ilustração da solução do MEC para  $u$  e  $q$  com  $k_1=1$  e  $k_2=2$  utilizando dez elementos lineares de contorno.**



**Fonte: O Autor (2025).**

Os exemplos anteriores são apresentados de forma que suas soluções possam ser construídas de forma manuscrita, com lápis e borracha, aliás, muita borracha, além de contar com o uso de uma calculadora científica simples. Para aplicações onde o domínio é dividido em vários sub-domínios homogêneos, sugere-se o uso do computador e da escrita de rotinas para acoplamento destes. Nas seções seguintes são apresentados dois casos que fazem o uso do MEC - 2D com sub-regiões em aplicações de engenharia.

## 2.4 UMA APLICAÇÃO DO MEC - 2D PARA ANÁLISE DO CAMPO DE VELOCIDADES: O PROBLEMA DE PERCOLAÇÃO DE ÁGUA EM MEIOS POROSOS

A descrição geral de um fluxo de fluido viscoso incompressível e homogêneo no domínio  $\Omega$  é dada pela equação de Navier-Stokes, como segue (STEIN e HUGHES, 2004)

$$\rho \left( \frac{\partial V(X,t)}{\partial t} + V(X,t) \bullet \nabla V(X,t) \right) = -\nabla p(X) + \mu \nabla^2 V(X,t) + \rho \mathbf{g} \quad (20)$$

$$X \in \Omega = \Omega_1 + \Omega_2, \quad X = (x, y)$$

com condição de incompressibilidade

$$\nabla V(X,t) = 0 \quad (21)$$

onde,  $V$ ,  $p$ ,  $\mathbf{g}$  representam o campo escalar de velocidades (m/s), pressão e forças externas no local  $X \in \Omega$  no tempo  $t > 0$ , respectivamente. Por sua vez,  $\rho$  e  $\mu$  denotam a densidade e viscosidade do fluido. No caso de fluxo constante, a equação de Navier-Stokes é reduzida para

$$\rho V(X) \bullet \nabla V(X) = -\nabla p(X) + \mu \nabla^2 V(X) + \rho \mathbf{g} \quad (22)$$

O problema passa a figurar como a equação de Stokes incompressível, obtida como uma simplificação da equação de Navier-Stokes. Para um número de Reynolds muito menor que a unidade, o termo advectivo  $V \bullet \nabla V$  não linear é pequeno comparado ao restante dos termos em (22) e pode ser negligenciado. Nesse caso, (22) reduz-se a

$$-\nabla p(X) + \mu \nabla^2 V(X) + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (23)$$

Considerando forças externas uniformes no domínio do fluxo, podemos introduzir a pressão modificada

$$P \equiv p(X) - \rho \mathbf{g} \bullet \mathbf{X} = 0 \quad (24)$$

Em termos da pressão modificada  $P$ , (23) assume a seguinte forma homogênea

$$-\nabla P + \mu \nabla^2 V(X) = 0 \quad (25)$$

chamada apenas de equação de Stokes.

De acordo com SOUSA (2013), vários estudos experimentais indicam que o fluxo de água através de solos se desenvolve em formato laminar, no qual partículas de água movem-se paralelamente entre si (FLORES-BERRONES e ACOSTA, 2011). A equação de Stokes é reduzida à equação de continuidade para um caso de fluxo laminar dado por (ROGERS, 1992):

$$k_{(x,y)} \nabla^2 V(X) = k_x \frac{\partial^2 V(X)}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 V(X)}{\partial y^2} = 0 \quad (26)$$

A equação (26) é uma Equação de Laplace e representa uma função potencial de velocidade escalar em um domínio de fluxo não rotacional, descrevendo o fenômeno da percolação da água em meios porosos em estado estacionário (JESUS e PEREIRA, 2004). Em (26),  $k_x$  e  $k_y$  representam o coeficiente de permeabilidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. O vetor de velocidade  $\mathbf{v}(X)$  pode ser expresso como o gradiente dessa função:

$$\nabla V(X) = \mathbf{v}(X) \quad (27)$$

As condições de contorno essenciais e naturais são (28) e (29), respectivamente:

$$V(X) = \hat{V}(X) \quad X \in \Gamma_v \quad (28)$$

$$W(X) = \frac{\partial V(X)}{\partial n(X)} = \hat{W}(X) \quad X \in \Gamma_w \quad (29)$$

As funções de contorno  $v(X)$  e  $w(X)$ , na interpretação física, representam a distribuição do campo escalar de velocidade e o campo de tração, normais ou fluxo no contorno  $\Gamma$ , respectivamente.

O campo de velocidade pode ser escrito a partir das componentes do vetor  $\mathbf{v}$  e versores  $\hat{\mathbf{i}}$  e  $\hat{\mathbf{j}}$  da velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , é dado por

$$\mathbf{v}(X) = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} \quad (30)$$

A equação (26) é o ponto de partida para o estudo sobre a percolação da água em meios porosos, semelhante ao fenômeno observado em uma barragem de terra com filtro de areia, que nesse trabalho assume-se  $k_x = k_y$ , em outras palavras, o caso isotrópico em cada domínio.

#### 2.4.1 Modelo geométrico - Filtro vertical de areia dentro da barragem de terra

A percolação é o movimento contínuo da água da face montante em direção à face jusante de uma barragem. Esse movimento é afetado pelo grau de compactação do solo, a textura, o grau de saturação e a temperatura da água (MEIRELLES, 2009).

Essa percolação deve ser limitada e monitorada, impedindo que esse fluxo surja na encosta a jusante, induzindo o arrastamento das partículas mais finas, causando processos erosivos internos. Para isso, a inserção de elementos de drenagem, como o filtro de areia, visa

provocar o redirecionamento do fluxo e evitar a erosão interna, além de reduzir as pressões intersticiais na porção à jusante, o que aumenta a estabilidade da barragem de terra.

Para barragens de terra com seções homogêneas, o sistema de drenagem interno consiste em filtros e drenos verticais e inclinados, além de drenos na base da barragem.

O filtro vertical, com espessura de até 2,0 m, deve ter seu topo no nível correspondente ao nível máximo de água no reservatório, construído para interceptar os fluxos percolados no núcleo de argila (ELETROBRAS, 2003). De acordo com CRUZ (1996), drenos verticais são recomendados apenas para barragens de 25 a 30 m. Para maiores alturas, o dreno inclinado fornece uma melhor distribuição de tensões no maciço, evitando a inclusão de uma parede de areia vertical que tenha uma rigidez muito maior que a do maciço adjacente, mesmo no caso de barragens de aterro.

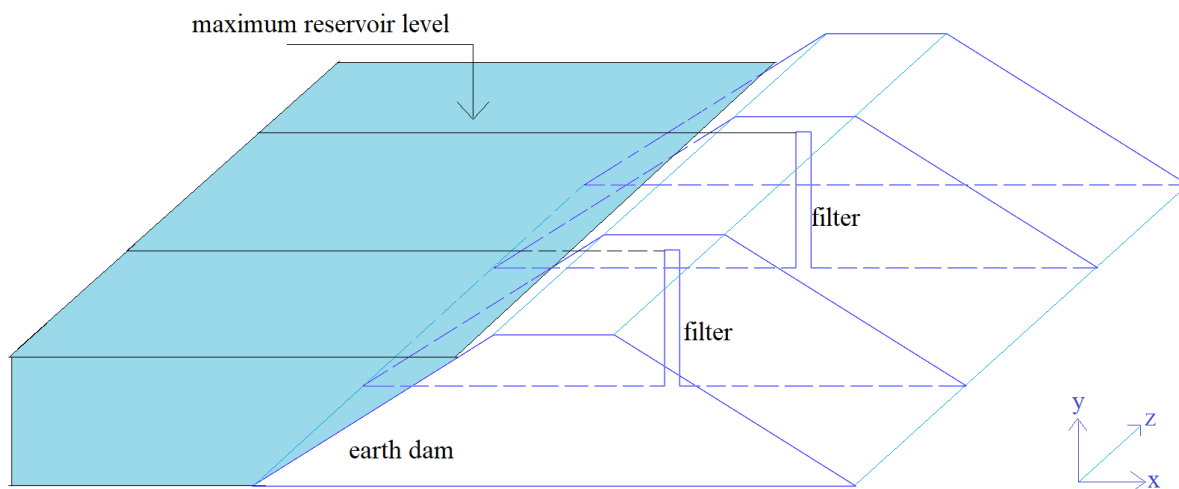
A escolha do material do filtro deve obedecer a dois princípios básicos:

(i) o filtro deve ser mais permeável do que solo, o que é garantido pela escolha de um tamanho de partícula adequado e

(ii) os vazios do filtro não devem permitir que os grãos passem pelo solo.

A Figura 7 ilustra uma barragem de terra com dois filtros de areia verticais.

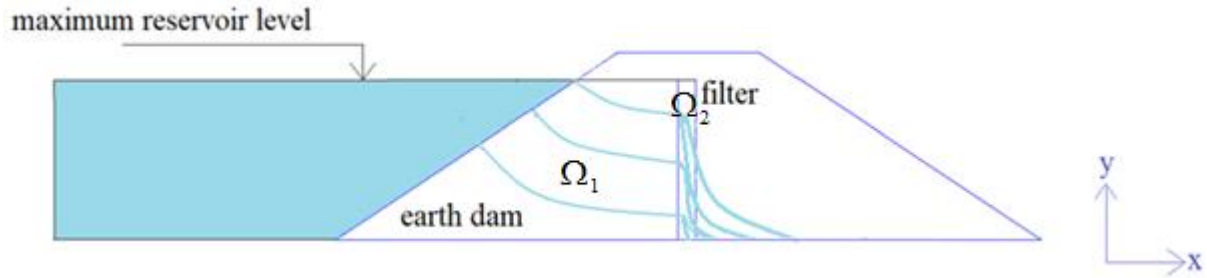
**Figura 7 – Seção da barragem de terra.**



**Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).**

A Figura 8 apresenta as linhas de percolação genéricas ao longo da estrutura da barragem durante o enchimento do reservatório, ilustrando o efeito do sistema de drenagem a jusante do filtro vertical.

**Figura 8 – Ilustração das linhas genéricas de percolação de água.**



**Fonte: Adaptado de PETTRES e CIRILO (2020).**

Neste estudo, uma seção genérica bidimensional de barragem de terra será considerada, onde  $\Omega_1$  representa a seção de terra e  $\Omega_2$  representa o filtro de areia, cuja formulação do MEC - 2D é apresentada na seção seguinte.

#### 2.4.2 MEC - 2D com sub-regiões para análise do campo de velocidades

Para calcular o campo de velocidade a partir da Equação de Laplace, aplica-se a formulação do MEC - 2D a todos os nós de contorno e pontos internos, obtendo-se o seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{bb} & \mathbf{H}_{1,2}^{bb} \\ \mathbf{H}_{2,1}^{bb} & \mathbf{H}_{2,2}^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^b \\ v_{1,2}^b \\ v_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{bb} & \mathbf{G}_{1,2}^{bb} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{bb} & \mathbf{G}_{2,2}^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^b \\ w_{1,2}^b \\ w_2^b \end{bmatrix} \quad (31)$$

Aplicando as equações de equilíbrio e compatibilidade na interface entre  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ ,

$$\begin{aligned} v_{1,2}^b &= v_2^b \\ w_{1,2}^b &= -w_2^b \end{aligned} \quad (32)$$

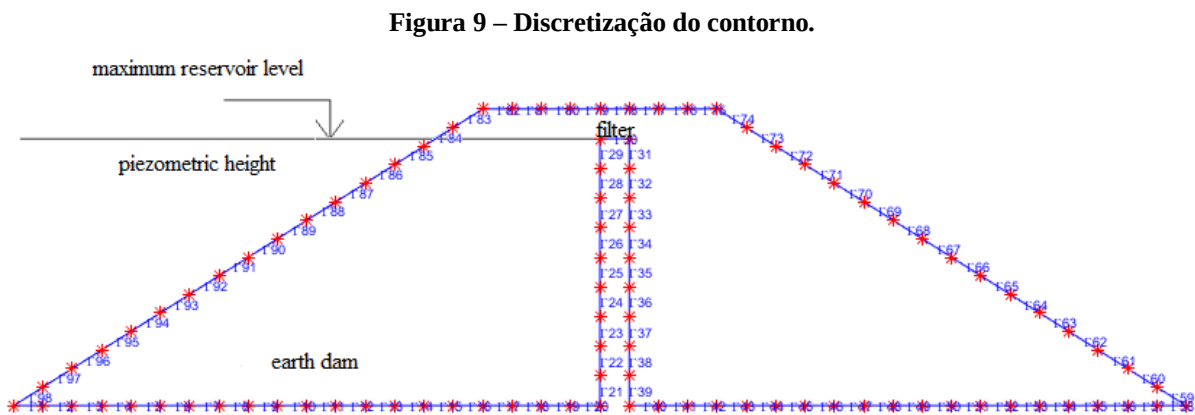
reduz-se o número de incógnitas do sistema matricial (31) para o mesmo número de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{bb} & \mathbf{H}_{1,2}^{bb} \\ \mathbf{H}_{2,1}^{bb} & \mathbf{H}_{2,2}^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^b \\ v_{1,2}^b \\ v_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{bb} & \mathbf{G}_{1,2}^{bb} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{bb} & \mathbf{G}_{2,2}^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^b \\ w_2^b \end{bmatrix} \quad (33)$$

onde  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes que resultam das integrais de contorno.

### 2.4.3 Exemplo - Seção da barragem com filtro de areia vertical, barragem com base não permeável e velocidade constante do fluxo de fluido

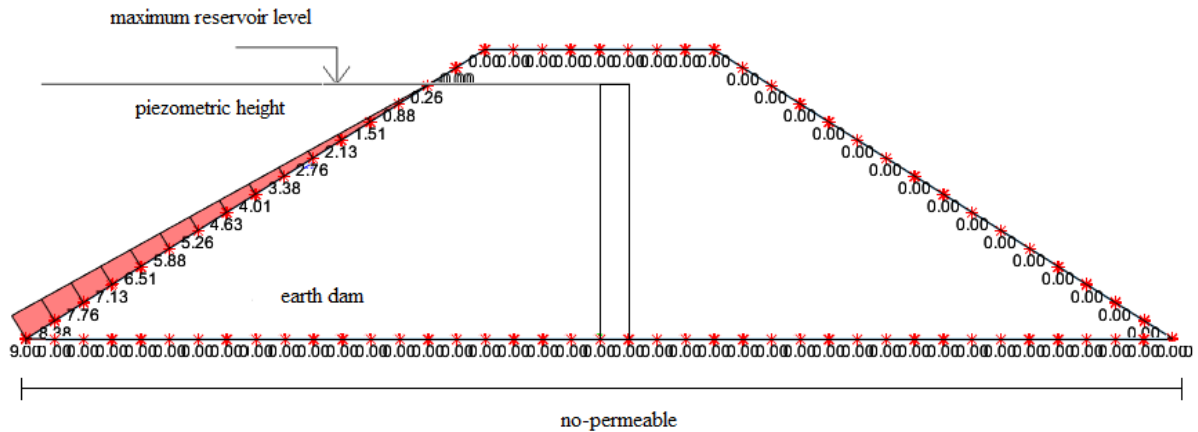
Neste exemplo numérico, uma barragem de seção genérica (Figura 7) foi discretizada em 118 elementos de contorno (98 em  $\Gamma_1$  e 20 em  $\Gamma_2$ ) (Figura 9) e está sujeita às condições de contorno ilustradas pela Figura 10.



Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).



**Figura 10 – Condições de contorno.**

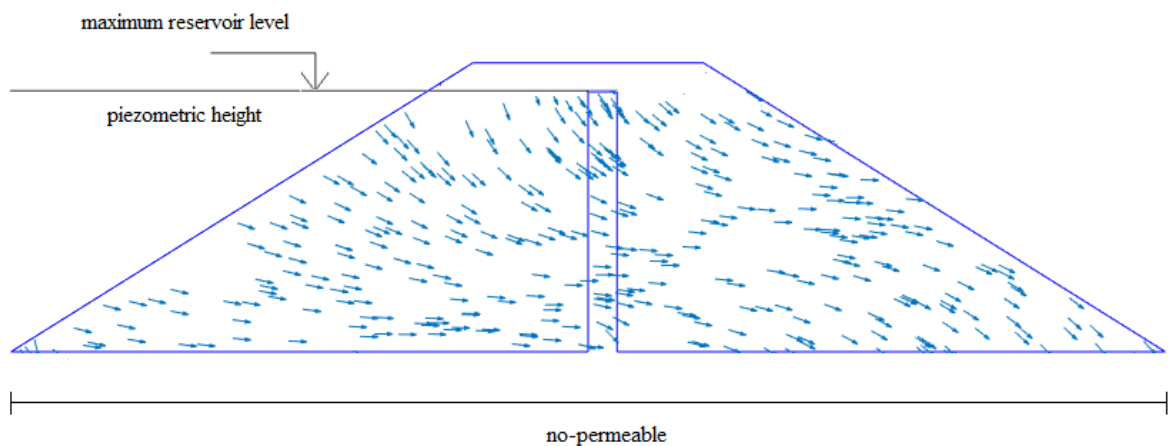


**Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).**

Na Figura 10, a condição de potencial de velocidade na borda a montante da barragem é equivalente à altura piezométrica, zero na borda superior e também na jusante da barragem, e a base da barragem é considerada não permeável.

Resolvendo a Equação de Laplace da formulação MEC - 2D usando sub-regiões setoriais homogêneas (33) com coeficientes de permeabilidade iguais a  $k_{\text{earth}} = 10^{-7}$  m/s and  $k_{\text{sand}} = 10^{-5}$  m/s (TERZAGHI e PECK, 1967), referente à barragem de terra e filtro de areia, respectivamente, obtêm-se o campo de velocidade que é mostrado na Figura 11.

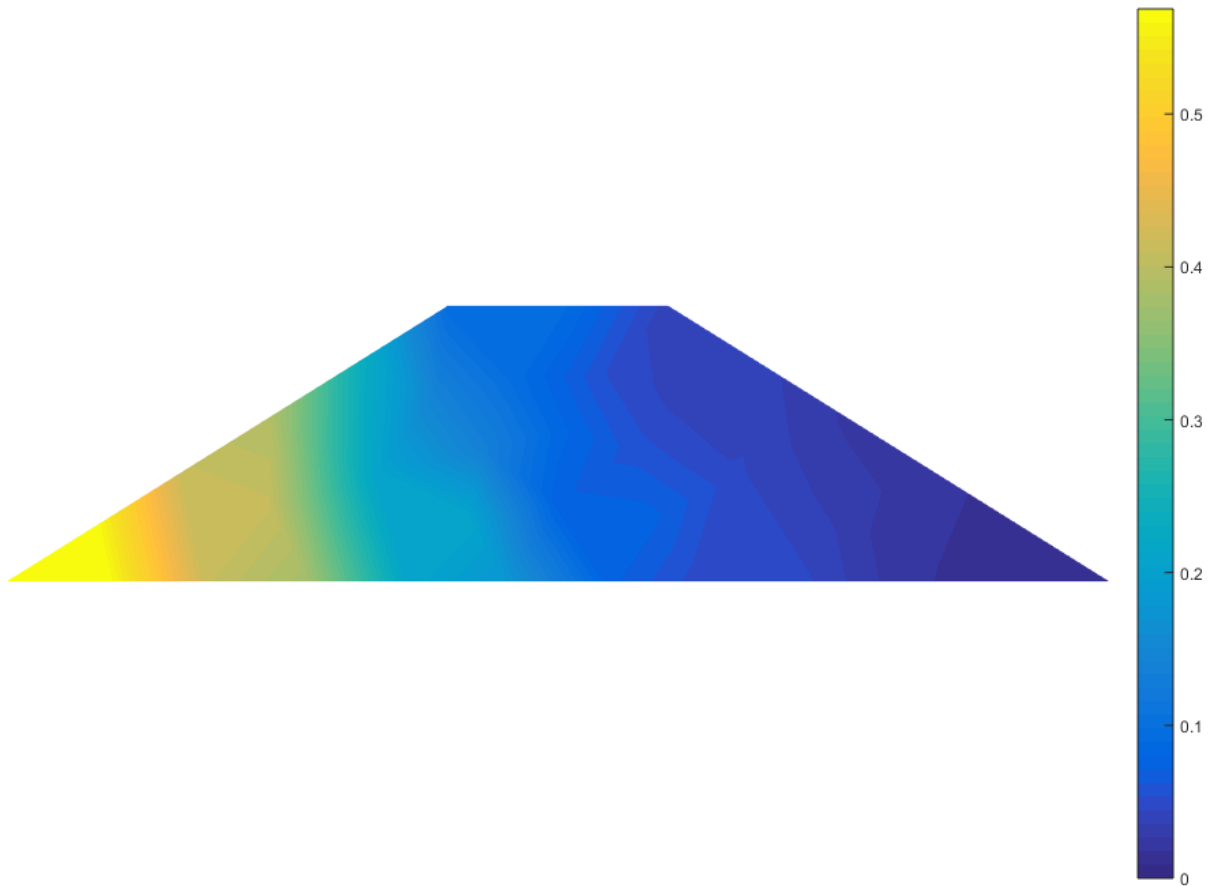
**Figura 11 – Campo de velocidades (vetores unitários) com  $k_1=10^{-7}$  m/s e  $k_2=10^{-5}$  m/s.**



**Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).**

As componentes do campo de velocidade indicam a maneira como as linhas de água percolam os meios porosos, também chamados de linhas de fluxo. A Figura 12 mostra o campo escalar de velocidades.

**Figura 12 – Campo escalar de velocidade com  $k_1=10^{-7}$  m/s e  $k_2=10^{-5}$  m/s.**

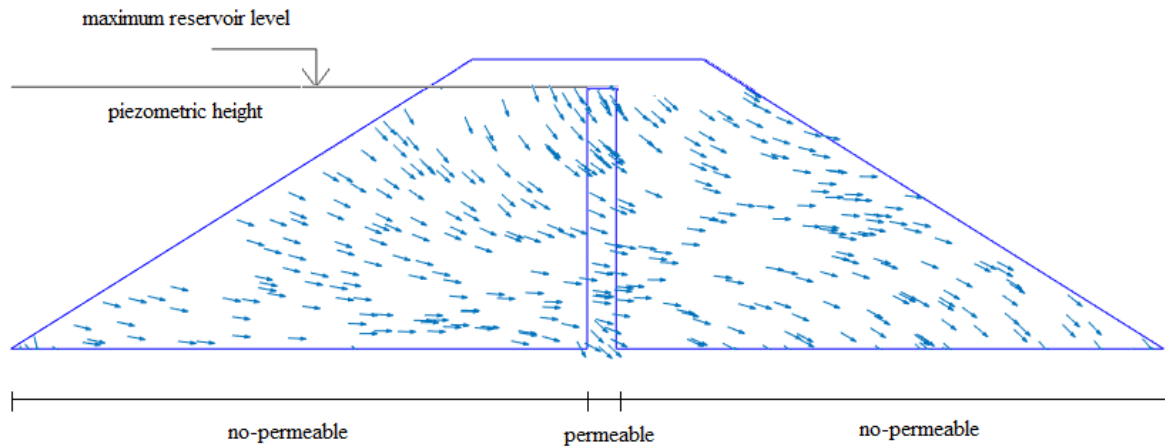


**Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).**

Os resultados do potencial de velocidade no contorno são apresentados na Figura 13 na barragem de terra e no filtro.



**Figura 15 – Campo de velocidades (vetores unitários).**

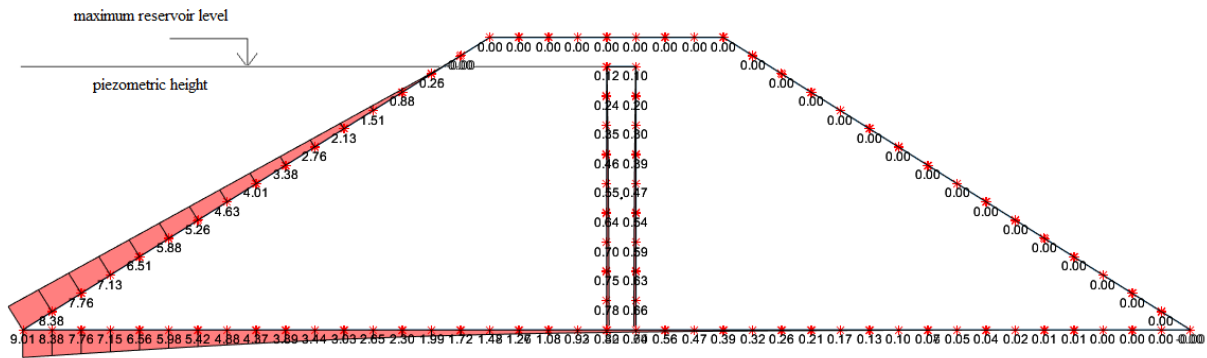


Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).

As componentes do campo de velocidade indicam a maneira como as linhas de água percolam os meios porosos com a presença do filtro de areia.

Os resultados do potencial de velocidade no contorno para este exemplo são apresentados pela Figura 16.

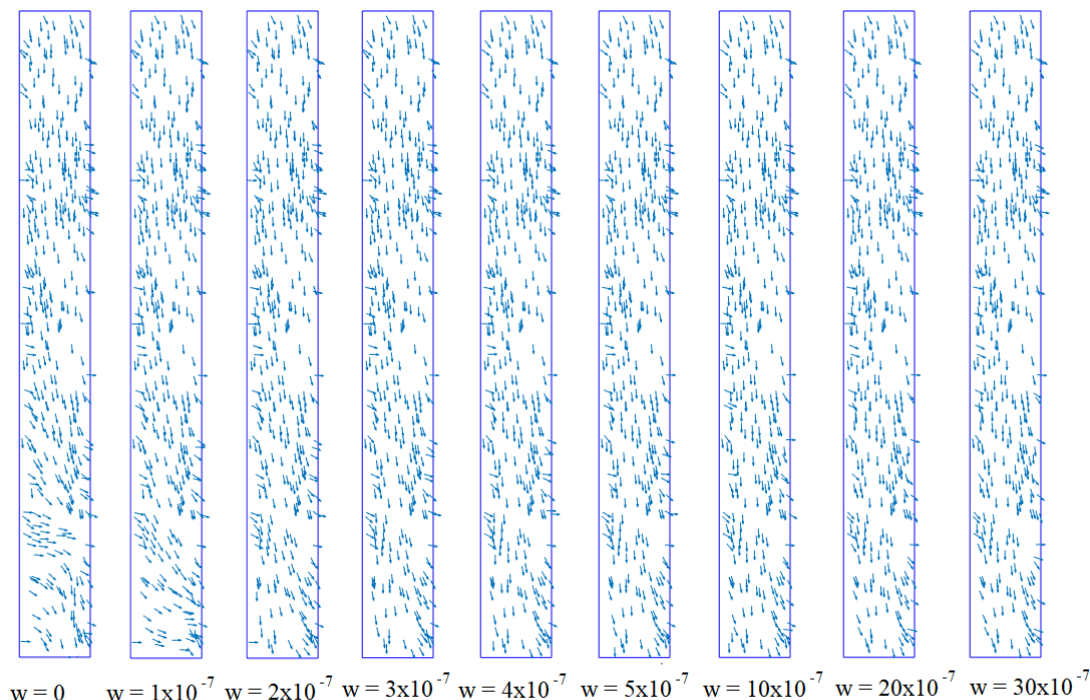
**Figura 16 – Distribuição do potencial de velocidade no contorno da barragem.**



Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).

Nas simulações seguintes, o fluxo na direção normal para ao contorno foi definido com  $w \times 10^{-7}$ , onde o valor de  $w$  é 2, 3, 4, 5, 10, 20 e 30, respectivamente. De uma forma comparativa, a Figura 17 ilustra o campo de velocidade vetorial do fluido no domínio  $\Omega_2$ .

**Figura 17 – Campos de velocidade dentro do filtro para diferentes condições de contorno.**



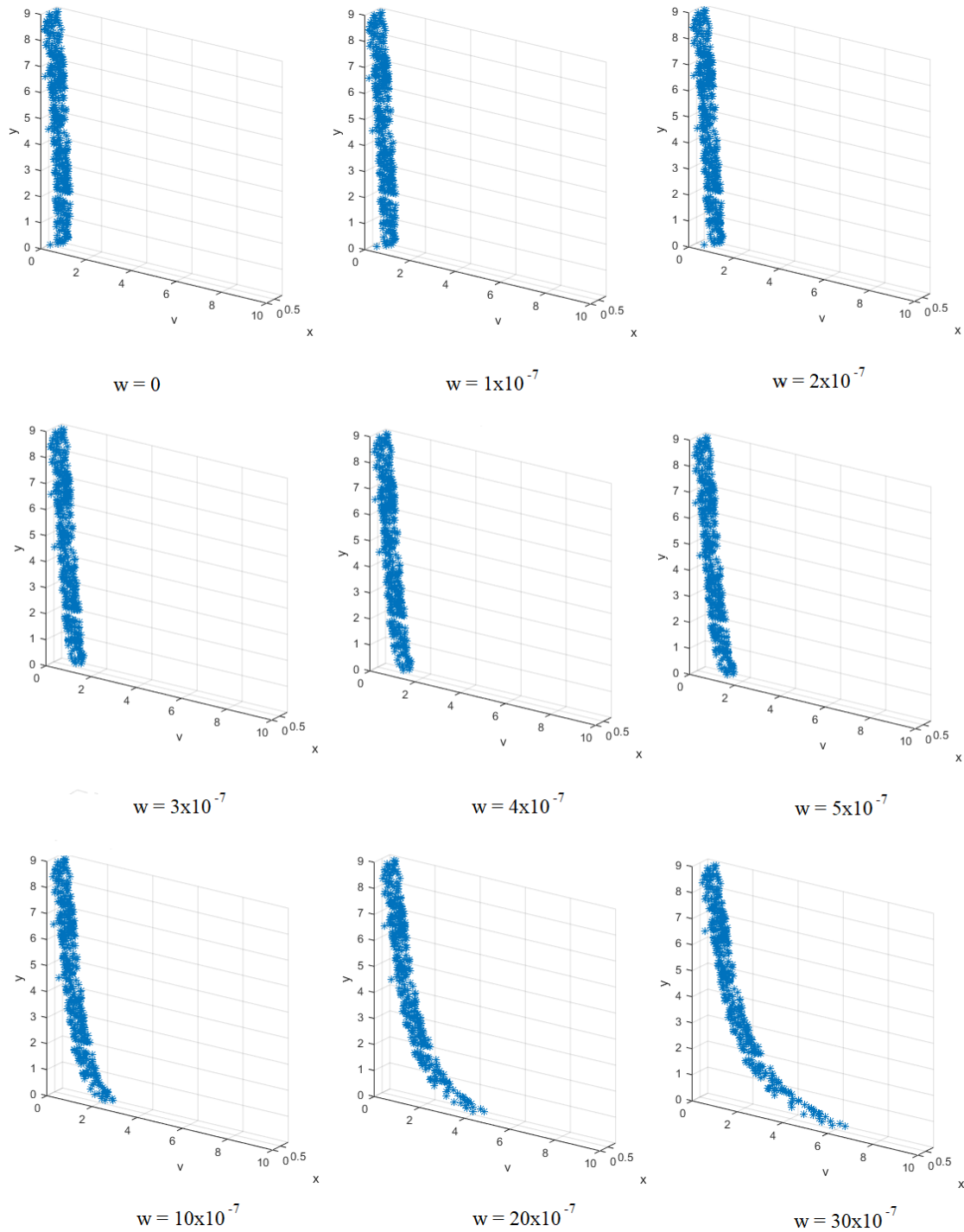
**Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).**

A partir das diferentes condições de fluxo na base do filtro de areia, foram calculados os diferentes campos de velocidade para a água que penetra na estrutura. O campo de velocidade dentro do filtro em cada simulação é mostrado na Figura 18.

A conclusão dos testes a partir desses resultados foi que o fluxo de água no interior do filtro de areia se apresenta de maneira quase laminar, assemelhando-se ao fluxo em um canal sem vorticidade, aumentando sua velocidade progressivamente em direção a parte inferior do filtro.

Em uma análise complementar, os resultados obtidos com o modelo numérico revelaram o efeito da velocidade do escoamento na distribuição de temperatura de um dispositivo colocado no interior do filtro de areia, sendo registradas menores temperaturas ao se adotar valores crescentes para a velocidade, demonstrando novamente o efeito advectivo. Esse efeito advectivo chamou em muito a atenção do autor, o qual apresentou uma versão mais abrangente desse estudo, apresentado em detalhes no artigo "*A first advective velocity study in porous media using temperature measures and boundary element formulation*", dos autores Pettres e Cirilo (2020), o qual pode ser encontrado no link: [Artigo](#).

**Figura 18 – Outra visualização dos campos de velocidade dentro do filtro para diferentes condições de contorno.**

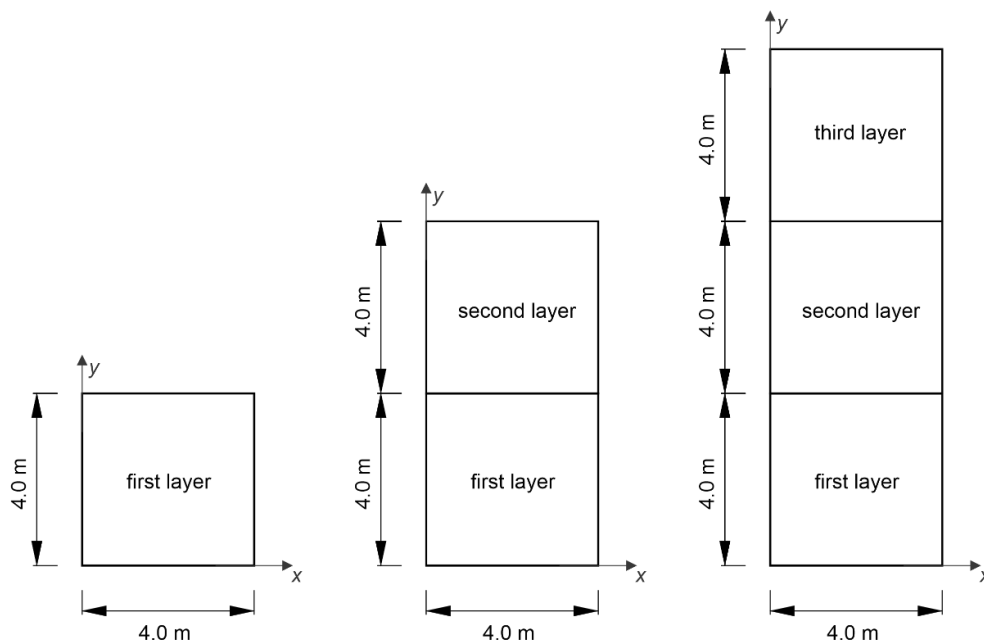


**Fonte: PETTRES e CIRILO (2020).**

## 2.5 UMA APLICAÇÃO DO MEC - 2D PARA ELEVAÇÃO DE TEMPERATURA EM BARRAGEM CCR

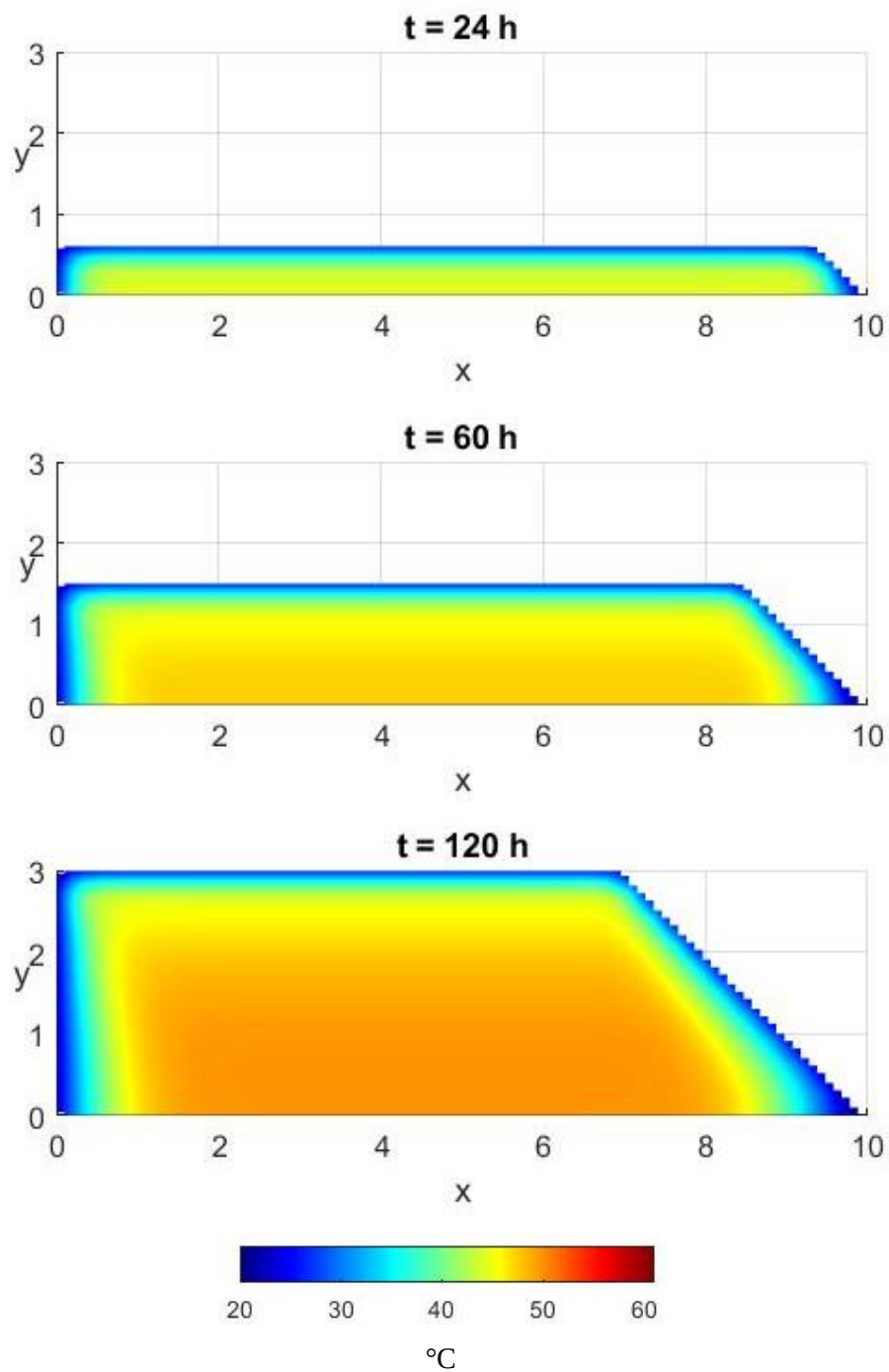
Uma aplicação que fez uso de vários sub-domínios quadrados é encontrada no artigo "*A thermal analysis of concrete structures performed by layers using boundary element formulation and dual reciprocity*", dos autores Salles e Pettres (2023), onde foi simulada a construção de uma barragem de concreto executada em camadas compactadas a rolo (CCR) e outra executada em sua totalidade, sendo registrados e analisados os valores de elevação de temperatura do concreto devido à reação de hidratação do cimento em cada um dos dois casos. No referido artigo, a equação da difusão do calor é usada para determinação do campo de temperaturas de uma estrutura construída por camadas, onde foi simulada uma estrutura hipotética de blocos quadrados superpostos, como ilustrado na Figura 19, aumentando o número de blocos de acordo com a geometria e dimensões da barragem, como ilustrado na Figura 20. Resultados importantes foram obtidos no referido estudo, o qual, sugere-se fortemente sua leitura através do link a seguir: [Artigo](#). Um vídeo explicando parte do estudo está disponível no link: [Vídeo](#).

**Figura 19 – Ilustração da sobreposição de blocos bidimensionais de concreto com o uso de sub-regiões.**



**Fonte: SALLES e PETTRES (2023).**

Figura 20 – Temperatura em °C para um intervalo de 120 h de análise da barragem construída em camadas.



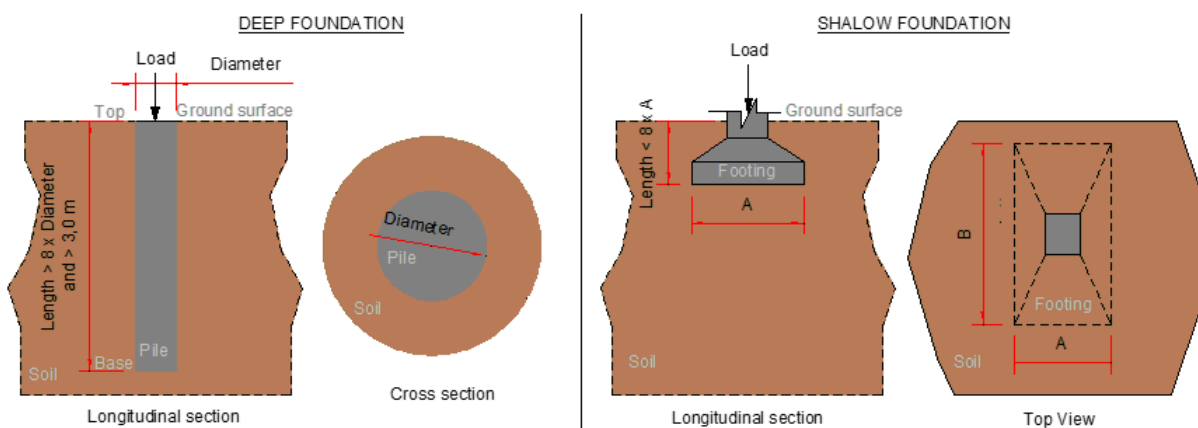
Fonte: SALLES e PETTRES (2023).



## 2.6 UMA APLICAÇÃO DO MEC PARA RECONSTRUÇÃO DIGITAL DE UMA ESTACA PROFUNDA DE CONCRETO

As fundações profundas de obras de engenharia são constituídas por elementos estruturais denominados estacas que têm a função de receber e transmitir as cargas de uma estrutura ao solo (ALONSO, 1983; VELOSO, 2004). As fundações profundas diferem das fundações rasas, segundo a ABNT NBR 6122:22<sup>3</sup>, pela profundidade em que repousa a base do elemento estrutural. Este tipo de fundação inclui estruturas que têm sua base apoiada em pelo menos oito vezes a menor dimensão em vista superior, e a pelo menos 3,0 m de profundidade. Na Figura 21 estão ilustradas as duas principais categorias de fundações para esclarecer as diferenças.

**Figura 21 – Principais categorias de fundação: fundação profunda à esquerda e superficial à direita.**



**Fonte: ROCHA e PETTRES (2023).**

A forma de produção das estacas profundas perfuradas não permite a visualização de sua geometria nem o conhecimento de sua integridade ao longo de sua profundidade, tendo em vista que o concreto é injetado no solo no estado fresco, preenchendo o fuste durante ou após a execução.

<sup>3</sup> A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) é uma organização responsável pela normalização técnica no Brasil, fornecendo insumos para o desenvolvimento tecnológico brasileiro. É uma entidade privada, sem fins lucrativos e de utilidade pública, fundada em 1940.

Devido a diversos fatores como a baixa qualidade do concreto, falhas no processo de lançamento ou injeção do concreto, tipo de solo, erros no procedimento de remoção de qualquer revestimento, entre outros, surgem incertezas relacionadas à forma como o concreto preencheu o poço perfurado. Diante dessas incertezas, na literatura atual são registrados dois métodos, métodos intrusivos e não intrusivos, que foram desenvolvidos para avaliar a integridade e geometria desses tipos de estacas.

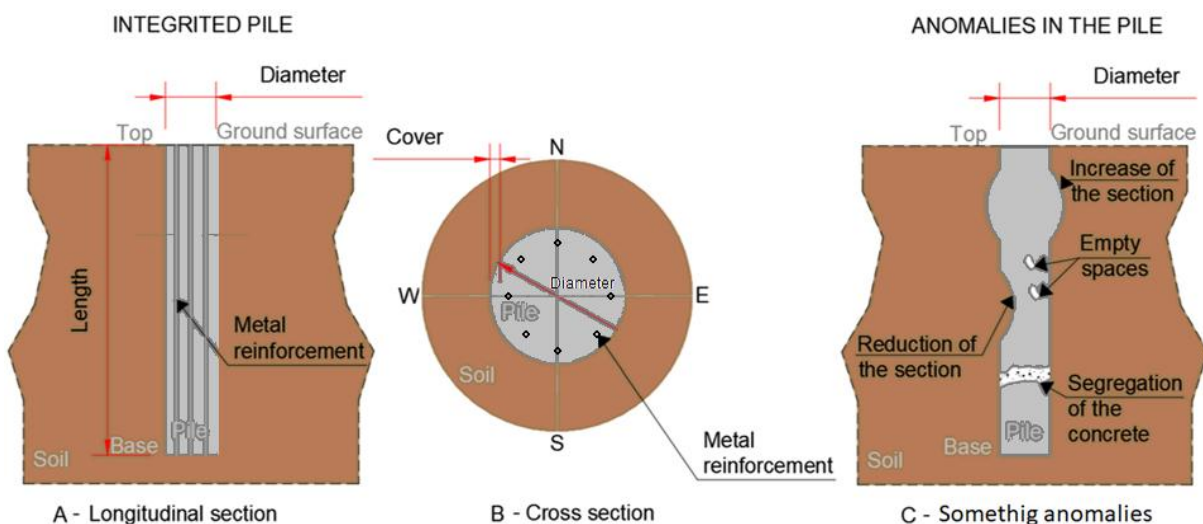
Quanto aos métodos intrusivos, destaca-se o método *Cross-hole* (CSL - *Cross-hole Sonic Logging*) citado por Rausche, Likins e Hussein (1988), onde pares de tubos metálicos ou de PVC são posicionados ao longo do comprimento da estaca antes de sua concretagem, para serem utilizados como guias para o roteamento de um emissor de ultrassom em um dos tubos e um receptor no outro. O sinal coletado pelo receptor é dependente da qualidade do concreto, possibilitando assim avaliar a integridade da estaca ao longo de sua profundidade, mas limitado à região central da estaca, entre os tubos. Hertlein (2011), citado por Bungenstab e Beim (2014), menciona que estes métodos não são capazes de fornecer um quadro completo da situação de integridade do elemento de fundação, e é aqui que o uso de simulações computacionais apresenta-se com alternativa de baixo custo.

Sobre os métodos não intrusivos, tem-se o *Low Strain Testing* (LST) também conhecido como PIT (*Pile Integrity Test*) amplamente discutido por Likins (2015), e o método de resposta transiente citado por Mullins, Likins e Beim (2012). Ambos os métodos são baseados na análise da propagação de ondas unidirecionais geradas pelo impacto de um martelo, porém, se distinguem pelo domínio avaliado, sendo o tempo e a frequência de resposta, respectivamente. O ensaio PIT se destaca pela rapidez de execução e baixo custo (LIKINS, 2015), fatores que fizeram com que o ensaio fosse amplamente realizado no Brasil, mas segundo Mullins, Likins e Beim (2012), algumas críticas são feitas pela comunidade geotécnica quanto à sua real eficácia e por não haver uma norma técnica regulamentadora específica no país. A interpretação dos resultados deste ensaio pode ser dificultada por fatores comuns presentes em campo, como variação do diâmetro da estaca, influência do solo circundante, exposição de armaduras no topo da estaca e estacas parcialmente reforçadas (MULLINS, LIKINS e BEIM, 2012).

A técnica mais recente desenvolvida com a finalidade de avaliar a integridade de estacas escavadas é conhecida pela sigla TIP, *Thermal Integrity Profiling*, que é um método de monitoramento intrusivo patenteado por Mullins (2004). A primeira aplicação desta técnica no Brasil foi realizada em uma estaca escavada com 1,10 m de diâmetro e 39,00 m de comprimento, realizada na Vila dos Atletas para os Jogos Olímpicos de 2016. Segundo Mullins (2004), este ensaio ainda está em fase inicial de divulgação, mas tem potencial para ganhar mercado e se tornar uma melhor solução, com melhor custo/benefício para verificação de integridade em fundações profundas do que os demais ensaios apresentados.

O método TIP utiliza o calor de hidratação do concreto, gerado durante a fase de endurecimento do mesmo, para avaliar a integridade de estacas escavadas. Portanto, sensores de temperatura são utilizados para medir as variações térmicas que ocorrem no interior da estaca, possibilitando assim a projeção de perfis de temperatura ao longo do tempo, os quais são correlacionados com padrões de resposta térmica característicos de uma estaca de referência corretamente instalada, possibilitando assim a representação gráfica da forma como o concreto foi injetado e endurecido ao longo de toda a sua extensão (MULLINS, 2010). As informações obtidas pelo uso desta técnica são diversas, destacando-se o cobrimento de concreto sobre a armadura da estaca, a geometria da estaca ao longo do fuste, bem como a presença de anomalias na massa de concreto como: presença de vazios, redução ou aumento do diâmetro da estaca, segregação do concreto, entre outras (ROCHA e PETTRES, 2023). Algumas destas características são mostradas na Figura 22.

**Figura 22 – Características de uma estaca escavada e exemplos de possíveis anomalias. A) Perfil longitudinal de uma estaca integral concretada perfeitamente em todo seu comprimento. B) Corte transversal com identificação do diâmetro da estaca, estrutura metálica da estaca e cobrimento de concreto. C) Exemplos típicos de anomalias observadas em estacas escavadas.**



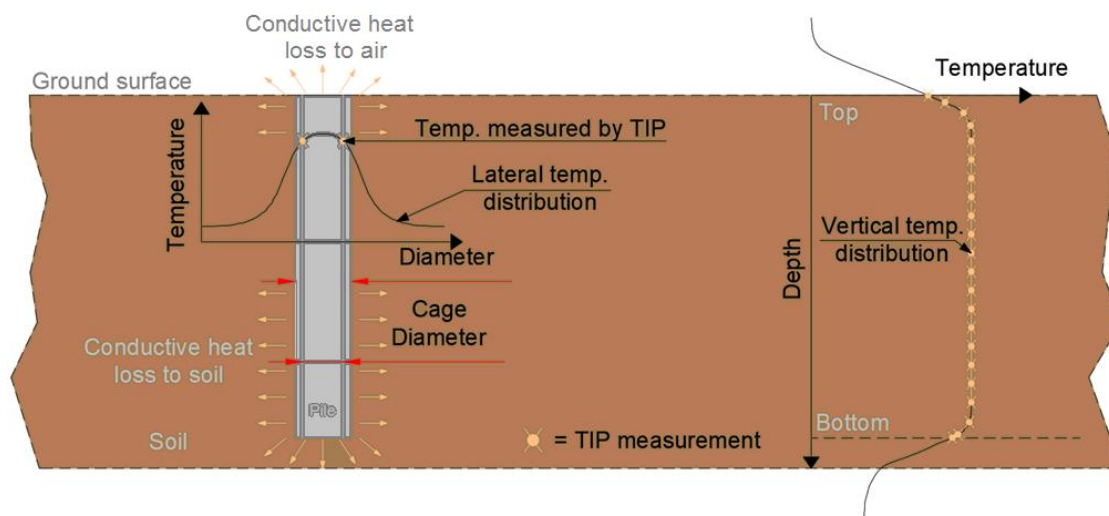
**Fonte: ROCHA e PETTRES (2023).**

A Figura 22 (A) mostra a seção longitudinal de uma estaca de concreto armado com diâmetro contínuo em toda sua extensão, executada no interior de uma camada de solo homogêneo. Em B, os pontos cardeais N (Norte), S (Sul), E (Leste) e W (Oeste) são utilizados para definir a direção em que a armadura de aço será posicionada em relação à seção transversal do conjunto formado pelo solo e a estaca de concreto em casos que serão simulados numericamente. Ainda, a Figura 22 (C) mostra algumas anomalias que podem ocorrer em uma estaca de concreto, como o aumento ou redução da seção transversal devido, por exemplo, a variações na pressão de injeção do concreto, presença de vazios possibilitados por falhas durante o processo de concretagem e, ainda, a ocorrência de segregação do concreto em uma eventual concretagem onde o concreto é lançado em alturas elevadas (ROCHA e PETTRES, 2023).

As variações térmicas que ocorrem no interior de uma massa de concreto, durante seu aquecimento e/ou resfriamento, são desenvolvidas com base em princípios físicos, químicos e moleculares (MULLINS e ASHMAWY, 2005), enquanto que quando são conhecidas, juntamente com as informações das dimensões da estaca, definidas em projeto, é possível que sejam

correlacionadas, pois o formato da curva de distribuição de temperatura, em um dado instante para uma dada seção transversal, tem um padrão conhecido, como pode ser visto na Figura 23 à esquerda. Este perfil de temperatura tem formato de sino, e o topo da curva está localizado no centro da estaca, onde ocorre a concentração de temperatura resultante do calor de hidratação do cimento (MULLINS e KRANK, 2007). Como a estaca é um elemento simétrico, a temperatura tende a ser reduzida à medida que se aproxima da interface concreto/solo, até atingir a temperatura ambiente do solo, fora da estaca (ROCHA e PETTRES, 2023).

**Figura 23 –Distribuição teórica de temperatura comparada com medições de campo ao longo de uma seção transversal de uma estaca de 13,3 m de diâmetro.**

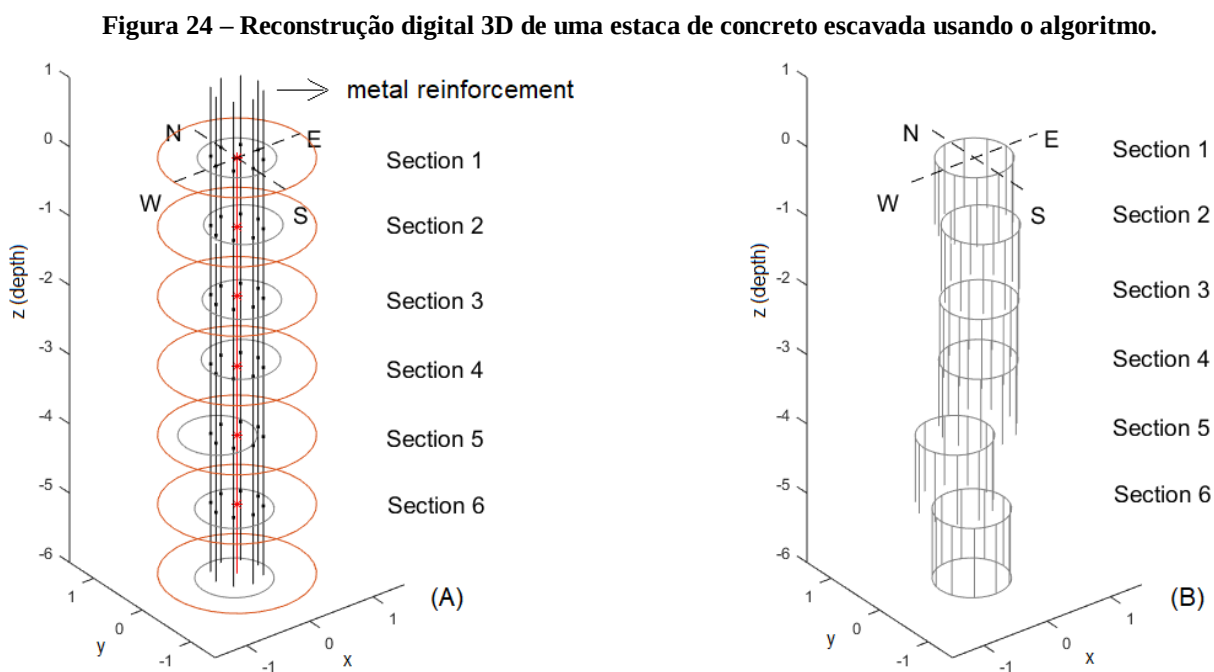


**Fonte: ROCHA e PETTRES (2023).**

Quando ocorre uma anomalia como uma variação de vazão ou diâmetro de estaca em uma determinada região da estaca, esse perfil de distribuição de temperatura é alterado (MULLINS, 2010), levando à possibilidade de ser identificado. Dessa forma, essa técnica é muito útil para obtenção do perfil térmico de estacas escavadas, porém, apresenta duas limitações significativas. A primeira é a dependência do calor de hidratação do cimento durante o processo de endurecimento do concreto, que ocorre sempre que o cimento entra em contato com água, por um determinado período de tempo, e a amplitude térmica observada durante o aquecimento é variável e dependente do volume de cimento a ser hidratado, sem a qual não é possível realizar

nenhuma medição de variações de temperatura. A segunda se refere ao diâmetro mínimo necessário para que o concreto da estaca gere calor suficiente para que os sensores de temperatura percebam tais variações de temperatura (ROCHA e PETTRES, 2023). Foi a partir dessas duas limitações que um estudo denso sobre o tema foi elaborado pelos autores Rocha e Pettres (2023), cujos resultados demonstraram a possibilidade de reconstruir digitalmente o perfil geométrico de uma estaca de fundação profunda, fazendo uso um modelo bidimensional de elementos de contorno, que, apesar do fenômeno analisado ser transiente, ou seja, uso da Equação do Difusão na formulação, os dados de temperatura utilizados no algoritmo desenvolvido são coletados após a transferência de calor se tornar permanente, ou seja, até o fenômeno atingir o equilíbrio, cujos comportamento assemelha-se ao resultado advindo da Equação de Laplace. O artigo com esta aplicação é intitulado *"Digital reconstruction of a concrete pile from temperature data and boundary element formulation"*, o qual sugere-se sua leitura a través do link: [Artigo](#).

A Figura 24 (A) ilustra o resultado da reconstrução digital da estaca de concreto utilizando o algoritmo desenvolvido, contendo as seções de solo, termômetros, fonte de calor e armaduras metálicas e em (B) é apresentado apenas o formato da estaca de concreto.



**Fonte: ROCHA e PETTRES (2023).**

A Figura 24 também ilustra o resultado e a saída gráfica do algoritmo desenvolvido, que, de acordo com de certas condições/limitações discutidos no artigo, o conjunto formado pelo solo e pelo conjunto de estacas de concreto foi reconstruído digitalmente em 3D, utilizando como dados apenas os valores de variação de temperatura, indicando a viabilidade da metodologia desenvolvida para monitorar a integridade de estacas de concreto.

### 3 A EQUAÇÃO DE LAPLACE EM TRÊS DIMENSÕES: MEC – 3D

A Equação de Laplace com propriedades homogêneas e isotrópicas em três dimensões é dada por:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad em \quad \Omega \quad (34)$$

com as condições de contorno essenciais e naturais, respectivamente:

$$u = \hat{u} \quad em \quad \Gamma_u \quad u = u_1 \quad e \quad u_2 \quad (35)$$

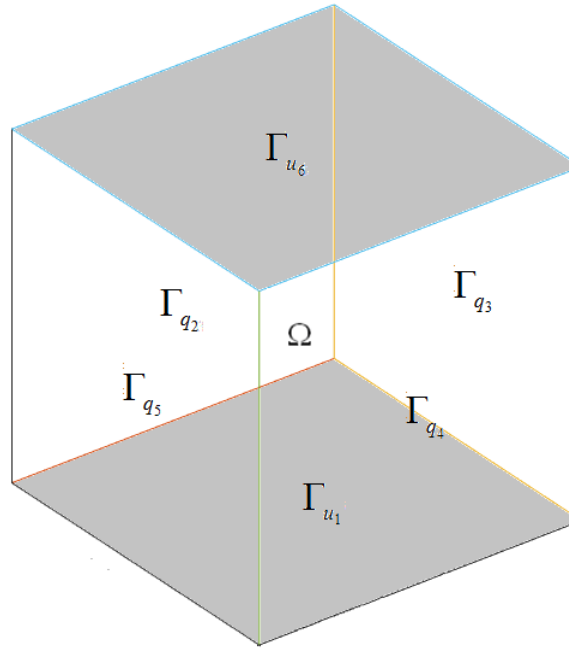
$$q = \hat{q} = \frac{\partial u}{\partial n} \quad em \quad \Gamma_q \quad q = q_2, q_3, q_4 \quad e \quad q_5 \quad (36)$$

onde  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ , como ilustra a Figura 25.

O modelo geométrico é um cubo unitário (Figura 25) de domínio  $\Omega$ , cujas faces planas  $\Gamma$ , são discretizadas em elementos de contorno retangulares e/ou triangulares, por exemplo.



**Figura 25 – Ilustração do domínio da equação (34) e seu contorno.**



**Fonte: O Autor (2025).**

A equação integral do Método dos Elementos de Contorno para a equação (34) é:

$$C(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} U^*(\xi, X)q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} Q^*(\xi, X)u(X) d\Gamma \quad (37)$$

onde a expressão de  $U^*(\xi, X)$  é:

$$U^*(\xi, X) = \frac{1}{4\pi r} \quad (38)$$

onde  $r = |X - \xi|$  é a distância entre  $X$  e  $\xi$  (GREENBERG, 1971) e a sua derivada em relação à direção normal ao contorno é denotada por  $Q^*$  e calculada como:

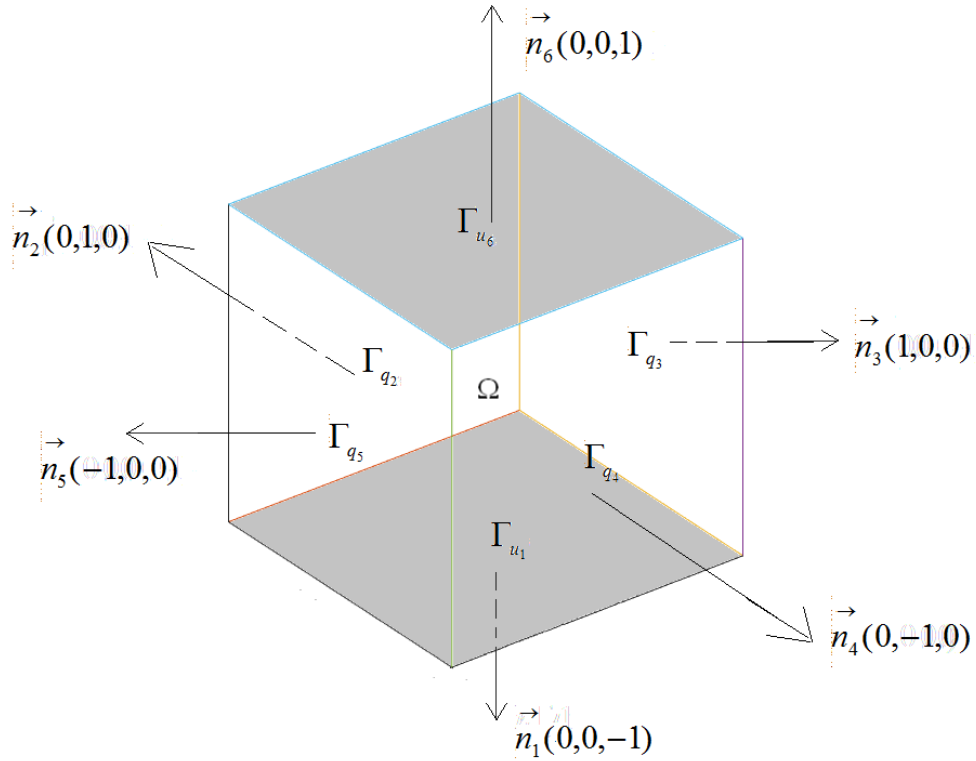
$$Q^*(\xi, X) = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{dr}{dn} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dr}{dn} \quad (39)$$

O termo  $C(\xi)$ , designado por coeficiente de forma, é dado pela equação (40):

$$C(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \notin \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \xi \text{ é ponto de contorno suave } (\theta = \pi) \\ 1, & \text{se } \xi \in \Omega \end{cases} \quad (40)$$

Os vetores normais unitários para o domínio ilustrado na Figura 25 são apresentados na Figura 26:

**Figura 26 – Ilustração dos vetores normais do domínio da equação (37).**

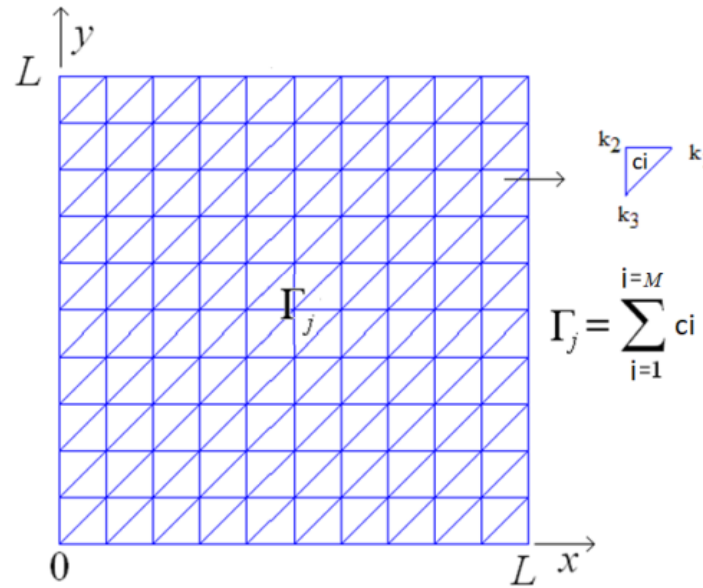


**Fonte: O Autor (2025).**

### 3.1 INTEGRAÇÃO DO CONTORNO: ELEMENTOS TRIANGULARES

Nesta formulação, as integrais de contorno da equação (37) são calculadas com a discretização de cada face do cubo em triângulos planos, considerando-se como constante os valores das variáveis calculadas sobre cada triângulo,  $u$  e  $q$  (PETTRES, LACERDA e CARRER, 2015). Um elemento de contorno genérico  $ci$  é definido pelos vértices  $k_1(x_1, y_1)$ ,  $k_2(x_2, y_2)$  e  $k_3(x_3, y_3)$  sobre uma face  $\Gamma_j$ , como ilustra a Figura 27.

**Figura 27 – Ilustração da discretização de uma face do cubo em triângulos  $ci$  de contorno.**



**Fonte: PETTRES, LACERDA e CARRER (2015).**

As integrais dos elementos de contorno são integrais duplas e podem ser calculadas utilizando-se uma transformação no plano a partir dos vértices do triângulo da forma:

$$\begin{aligned} x &= (1 - U) x_1 + U [(1 - V) x_2 + V x_3] \\ y &= (1 - U) y_1 + U [(1 - V) y_2 + V y_3] \end{aligned} \quad (41)$$

Tem-se, portanto,  $U$  e  $V$  (coordenadas do sistema triangular) como funções de  $x$  e  $y$ , ou seja:

$$\begin{aligned} U &= U(x, y) \\ V &= V(x, y) \end{aligned} \quad (42)$$

Para o cálculo da integral dupla de uma função de duas variáveis, exige-se que a função seja definida numa região fechada<sup>4</sup> em um espaço  $\Re^2$  (real de duas dimensões), condição essa, satisfeita pela região triangular de cada célula.

Efetuada tais transformações, faz-se necessário calcular o determinante do Jacobiano de transformação.

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \quad (43)$$

Observa-se que as diferenciais em (43) representam as coordenadas dos vetores formados por dois lados adjacentes do triângulo apresentado na Figura 28, desse modo, o Jacobiano é igual ao módulo do produto vetorial desses dois vetores, constante ao longo do elemento e numericamente igual ao dobro da área do triângulo (SOUZA e CODA, 2005), ou seja:

$$|J| = 2 A \quad (44)$$

Dessa forma, as integrais de contorno são calculadas da seguinte maneira:

$$\int_{\Gamma} Q^*(\xi, X) u(X) d\Gamma = \sum_{i=1}^{i=M} \int_0^{1-U} \int_0^{1-U} \psi Q^*(\xi, X_i) u(X) |J_i| dV dU \quad (45)$$

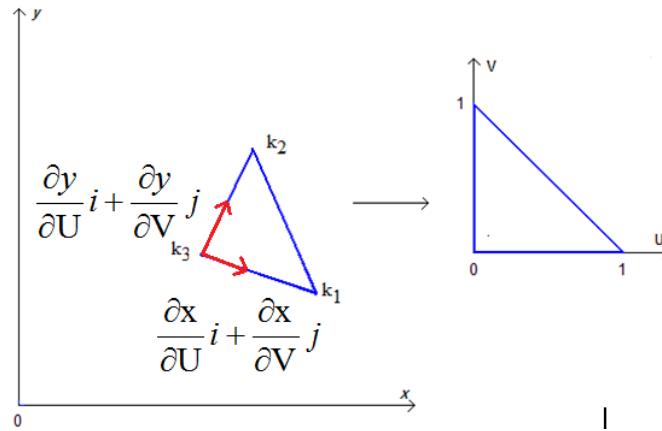
---

<sup>4</sup> Uma região fechada é que aquela que inclui sua fronteira (LEITHOLD, 1994).

$$\int_{\Gamma} U^*(\xi, X) q(X) d\Gamma = \sum_{i=1}^M \int_0^1 \int_0^{1-U} \psi U^*(\xi, X_i) q(X) |J_i| dV dU \quad (46)$$

onde  $\psi$  é uma função constante unitária,  $M$  é o número de elementos triangulares e os limites de integração variam entre 0 e 1 (domínio  $(U, V)$ ), como ilustrado na Figura 28.

**Figura 28 – Transformação de coordenadas de  $x$  e  $y$  em  $U$  e  $V$ .**



Fonte: O Autor (2025).

Procedendo da maneira indicada, a solução aproximada da integral dupla não depende mais das variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $U$  e  $V$ , mas apenas das coordenadas dos vértices dos elementos triangulares e da distância  $r$  entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $X$  como segue:

$$\int_0^1 \int_0^{1-U} \psi Q^*(\xi, X) |J| dV dU = -\frac{1}{8\pi r^2} \frac{dr}{d\eta} (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (47)$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-U} \psi U^*(\xi, X) |J| dV dU = \frac{1}{8\pi r} (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (48)$$

que correspondem, respectivamente, à derivada da solução fundamental e a solução fundamental

ponderadas pela área  $A$  do elemento triangular, ou seja:

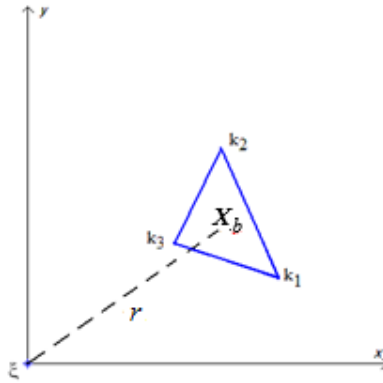
$$\int_0^1 \int_0^{1-U} \psi Q^*(\xi, X) |J| dV dU = -A \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dr}{d\eta} \quad (49)$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-U} U^*(\xi, X) |J| dV dU = A \frac{1}{4\pi r} \quad (50)$$

A distância euclidiana do ponto fonte  $\xi$  ao centroide  $X_b$  é determinada pelas coordenadas dos vértices dos triângulos, onde a coordenada  $X_b$  é dada por (Figura 29):

$$X_b = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \quad (51)$$

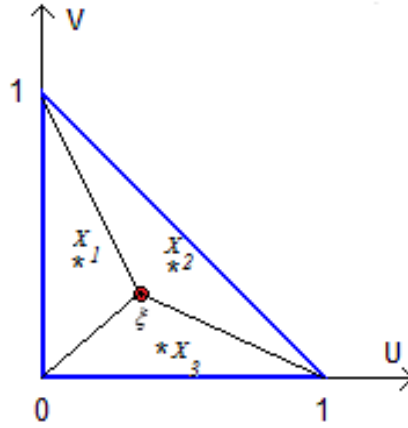
**Figura 29 – Ilustração da localização do ponto campo  $X$ .**



**Fonte: PETTRES, LACERDA e CARRER (2015).**

Quando o ponto fonte  $\xi$  coincide com o ponto  $X_b$ , as integrais (49) e (50) são hiper e fortemente singulares, respectivamente. Nesse caso, integra-se tal elemento triangular subdividindo-o e alocando novos pontos de integração, não coincidentes com o ponto fonte  $\xi$  como ilustra a Figura 30.

**Figura 30 – Ilustração da localização dos pontos de integração para o caso singular ( $X=\xi$ ) e da subdivisão do elemento transformado.**



**Fonte: PETTRES, LACERDA e CARRER (2015).**

Determinadas as coordenadas dos pontos de integração e as sub-áreas ( $A_i$ ) do elemento triangular, as integrais singulares são calculadas da seguinte forma:

$$\int_0^1 \int_0^{1-U} \psi Q^*(\xi, X) |J| dV dU = - \sum_{i=1}^3 A_i \frac{1}{4\pi r_i^2} \frac{dr_i}{d\eta} \quad (52)$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-U} U^*(\xi, X) |J| dV dU = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{1}{4\pi r_i} \quad (53)$$

onde  $r_i$  representa a distância entre  $\xi$  e  $*x_1$ ,  $*x_2$  e  $*x_3$ .

### 3.2 NOTAÇÃO MATRICIAL E SOLUÇÃO DO MEC-3D

Chamando de  $\tilde{H}$  e  $G$  as matrizes formadas pelo cálculo das integrais que contém  $Q^*(\xi, X)$  e  $U^*(\xi, X)$ , respectivamente, a equação (37) em forma discretizada, torna-se,

$$C_i u_i = G q_i - \tilde{H} u_i,$$

cujo valor do coeficiente  $C_i$  vale  $\frac{1}{2}$ , pois  $\xi$  é ponto de contorno suave ( $\theta = \pi$ ) (equação (40)).

Dessa forma, a matriz  $H = \frac{1}{2}[I] + \tilde{H}$ , onde  $I$  é a matriz identidade, tornando possível a montagem do seguinte sistema matricial de equações,

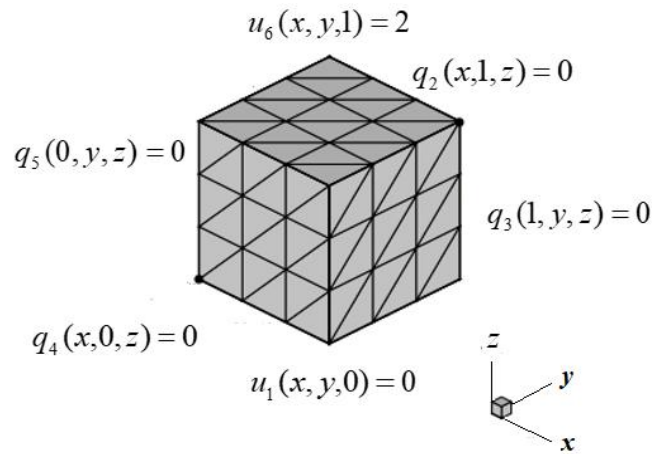
$$Hu = Gq, \quad (54)$$

o qual admite solução única quando condições específicas de contorno são impostas.

### 3.2.1 Um problema com a aplicação de elementos triangulares de contorno – MEC-3D

Os resultados da formulação do MEC-3D são comparados à solução analítica do seguinte problema que considera a equação (34), com  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  e  $0 \leq z \leq 1$ , sob as condições de contorno ilustradas na Figura 31,

**Figura 31 – Ilustração genérica da discretização das faces do cubo e condições de contorno.**

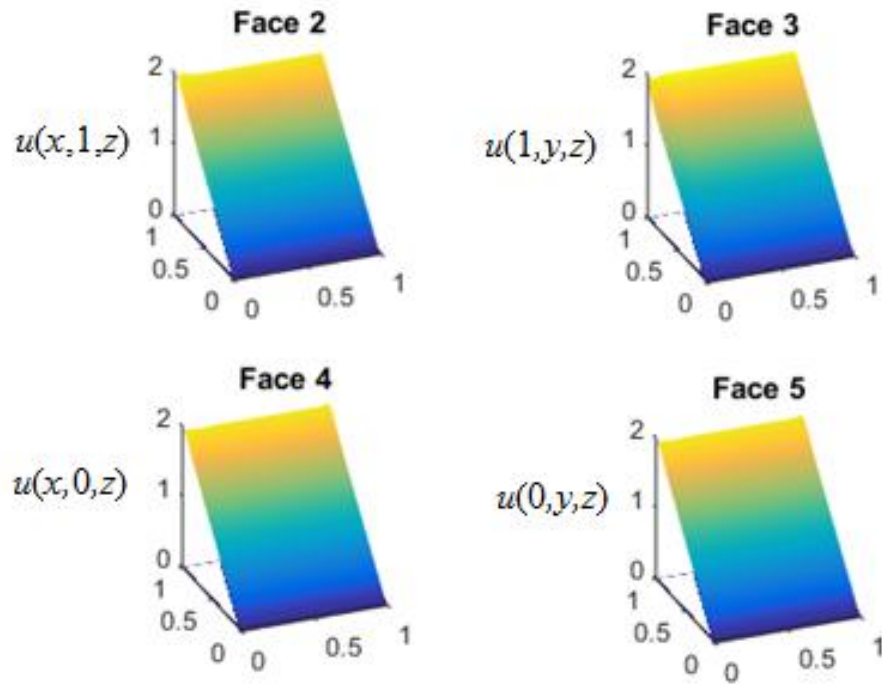


Fonte: O Autor (2025).



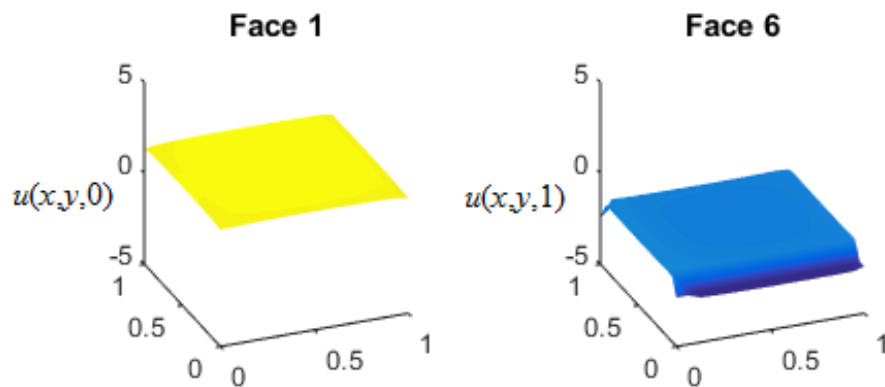
cujas incógnitas são  $u_2(x,1,z)$ ,  $u_3(1,y,z)$ ,  $u_4(x,0,z)$ ,  $u_5(0,y,z)$ ,  $q_1(x,y,0)$  e  $q_6(x,y,1)$ . As soluções para as variáveis  $u$  são apresentadas na Figura 32 e na Figura 33 para a variável  $q$ , utilizando-se 512 triângulos de contorno por face.

**Figura 32 – Solução  $u(x,y,z)$  para as faces do cubo com o MEC-3D.**



Fonte: O Autor (2025).

**Figura 33 – Solução  $q(x,y,z)$  para as faces do cubo com o MEC-3D.**



Fonte: O Autor (2025).

Comparando os resultados do MEC-3D com as soluções analíticas do problema, sendo  $u(x, y, z) = 2z$ ,  $q(x, y, 0) = 2$  e  $q(x, y, 1) = -2$ , observa-se na Figura 32 uma distribuição linear de 0 até 2 no valor de  $u$  dependendo da posição  $z$ , evidenciando a correspondência entre as soluções para  $u$  nas Faces 2, 3, 4 e 5, e um resultado aproximado para  $q$ , ilustrado na Figura 33. Sob as condições de contorno impostas, a solução da Equação de Laplace fornece a superfície que une as condições de contorno.

Somando os valores dos fluxos nas Faces 1 e 6 para testar a conservação de massa ou energia no problema, foi obtido o valor de  $-4.9807 \times 10^{-04}$ , indicando um erro da ordem de  $10^{-04}$ . Esse erro está associado a descontinuidade abrupta na variação do valor do fluxo imposto como condição de contorno na junção entre as faces laterais e a base e o topo do cubo, bem como o tamanho e quantidade dos triângulos de contorno utilizados na discretização.

### 3.2.2 Cálculo do potencial e sua derivada direcional nos pontos internos ao domínio

O cálculo das incógnitas para os pontos internos é feito após a resolução do sistema de equações, em forma de pós-processamento, mediante a reaplicação da equação integral do Método dos Elementos de Contorno, sendo calculadas as matrizes  $G_{\text{int}}$  e  $H_{\text{int}}$ , para um ponto  $\xi$  do domínio do cubo, tal que,  $(0,0,0) < \xi < (1,1,1)$ , considera-se que o ponto fonte coincide com o ponto interno, assim, o coeficiente de forma é unitário. Substituindo-se os valores já conhecidos de  $u$  e  $q$ , obtém-se a equação do para pontos internos,  $u_{\text{int}}(\xi)$ , é:

$$u_{\text{int}}(\xi) = G_{\text{int}} q - H_{\text{int}} u \quad (55)$$

Para calcular os valores das derivadas direcionais do potencial, isto é, os fluxos nas direções dos eixos coordenados, é necessário aplicar uma derivada direcional ao termo  $u_{\text{int}}(\xi)$  da equação (55), obtendo-se os termos apresentados pela equação (56):

$$\begin{aligned}
 q_{\text{int}_x}(\xi) &= \frac{\partial u}{\partial x} q - \frac{\partial q}{\partial x} u \\
 q_{\text{int}_y}(\xi) &= \frac{\partial u}{\partial y} q - \frac{\partial q}{\partial y} u \\
 q_{\text{int}_z}(\xi) &= \frac{\partial u}{\partial z} q - \frac{\partial q}{\partial z} u
 \end{aligned} \tag{56}$$

Os resultados analíticos para o ponto interno com coordenadas  $\xi_{\text{int}} = (0.5, 0.5, 0.5)$ , são:  
 $u(\xi_{\text{int}}) = 1$ ,  $q_x(\xi_{\text{int}}) = 0$ ,  $q_y(\xi_{\text{int}}) = 0$  e  $q_z(\xi_{\text{int}}) = -0.2$ . Os resultados do MEC-3D para o referido ponto interno são os seguintes,

$$\begin{aligned}
 u_{\text{int}} &= 1.0095 \\
 q_{\text{int}_x} &= 0.0016 \\
 q_{\text{int}_y} &= 0.0016 \\
 q_{\text{int}_z} &= -0.2829
 \end{aligned} \tag{57}$$

apresentando um erro da ordem de  $10^{-3}$ .

#### 4 CONSIDERAÇÕES DO AUTOR

O presente trabalho teve a finalidade de apresentar as etapas de integração dos elementos de contorno de forma simples e objetiva, fazendo uso de uma aproximação linear para o caso de duas dimensões, com cada elemento sendo representado por linhas retas e, constante, no caso de três dimensões, sendo as faces do domínio representadas por elementos planos, mais precisamente, elementos triangulares.

As estruturas matemáticas desenvolvidas e apresentadas para o MEC -2D e MEC-3D, para a solução da Equação de Laplace, são de simples implementação computacional, dado que a solução da equação diferencial parcial do problema é substituída pela solução de um sistema de equação lineares, cujas matrizes do sistema são calculadas apenas uma vez e alterações nas condições de contorno requerem apenas o reposicionamento de colunas nas matrizes.

Os resultados obtidos indicaram boa aproximação entre os resultados do numéricos e as soluções analíticas para os problemas testados, evidenciando a eficiência do método, surgindo com uma alternativa numérica para solução de problemas potenciais.

Espera-se que este trabalho possa motivar o leitor no uso MEC em aplicações gerais de engenharia, como nos exemplos aplicados apresentados, e que sirva como apoio para o estudo de fenômenos regidos pela Equação de Laplace, ou que, após algum tempo, apresentem comportamento potencial em equilíbrio.

## REFERÊNCIAS

ALONSO, U. R. Foundation Exercises. São Paulo: Edgard Blucher, 1983.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. Boundary Elements An Introduction Course. Bath Press, Great Britain, 1989.

COLE, B. The Perfection of the Continuity Equation, Key to the Foundations of Reality. 2016. Disponível em: <<https://www.wired.com/2016/08/perfection-continuity-equation-key-foundations-reality/>>. Acesso em: 12 fev. 2025.

CRUZ, P. T. Brazilian Dams: Historical Cases, Building Materials, Project. São Paulo: Text Workshop, 1996.

ELETROBRAS, Power Plants of Brazil. Criteria for civil project of hydroelectric plants, Brazil, 2003.

FLORES-BERRONES, R.; ACOSTA, N. P. L. Internal erosion due to water flow through earth dams and earth structures. Institute of Engineering National University of Mexico; Mexican Institute of Water Technology, Mexico, 2011.

GREENBERG, M. D. Application of Green's Functions in Science and Engineering. Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

JESUS, J. C. PEREIRA, L. L. Computational Mathematical Modeling by the Contour Element Method for flow problems in porous media. In: XIII Brazilian Congress of Groundwater, São, SP, 2004.

LAPLACE, P. S. TRAITÉ. DE. MÉCANIQUE CÉLESTE. Paris, Imprimerie Royale 1843-1846. Série : Laplace - Œuvres. Thème : MÉCANIQUE Mécanique céleste.

LEVEQUE, R. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Philadelphia: SIAM: 2007.

LIKINS, G. Pile Testing – State of the Art. In: Seminar on Special Foundations Engineering and Geotechnics: São Paulo, Brazil, June 2015.

MEIRELLES, F. S. C. Dam safety. Module I - Dams: Legal, technical and socio-environmental aspects. Brazil, 2009.

MULLINS, G.; et al. United States Patent. Patent nº: US 6,783,273 B1. August, 2004.

MULLINS, G.; ASHMAWY, A., Factors affecting anomaly formation in drilled shafts. Final Report, FDOT Project BC353-19, 2005.

MULLINS, G.; KRANK, S., Thermal Integrity Testing of Drilled Shafts – Final Report. Florida Department of Transportation, May 2007.

MULLINS, G. Thermal Integrity Profiling of Drilled Shafts. DFI Journal. The Journal of the Deep Foundations Institute. V. 4, N. 2, December 2010.

MULLINS, G.; LIKINS, G.; BEIM, G. Thermal profiling method for assessing the integrity of cast-in-place foundations. In: XVI Brazilian Congress of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Pernambuco, Brazil, September 2012.

OLIVEIRA, J. R. S.; PETTRES, R. A thermal analysis of concrete structures performed by layers using boundary element formulation and dual reciprocity, Eng Analysis with Boundary Elements, V.150, pp 542-554, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.02.023>

PETTRES, R. Um curso introdutório ao Método dos Elementos de Contorno. V. 1, ISBN: 9798648732773, 2020.

PETTRES, R.; CIRILO, E. R. A first advective velocity study in porous media using temperature measures and boundary element formulation. Eng Anal Bound Elem; V. 121, pp. 217–32, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.10.001>

PETTRES, R.; DE LACERDA, L. A.; CARRER, J. A. M. A boundary element formulation for the heat equation with dissipative and heat generation terms. Engineering Analysis with Boundary Elements, V. 51, p. 191-198, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.11.005>

REDDY, J. An Introduction to the Finite Element Method, 3rd edition. New York: McGraw-Hill: 2005.

ROCHA, R. P. O.; PETTRES, R. Digital reconstruction of a concrete pile from temperature data and boundary element formulation. Engineering Analysis with Boundary Elements, V. 153, pp. 267-294, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.05.031>

ROGERS, D. F. Laminar Flow Analysis. Cambridge University Press, 1992.

SOUSA, D. J. S. C. Structural Embankments of Dams. A Contribution to your Hydraulic Design, Dissertation in Civil Engineering, Porto University, Portugal, 2013.

SOUZA, V. J. B. e CODA, H. B, Algoritmo de integração eficiente para o método dos elementos de contorno tridimensional. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, V. 7, N. 26, pp 97-130, 2005.

STEIN, E. R. B.; HUGHES, T. J. R. Encyclopedia of Computational Mechanics, Vol. 3: Fluids, John Wiley, 2004.

TAGUTI, Y. Método dos elementos de contorno na resolução do problema de segunda ordem em placas delgadas. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2010.

TERZAGHI, K.; PECK, R.B. Soil mechanics in engineering practice. John Wiley & Sons, New York, 2a . Ed, 1967.

VELOSO, D. A.; Lopes, F. R. Foundations: Design Criteria – Subsoil Investigation – Surface Foundations. New Ed. São Paulo: Text Workshop, 2004.

**Universidade Federal do Paraná**

Avenida Coronel Francisco Heráclito dos Santos, 100 - Centro Politécnico -  
2º andar do Edifício de Ciências Exatas - Bloco PA, Caixa Postal 19081, CEP 81531-980  
Jardim das Américas - Curitiba, Paraná, Brasil.