Funções Singulares

Definição: Chamamos de funções singulares à algumas relações entre variáveis que não atendem à definição rigorosa de função, mas que têm grande aplicação científica. São elas:

Degrau $u(t)$ $\begin{cases} u(t) = 0 & \text{para } t < 0 \\ u(t) = 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$

Obs: Também conhecido como Heaviside, como um caso particular de função degrau, ou escada

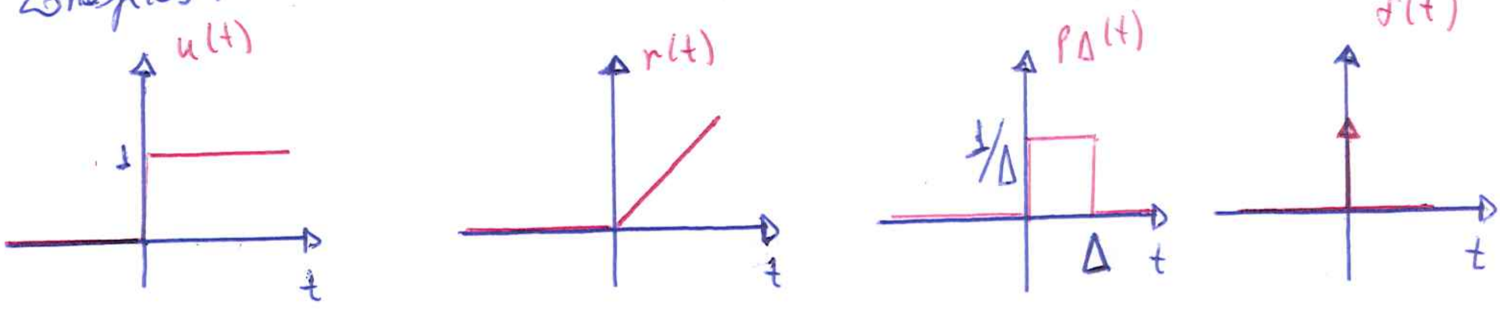
$$H(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > a \\ 0 & \text{se } x < a \end{cases}$$

Rampa $r(t)$ $\begin{cases} r(t) = 0 & \text{para } t < 0 \\ r(t) = t & \text{para } t > 0 \end{cases}$

Pulso $p_\Delta(t)$ $\begin{cases} p_\Delta(t) = 0 & \text{para } 0 > t > \Delta \\ p_\Delta(t) = \dfrac{1}{\Delta} & \text{para } 0 < t < \Delta \text{ (área unitária)} \end{cases}$

Impulso $\delta(t)$ $\left\{ \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} p_\Delta(t) \right.$

Gráficos:



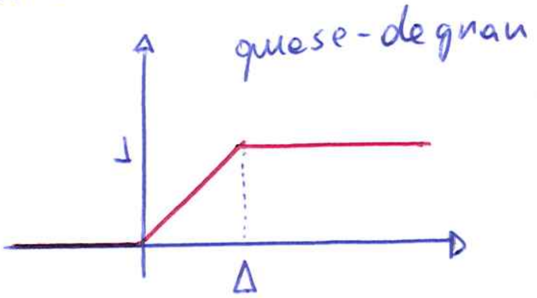
Como consequência das definições, surgem algumas propriedades relacionando derivadas e integrais de funções singulares. A derivada da rampa é o degrau:

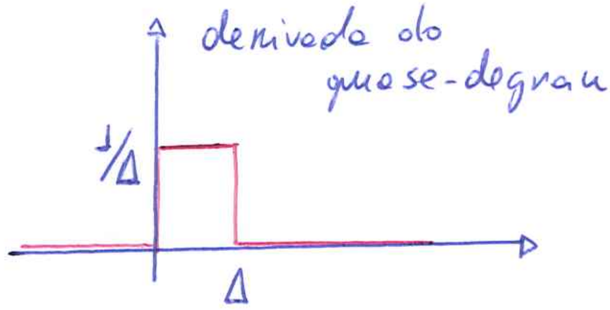
$$\frac{d}{dt} r(t) = u(t)$$

, a integral do degrau é a rampa

$$\int_{-\infty}^{t} u(t)\,dt = r(t)$$

Para calcularmos a derivada do degrau, é conveniente definir antes a função quase-degrau, como na figura a seguir:





Observe-se que a derivada do quase-degrau é o pulso. Assim, se fizermos $\Delta \to 0$, o quase-degrau se torna no degrau e o pulso tende ao impulso que passa a ser a derivada do degrau.

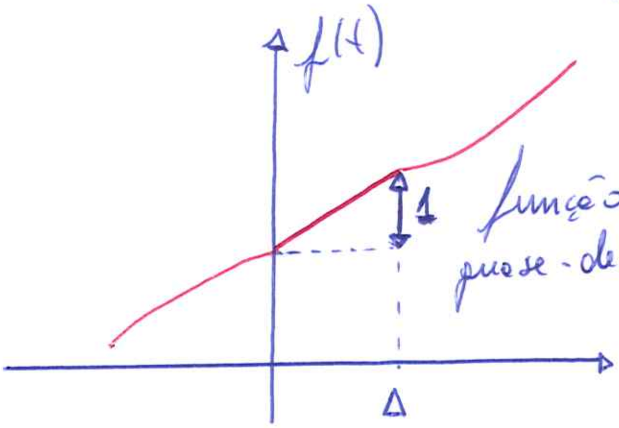
$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

, a integral do impulso é o degrau

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt = u(t)$$

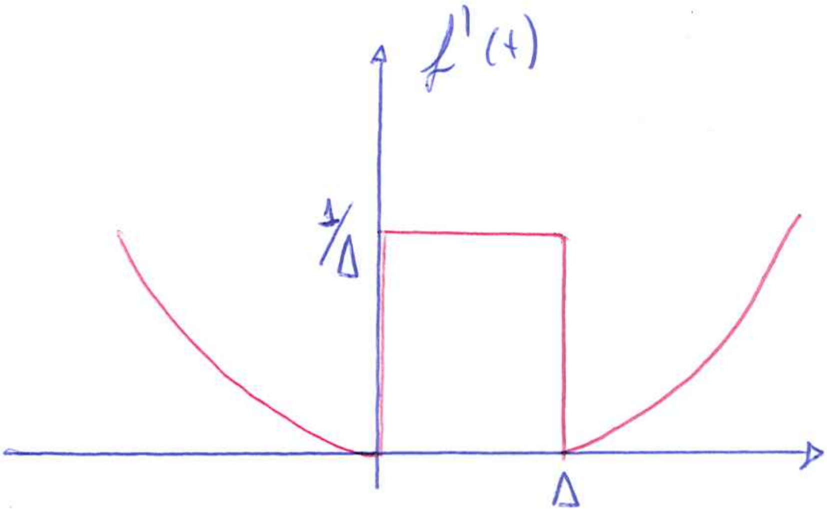
O impulso é, então, uma função singular, que tende ao infinito na origem, é nula fora da origem e tem área unitária.

A grande utilidade geométrica do conceito de impulso é que agora podemos definir a derivada de uma função descontínua. Vejamos esta ideia na função quase-descontínua da figura a seguir:

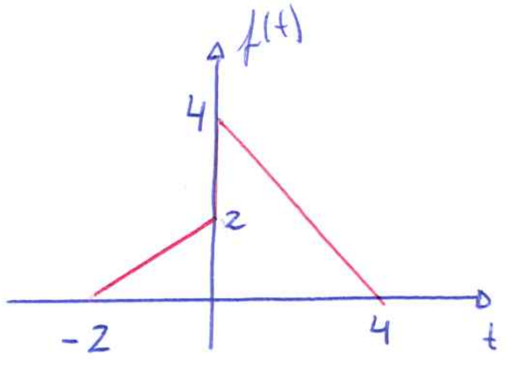


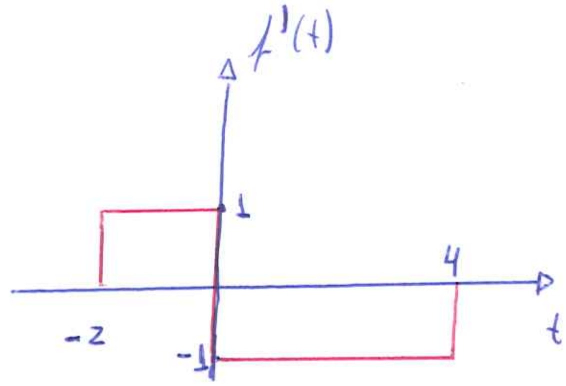
A função se tornará descontínua com um salto unitário quando Δ tender a zero.

Neste limite, temos que a derivada no salto unitário é o impulso $\delta(t)$. Caso o salto tenha valor A, o impulso terá igual área: $A\,\delta(t)$



Mais um exemplo:



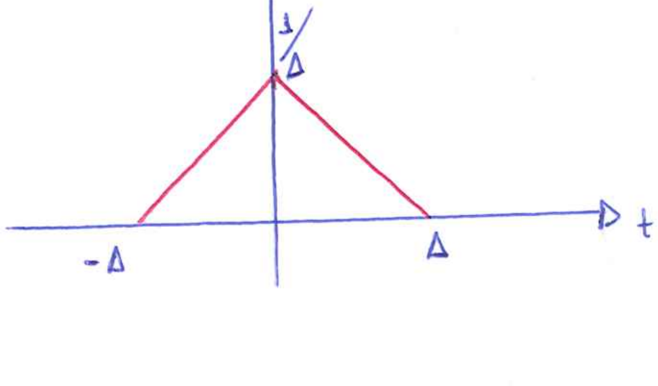


Observe que o salto é a área do impulso.

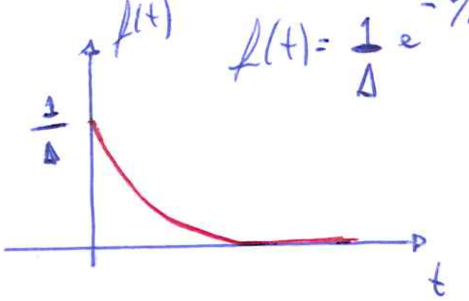
Verifica-se que a presença do impulso na derivada é fundamental, caso contrário, a integral de $f'(t)$ não resultaria em $f(t)$.

A derivada não conteria a informação sobre o salto de $f(t)$.

Há outras maneiras de visualizar o impulso. No caso do pulso triangular de área unitária, quando $\Delta \to 0$, $f(t)$ torna-se o impulso. No limite, dizemos que este impulso começa em zero menos (0^-) e termina em zero mais (0^+).



A função $f(t) = \frac{1}{\Delta} e^{-t/\Delta}$, se transforma no impulso quando Δ tende a zero. Daí, a área sob a exponencial é unitária



$$f(t) = \frac{1}{\Delta} e^{-t/\Delta}$$

$$\text{Área} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} e^{-t/\Delta} dt = -e^{-\frac{t}{\Delta}} \Big|_0^{\infty} = 1$$

Assim, quando $\Delta \to 0$, cada pulso se transforma no impulso, mantendo a área unitária. Dizemos, então, que o impulso só existe entre 0^- e 0^+, sendo nulo fora deste intervalo, resultando em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

Como consequência da existência do impulso na origem, temos que seu produto por uma função $f(t)$ ~~será~~ nulo em todos os pontos, exceto no intervalo 0^- e 0^+. Assim, o impulso captará da função apenas o seu valor na origem.

Exemplos:

$$\int_{-5}^{5} f(t)\delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} f(t)\delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} f(0)\,\delta(t)\,dt = f(0)\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt =$$

$$f(0)\cdot 1 = f(0)$$

$$\int_{-3}^{4} \ln(t+2)\,\delta(t)\,dt = \ln 2$$

$$tg(t+45^\circ)\,\delta(t) = \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\cos(t)\,\delta(t)\right] = \delta'(t)$$

Essa característica é chamada de propriedade de filtragem ou amostragem da função impulso, pois a presença do impulso pega da função apenas uma amostra que é o seu valor na origem. Outros exemplos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^2+5)\,\delta(t)\,dt = 5$$

$$\frac{d}{dt}\left[\delta(t)\ln|t+3|\right] = \delta'(t)\ln 3$$

A função degrau é útil quando queremos indicar que uma função só existe a partir de $t=0$, por exemplo a função

$$u(t)=1 \;,\; t>0$$
$$u(t)=0 \;,\; t<0$$

$$f(t)=e^{-t}u(t)$$

Só existe para valores positivos de t, sendo descontínua na origem.

Sua derivada pode ser obtida pela derivada do produto:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-t}u(t)\right]=e^{-t}\delta(t)-e^{-t}u(t)$$

Porém, a presença do impulso anula a primeira parcela, exceto na origem, o que obriga t a valer zero, nessa primeira parcela, resultando em:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-t}u(t)\right]=e^{0}\delta(t)-e^{-t}u(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t)$$

A presença do impulso mostra a variação instantânea na origem indicada pelo degrau, isto é, a derivada desta descontinuidade é infinita.

Aplicação:

O impulso pode surgir no segundo membro de uma equação diferencial, como no exemplo a seguir, onde devemos obter $y(t)$, sabendo que seu valor é nulo para tempo negativo. Nas aplicações físicas esta nulidade é devida ao sistema estar em repouso.

$$\frac{dy}{dt} + y = 3\,\delta(t)$$

Inicialmente supomos $t>0$, de modo que o impulso já não mais existe, ou seja, ele agiu entre 0^- e 0^+, deu energia ao sistema e desapareceu, resultando em:

$$\frac{dy}{dt} + y = 0$$

Buscamos a solução desta equação através de uma função y, que somada com sua derivada possa dar zero. Essa função é uma exponencial do tipo Ke^{st}, substituindo vem:

$$\frac{d}{dt}\left(Ke^{st}\right) + Ke^{st} = 0$$

$$Ks\,e^{st} + Ke^{st} = 0$$

$$K(s+1) = 0$$

$$s+1 = 0 \quad \text{, onde} \quad s = -1$$

A solução vale então:

$$y(t) = K e^{-t} \quad \text{para } t > 0.$$

Porém, para que haja $\delta(t)$ no segundo membro da equação diferencial original, é necessário uma descontinuidade na origem e o degrau dá esta informação ao cancelar tempos negativos sem perturbar os tempos positivos:

$$y(t) = K e^{-t} u(t)$$

Para obter o valor de K, basta derivar, substituir na equação diferencial original e usar a propriedade de amostragem:

$$\frac{d}{dt}\left[K e^{-t} u(t)\right] + K e^{-t} u(t) = 3\,\delta(t)$$

$$-K e^{-t} u(t) + K e^{-t} \delta(t) + K e^{-t} u(t) = 3\,\delta(t)$$

$$K e^{-t} \delta(t) = 3\,\delta(t) \qquad (\delta(t), \text{ aplicação em } f(t) \text{ para } t=0).$$

$$K\,\delta(t) = 3\,\delta(t)$$

$$K = 3$$

E a solução vale:

$$y(t) = 3 e^{-t} u(t)$$

Se a equação diferencial fosse

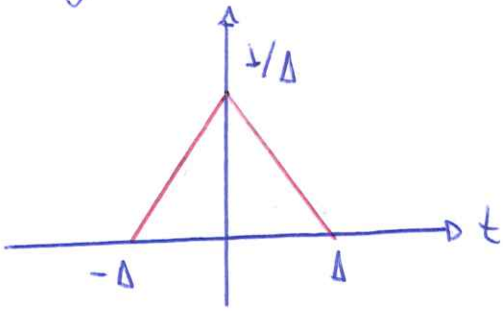
$$\frac{dy}{dt} + y = 0 \quad , \text{ sujeita a } y(0) = 4 ,$$

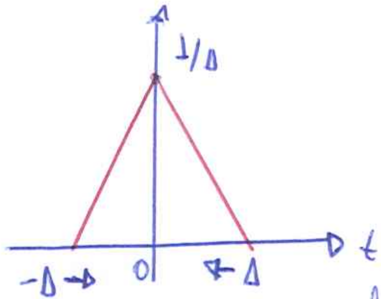
condição inicial não nula, nossa solução vale para qualquer t, inclusive t negativo, $y(t) = 4e^{-t}$, e o degrau não deve ser utilizado, já que não há descontinuidade na origem $y(0) = 4$.

A função Delta de Dirac pode ser pensada como uma função tipo impulso, atuando num certo intervalo de tempo e é fundamental para o cálculo de Função de Green, de um dado operador diferencial.

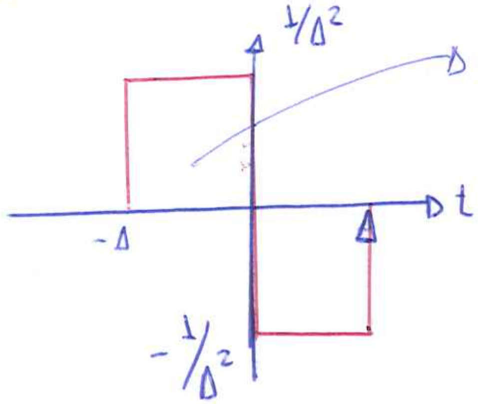
Derivada do impulso

Utilizamos como referência geométrica o pulso triangular

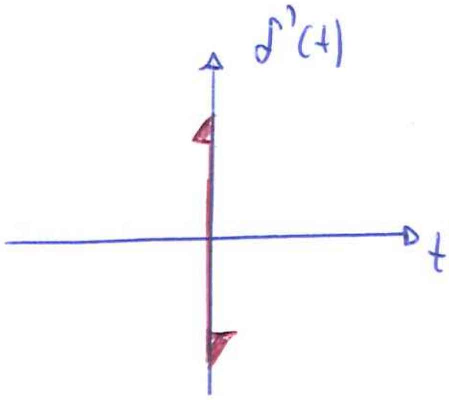




Levando ao limite quando $\Delta \to 0$, o pulso se transforma no impulso e a derivada do pulso se transforma na derivada do impulso, que é chamada de dublê.



$$\text{Área} = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \Delta = \frac{1}{\Delta}$$



Observe que não são dois impulso, já que a área de cada retângulo não é unitária, mas sim $1/\Delta$.

Suponhamos resolver a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + 3y = \delta'(t)$$

Para $t > 0$ o dublê $\delta'(t)$, que agiu entre 0^- e 0^+, já acabou e a equação vale:

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

Cuja solução é $\quad y = Ke^{-3t}$

Porém, para mostrar que $y(t)$ não existe para $t<0$, devemos multiplicar pelo degrau $u(t)$ unitário, que cancela o tempo negativo sem perturbar o tempo positivo:

$$y(t) = K e^{-3t} u(t)$$

Agora, vejamos em $t=0$. A substituição desta solução na equação original contendo o dublê mostra que a derivada gerará um impulso, mas não um dublê, como o segundo membro pede. Devemos acrescentar um impulso à solução, cuja derivada será o dublê.

Assim, ficamos:

$$y(t) = K_1 e^{-3t} u(t) + K_2 \delta(t)$$

Substituindo na equação diferencial original, vem:

$$K_1 e^{-3t} \delta(t) - 3K_1 e^{-3t} u(t) + K_2 \delta'(t) + 3K_1 e^{-3t} u(t) + 3K_2 \delta(t) = \delta'(t)$$

Simplificando e igualando os coeficientes, vem:

$$K_2 = 1$$

Aplicando a amostragem, vem

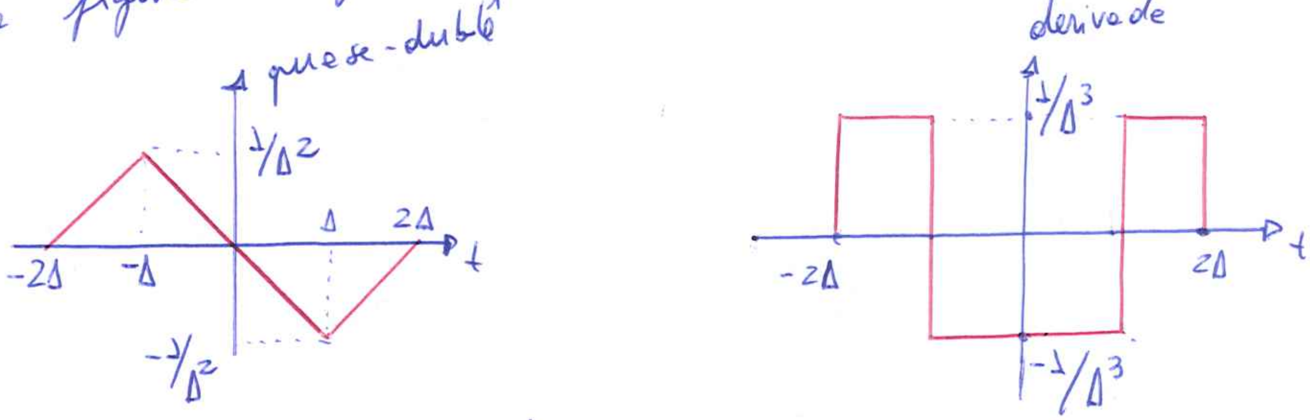
$$K_1 \delta(t) - 3K_1 e^{-3t} u(t) + \delta'(t) + 3K_1 e^{-3t} u(t) + 3\delta(t) = \delta'(t)$$

$$K_1 = -3$$

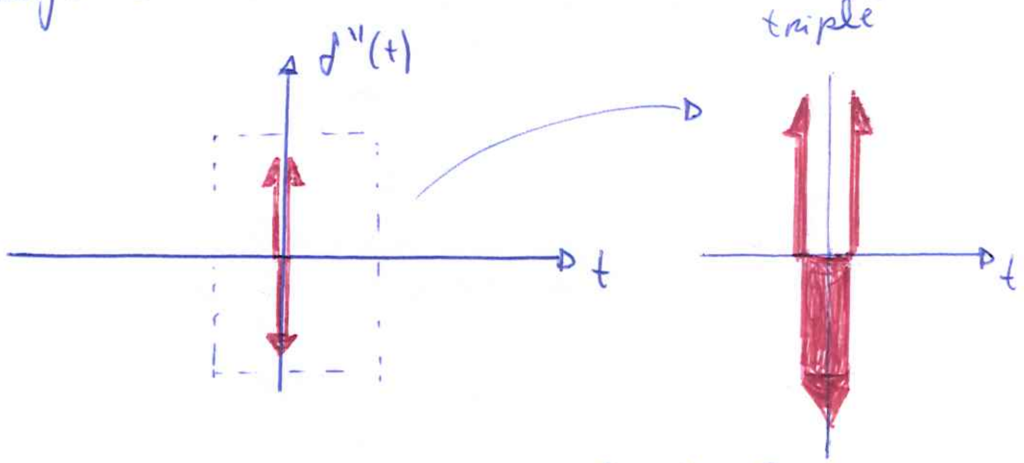
A solução resulta:

$$y(t) = -3e^{-3t} u(t) + \delta(t)$$

O raciocínio prossegue e podemos definir a derivada do dublê, que chamaremos de triplê, obtido a partir de um quase-dublê triangular e sua derivada, como na figura a seguir:



Levando ao limite quando $\Delta \to 0$, o quase-dublê se transforma no triplê cujo símbolo é $\delta''(t)$.



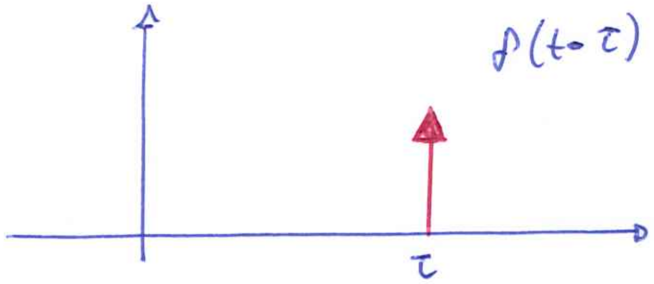
Ampliação

Assim, podemos definir a derivada de qualquer impulso, todas existindo na origem (apenas na origem), local onde está a descontinuidade do degrau. Para solucionar uma equação diferencial com derivadas do impulso, basta somar à solução funções singulares tais que permitam igualar coeficientes de iguais funções. Assim como:

$\frac{dy}{dt} - y = \delta''(t)$, em que $y = K_1 e^t u(t) + K_2 \delta(t) + K_3 \delta'(t)$, com $K_1 = 1$, $K_2 = 1$ e $K_3 = 1$, temos, $y(t) = e^t u(t) + \delta(t) + \delta'(t)$.

Convolução

O impulso pode sofrer um atraso de τ e surgir deslocado da origem, como se vê na figura:



A propriedade de amostragem passa a valer em τ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = \int_{\tau^-}^{\tau^+} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$$

Exemplo:

$$\int_{-5}^{5} e^{t}\,\delta(t-3)\,dt = \int_{3^-}^{3^+} e^{t}\,\delta(t-3)\,dt = e^{3}$$

Este conceito pode ser estendido para qualquer abscissa τ de um intervalo $\tau = 0$ até $\tau = t$ e aí uma função $f(t)$ pode ser definida pela integral:

$$f(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Essa integral é chamada de convolução da função $f(t)$ com o impulso $\delta(t)$ e seu resultado é a própria função $f(t)$.

$f(0)$ é a resposta do impulso $\delta(t)$

$f(\tau)$ é a resposta do impulso $\delta(t-\tau)$

Exemplos:

$$\int_0^t \cos\tau\, \delta(t-\tau)\, d\tau = \cos t$$

$$\int_0^t \sin\tau\, \delta(t-\tau)\, d\tau = \sin t$$

$$\int_0^t \cos\tau\, \delta(t-2-\tau)\, d\tau = \cos(t-2)$$

$$\int_0^t \cos(\tau-3)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = \cos(t-3)$$

$$\int_0^t \sin(\tau-3)\, \delta(t-2-\tau)\, d\tau = \sin(t-5)$$

$$\int_0^t \delta(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = \delta(t)$$

$$\int_0^t \delta(\tau-2)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = \delta(t-2)$$

$$\int_0^t \delta(\tau-2)\, \delta(t-3-\tau)\, d\tau = \delta(t-5)$$

No caso de dois impulsos dentro da integral, observamos o instante τ em que um deles atua, tiramos o outro para fora da integral neste instante e deixamos o primeiro, que terá área unitária em τ, ou vice-versa.

Exemplo: Calcular a resposta ao degrau, usando a integral de convolução, de um sistema cuja resposta ao impulso seja:

$$h(t) = e^{-t}$$

Solução:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} u(\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

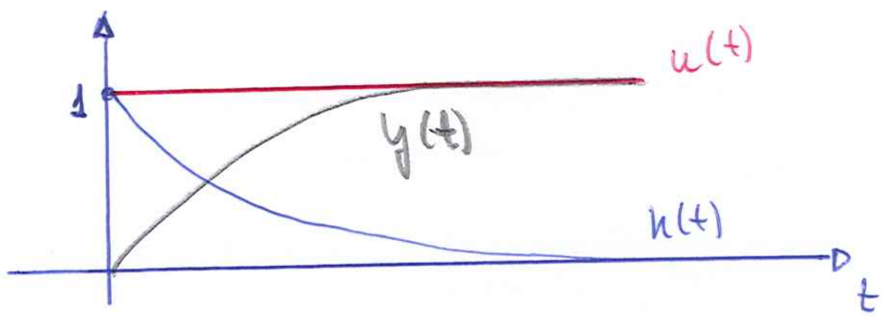
$$= \int_0^t e^{-t} e^{\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-t} \int_0^t e^{\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-t} \cdot e^{\tau} \Big|_0^t$$

$$= e^{-t} \cdot e^{t} - e^{-t} \cdot e^{0}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$



$h(t) = e^{-t}$

outra forma:

$$y(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} u(t')\, e^{-(t-t')}\, dt'$$

$$y(t) = \int_0^t u(t')\, e^{-t} \cdot e^{t'}\, dt'$$

$$y(t) = e^{-t} \int_0^t u(t')\, e^{t'}\, dt'$$

$$uv - \int v\, du$$

$u = u(t')$ $\qquad dv = e^{t'}$

$\frac{du}{dt'} = \delta(t')$ $\qquad \int dv = \int e^{t'} dt'$

$du = \delta(t')\, dt'$ $\qquad v = e^{t'}$

$$y(t) = e^{-t} \left[u(t') e^{t'} - \int_0^t e^{t'} \delta(t')\, dt' \right]$$

$$y(t) = e^{-t} \left[u(t') e^{t'} \Big|_0^t - \int_0^t e^{t'} \delta(t')\, dt' \right]$$

$$y(t) = e^{-t} \left[e^{t} - e^{0} \right]$$

$$y(t) = e^{-t} \left(-1 + e^{t} \right) \rightarrow \boxed{y(t) = 1 - e^{-t}}$$

Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{u(t)\}$$

Degrau

$$\int_0^\infty u(t)\, e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = -\frac{e^{-\infty}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-c)\}$$

$$\int_c^\infty u(t-c)\, e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_c^\infty = \frac{e^{-cs}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}$$

Impulso

$$\int_0^\infty \delta(t)\, e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \delta(t)\, e^0\,dt = \int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\}$$

$$\int_0^\infty \delta(t-c)\, e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \delta(t-c)\, e^{-cs}\,dt = e^{-cs}$$

Transformadas Inversas de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-cs}}{s}\right\} = u(t-c)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\} = \delta(t-c)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = f(t-c)\,u(t-c)$$

mais transformadas

$$\mathcal{L}\{f(t-c)\,u(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-c)\,\delta(t-c)\} = \frac{e^{-cs}}{s}F(s)$$

Determinar a solução do p.v.i:

$$x'' + 4x = 8\,\delta(t-2\pi), \qquad \begin{matrix} x(0)=3 \\ x'(0)=0 \end{matrix}$$

$$s^2X - s\,x(0) - x'(0) + 4X = 8e^{-s(2\pi)}$$

$$X(s^2+4) = 3s + 8e^{-2\pi s}$$

$$X = 3\cdot\frac{s}{s^2+4} + 8\,\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(X) = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$x(t) = 3\cos 2t + 4\,\delta(t-2\pi) * \sin 2t$$

obs: $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = H(t-a)f(t-a)$, $a = 2\pi$

$$x(t) = 3\cos 2t + H(t-2\pi)4\sin 2(t-2\pi)$$

$$x(t) = 3\cos 2t + 4H(t-2\pi)\left[\sin 2t\cos 4\pi - \sin 4\pi\cos 2t\right]$$

$$x(t) = 3\cos 2t + 4H(t-2\pi)\sin 2t$$

obs: $\displaystyle\int_0^t \sin(2t)\,\delta[t-(2\pi+\tau)]\,dt$

$$\sin 2(2\pi+\tau)\int_0^t \delta[t-(2\pi+\tau)]\,dt$$

$$(\sin(4\pi)\cos 2\tau + \sin 2\tau\cos 4\pi)\ u(t-2\pi)\Big|_0^t$$

$$\sin 2t\ u(t-2\pi)$$

Idem para:

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5) \quad , \; y(0) = 0 = y'(0)$$

$$2s^2Y - 2sy(0) - 2y'(0) + sY - y(0) + 2Y = e^{-5s}$$

$$2s^2Y - 0 - 0 + sY - 0 + 2Y = e^{-5s}$$

$$Y(2s^2 + s + 2) = e^{-5s}$$

$$Y = \frac{e^{-5s}}{2s^2+s+2}$$

completando quadrados no denominador

$$Y = \frac{e^{-5s}}{2} \cdot \frac{1}{\left[(s+1/4)^2 + 15/16\right]}$$

multiplicando e dividindo por $\sqrt{\frac{15}{16}}$

$$Y = \frac{e^{-5s}}{2} \cdot \frac{1}{\left[(s+1/4)^2 + 15/16\right]} \cdot \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{15}} e^{-5s} \frac{\sqrt{\frac{15}{16}}}{\left[(s+1/4)^2 + 15/16\right]}$$

Lembrando da transformada do seno e da translação em s, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{(s+1/4)^2+\frac{15}{16}}\right\} = e^{-\frac{t}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4} t\right)$$

Lembrando da transformada inversa da função degrau, temos

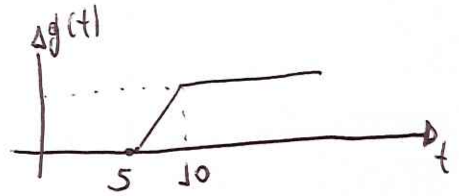
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-5s} \right\} = u(t-5)$$

Assim, a solução final é:

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}} u(t-5) e^{-\frac{(t-5)}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right)$$

$$x'' + 4x = g(t) \quad , \quad x(0) = x'(0) = 0$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le t < 5 \\ \dfrac{t-5}{5} & , \ 5 \le t < 10 \\ 1 & , \ 10 \le t \end{cases}$$



$$g(t) = 0[u(t) - u(t-5)] + \frac{(t-5)}{5}[u(t-5) - u(t-10)] + 1 \cdot u(t-10)$$

$$g(t) = \frac{(t-5)}{5}u(t-5) - \frac{(t-5)}{5}u(t-10) + u(t-10)$$

$$g(t) = \frac{(t-5)}{5}u(t-5) + u(t-10)\underbrace{\left[1 - \frac{(t-5)}{5}\right]}$$

$$\frac{5-t+5}{5} = \frac{10-t}{5} \rightarrow -\frac{(t-10)}{5}$$

$$g(t) = \frac{1}{5}\left[u(t-5)(t-5) - u(t-10)(t-10)\right]$$

$$s^2X - sx(0) - x'(0) + 4X = \frac{1}{5}\left[\frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{s^2}\right]$$

$$X = \frac{1}{5}\left[\frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{s^2(s^2+4)}\right]$$ → Detalhes de inversão →

$$x(t) = \frac{1}{5}u(t-5)\left[\frac{(t-5)}{4} - \frac{1}{8}\sin(2(t-5))\right] - \frac{1}{5}u(t-10)\left[\frac{(t-10)}{4} - \frac{1}{8}\sin(2(t-10))\right]$$

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$= t * \operatorname{sen} at$$

$$= \int_0^t (\tau - a) \sin(a\tau)\, d\tau = \frac{at - \operatorname{sen} at}{a^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{5}\left[\frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{s^2(s^2+4)}\right]$$

$$= \frac{1}{5} e^{-5s} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{5} e^{-10s} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+4}$$

$$\frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{10} e^{-5s} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2} - \frac{1}{10} e^{-10s} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{10} e^{-5s} \cdot \left[(t-5) * \sin(2t)\right] - \frac{1}{10} e^{-10s} \left[(t-10) * \sin(2t)\right]$$

$$= \frac{1}{10} u(t-5) \left[\frac{2(t-5) - \sin 2(t-5)}{4}\right] - \frac{1}{10} e^{-10s} \left[\frac{2(t-10) - \operatorname{sen} 2(t-10)}{4}\right]$$

$$= u(t-5)\left[\frac{(t-5)}{20} - \frac{\sin 2(t-5)}{40}\right] - u(t-10)\left[\frac{(t-10)}{20} - \frac{\sin 2(t-10)}{40}\right]$$