Delta de Dirac.

Fenômenos de natureza impulsiva aparecem em diversas aplicações da engenharia, física e até mesmo metabólica. Estes problemas, junto a outros de natureza estatística, podem ser modelados pela função conhecida como ***Delta de Dirac***.

Em matemática, a função delta de Dirac, também conhecida como função **δ**, é uma distribuição na reta real, a qual vale infinito no ponto zero e é nula no restante da reta. Seu análogo no domínio discreto é o **delta de Kronecker**, o qual vale 0 e 1.

O Delta de Dirac está associado a forças impulsivas que ocorrem durante a colisão de dois objetos. Ela é um força de grande magnitude e aproximadamente constante que atua no sistema por um curto período de tempo, como uma raquete batendo em uma bola de tênis, ou uma colisão atômica.

Além disso, se enfocarmos no contexto de processamento de sinais, ela é frequentemente interpretada como um impulso unitário. Pode-se pensar no Delta de Dirac como um retângulo infinitamente estreito e infinitamente alto, com área igual à unidade. Em muitos casos, pode ser encarado como o limite de funções que tendem a estas condições.

A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Considere a função

$$f_k(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{k}; & a \leq t \leq a+k \\ \\ 0; & para \quad os \quad outros \quad pontos \end{cases}$$

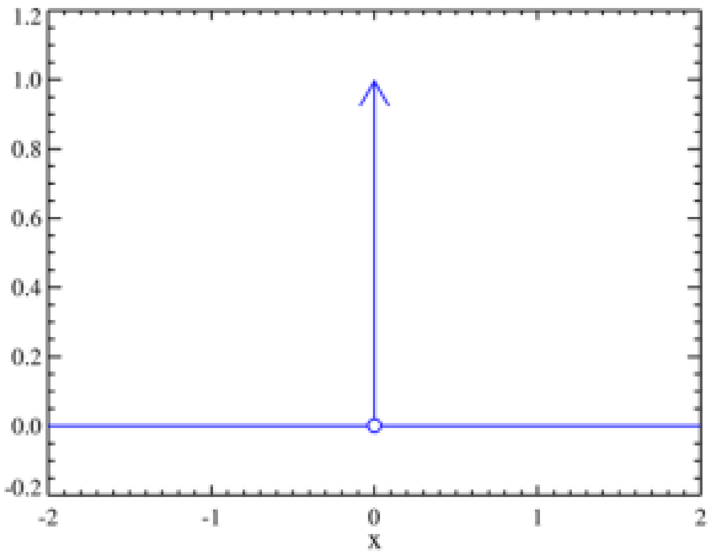
Ou seja, f_k assume um alto valor para t próximo de a, ou seja, para k próximo de 0 e assume 0 para os demais valores.

Assim, temos que

$$lim_{k\to 0} f_k(t) = \begin{cases} \infty; & t = a \\ 0; & t \neq a \end{cases}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} lim_{k\to 0} f_k(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} lim_{k\to 0} f_k(t)dt = lim_{k\to 0} \int_{a}^{a+k} \frac{1}{k}dt = 1$$



A função que satisfaz estas propriedades não é uma função no sentido das funções utilizadas no cálculo, pois do cálculo sabemos que uma função que é diferente de zero exceto em um único ponto do domínio possui integral nula. Ou seja, matematicamente, o Delta de Dirac não pode ser caracterizado propriamente como uma função, mas sim como um objeto matemático.

Este tipo de função chamada função generalizada ou distribuição, pois nos anos 1940, a controversa função de Dirac foi normalizada de maneira rigorosa pelo matemático francês Laurent Schwartz e isso gerou um ramo inteiramente novo da matemática conhecido como *teoria das distribuições*, ou *funções generalizadas*.

ESCREVENDO A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC EM TERMOS DA FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIO

Desta forma, definimos a função **Delta de Dirac**, denotada por $\delta(t-a)$, pelo limite

$$\delta(t-a) = \lim_{k \to 0} f_k(t-a),$$

ou seja, a função $\delta(t-a)$ satisfaz as propriedades enunciadas acima.

Nos problemas é conveniente tratar a função delta de Dirac como se fosse uma função usual.

Para uma função contínua $g(t)$ usamos a seguinte propriedade, conhecida como **PROPRIEDADE DA FILTRAGEM:**

$$\int_0^{\infty} g(t)\delta(t-a)dt = g(a)$$

Para obter a transformada de $\delta(t-a)$, escrevemos $f_k(t-a)$ em temos da função degrau unitário:

$$\begin{aligned} f_k(t-a) &= \begin{cases} \frac{1}{k}; & a \le t \le a+k \\ \\ 0; & para \quad os \quad outros \quad pontos \end{cases} \\ &= \frac{1}{k}\begin{cases} 0 & ; \quad t < a \\ 1 & ; \quad a \le t < a+k \\ 0 & ; \quad t \ge a+k \end{cases} \\ &= \frac{1}{k}[u(t-a) - u(t-(a+k))] \end{aligned}$$

.

A TRANSFORMADA DE LAPLACE DA FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Daí, a transformada da função delta de Dirac será dada por

$$\mathscr{L}\left(\delta(t-a)\right)=\lim_{k\to 0}\mathscr{L}\left(f_k(t-a)\right).$$

Observe que

$$\mathscr{L}\left(f_k(t-a)\right)=\frac{1}{k}\mathscr{L}\left([u(t-a)-u(t-(a+k))]\right)=\frac{1}{k}(\mathscr{L}\,[u(t-a)]-\mathscr{L}\,[u(t-(a+k)]\right)=$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{s}e^{-sa}-\frac{1}{s}e^{-s(a+k)}\right)=\frac{s^{-as}}{ks}\left(1-e^{-sk)}\right)$$

Daí,

$$\lim_{k\to 0}\mathscr{L}\left(f_k(t-a)\right)=\lim_{k\to 0}\frac{e^{-as}}{ks}\left(1-e^{-sk)}\right)$$

que pela regra de L'Hospital nos dá

$$\mathscr{L}\left(\delta(t-a)\right)=\lim_{k\to 0}\mathscr{L}\left(f_k(t-a)\right)=e^{-as}$$

Por consequência, se $a=0$ então

$$\mathscr{L}\left(\delta(t)\right)=1$$

Considere a equação

$$y" + 3y' + 2y = \delta(t-1)$$

com valores iniciais dados por $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Daí, pela transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\left(y" + 3y' + 2y\right) = \mathscr{L}(\delta(t-1))$$

$$\mathscr{L}(y") + \mathscr{L}(3y')\mathscr{L}(2y) = e^{-s}$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3Ys - y(0) + 2Y = e^{-s}$$

$$Y(s^2 + 3s + s) = e^{-s}$$

$$Y = \frac{e^{-s}}{s^2 + 3s + s}$$

$$Y = \frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)} = e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$$Y = e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right)$$

$$Y = e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)$$

Pela Transformada inversa

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)\right)$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)}\right)\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)\right)$$

$$= u(t-1)\left(\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)\right)$$

$$= u(t-1)\left(e^{(t-1)} - e^{2(t-1)}\right)$$

$$= \begin{cases} 0; & t < 1 \\ e^{(t-1)} - e^{2(t-1)}; & t \geq 1 \end{cases}$$

EXERCÍCIO 1

Vamos resolver a Transformada Inversa: $\mathscr{L}^{-1}\left[arctg\left(\frac{1}{s}\right)\right]$

Seja $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[arctg\left(\frac{1}{s}\right)\right]$, então

$$tf(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}arctg\left(\frac{1}{s}\right)\right] =- \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{s^2+1}\right].$$

Por Frações Parciais (leia mais aqui) encontramos

$$tf(t) =- \mathscr{L}^{-1}\left[1 - \frac{1}{s^2+1}\right] = sen(t) - \delta(t).$$

Portanto,

$$f(t) = \frac{sen(t) - \delta(t)}{t}.$$

EXERCÍCIO 2

Considere a equação

$$y" + 3y' + 2y = \delta(t-1)$$

com valores iniciais dados por $y(0) = 0$**e** $y'(0) = 0.$

Daí, pela transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\left(y" + 3y' + 2y\right) = \mathscr{L}(\delta(t-1))$$

$$\mathscr{L}(y") + \mathscr{L}(3y')\mathscr{L}(2y) = e^{-s}$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3Ys - y(0) + 2Y = e^{-s}$$

$$Y(s^2 + 3s + s) = e^{-s}$$

$$Y = \frac{e^{-s}}{s^2 + 3s + s}$$

$$Y = \frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)} = e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$$Y = e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right)$$

$$Y = e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)$$

Pela Transformada inversa

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)\right)$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{(s+1)}\right)\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)\right)$$

$$= u(t-1)\left(\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)\right)$$

$$= u(t-1)\left(e^{(t-1)} - e^{2(t-1)}\right)$$

$$= \begin{cases} 0; & t < 1 \\ e^{(t-1)} - e^{2(t-1)}; & t \geq 1 \end{cases}$$

EXERCÍCIO 3

Encontre a solução do P.V.I.: $y'' + 16y = 4\delta(t-\pi)$ **onde** $y(0) = -1$ **e** $y'(0) = 0$**;**

Neste caso,

$$\mathscr{L}\,(y\text{''} + 16y) = \mathscr{L}(4\delta(t-\pi)) \Rightarrow s^2Y - s + 16Y = 4e^{-\pi s}.$$

Daí,

$$Y(s^2+16) = 4e^{-\pi s} + s \Rightarrow Y(s) = \frac{4e^{-\pi s}}{(s^2+16)} + \frac{s}{(s^2+16)} =$$

$$= e^{-\pi s}\frac{4}{(s^2+16)} + \frac{s}{(s^2+16)}.$$

Desta forma, usando a linearidade da transformada inversa e o teorema da translação, encontramos

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\frac{4}{(s^2+16)}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+16)}\right) = u(t-\pi)sen(4(t-\pi)) + cos(4t).$$

EXERCÍCIO 4

Encontre a solução do P.V.I.: $y'' + 4y' + 4 = 3\delta(t-1) + \delta(t-2)$, $y(0) = 1$ **e** $y'(0) = 1.$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação encontramos:

$$s^2Y - s - 1 + 4(sY - 1) = 3e^{-s} + e^{-2s} - \frac{4}{s}$$

que nos leva a

$$Y(s) = 3e^{-s}\frac{1}{s^2+4} + e^{-2s}\frac{1}{s^2+4} - \frac{4}{s(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}.$$

Aplicando a Transformada de Laplace Inversa obtemos

$$y(t) = \frac{3}{2}u(t-1)sen(2(t-1)) + \frac{1}{2}u(t-2)sen(t-2) + 1 + \frac{1}{2}sen(2t).$$

EXERCÍCIO 5

Encontre a solução do P.V.I.: $y'' + 9y = 3\delta(t - \pi); \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$;

Considere $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Como $\mathscr{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - s$ e $\mathscr{L}\{3\delta(t - \pi)\} = 3e^{-\pi s}$, podemos tomar a Transformada de Laplace dos dois lados da equação e resolver para $Y(s)$ resultando em

$$s^2 Y - s + 9Y = 3e^{-\pi s}$$

e o que nos leva a

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+9} + e^{-\pi s}\frac{3}{s^2+9} = \mathscr{L}\{cos(3t)\} + e^{-\pi s}\mathscr{L}\{sen(3t)\}$$

Usando a propriedade de translação para determinar a transformação de Laplace Inversa de $Y(s)$, achamos

$$y(t) = cos(3t) + [sen(3[t - \pi])]\, u(t - \pi).$$

OBS: Este P.V.I. está ligada ao problema de uma mola presa, liberada do repouso 1 m abaixo da posição de equilíbrio para o sistema massa-mola e começa a vibrar. Depois de π segundos, a massa é atingida por um martelo exercendo sobre ela um impulso.