

4.3 A função de Heaviside

A **função de Heaviside** ou **função degrau unitário** é nula para argumento negativo e vale 1 para argumento positivo. Quando o argumento é zero a função não precisa estar definida (ou pode-se definir qualquer valor, dependendo do contexto, por exemplo $1/2$). Observe que esta é uma função contínua por partes:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

A função de Heaviside com descontinuidade em $t = a$ é da forma

$$u(t - a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a. \end{cases} \quad (4.35)$$

A figura 4.3 apresenta os gráficos de $u(t)$ e $u(t - a)$ para $a > 0$. Observe que a

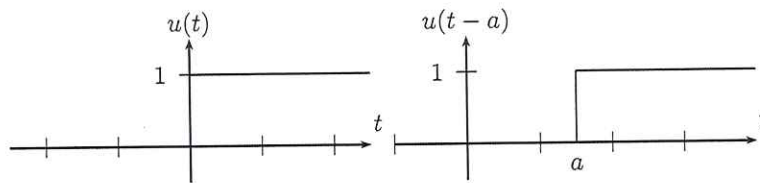


Figura 4.3:

representação gráfica em $t = a$ não está com o rigor matemático para funções, pois deveria estar esboçado bolinhas abertas indicando que em $t = a$ a função não está definida. Esse tipo de representação gráfico é usado no contexto de transformada de Laplace. Quando realmente for necessário definir uma transição em $t = 0$, toma-se uma aproximação linear e contínua para a função de Heaviside, chamada de **função rampa**:

$$g_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon}t + \frac{1}{2}, & -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 1, & t > \epsilon, \end{cases} \quad (4.36)$$

para $\epsilon \ll 1$. A figura 4.4 ilustra o gráfico de $g_\epsilon(t)$ para $\epsilon = 1/2$. A função de Heaviside é o limite de $g_\epsilon(t)$ se $t \neq 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(t) = u(t), \quad t \neq 0. \quad (4.37)$$

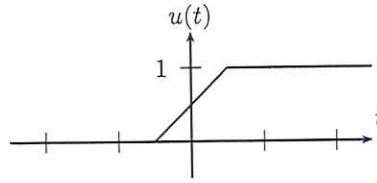


Figura 4.4:

Uma função importante em aplicações é a **função pulso**, definida por:

$$f_p(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & a < t < b \\ 0, & t > b, \end{cases} \quad (4.38)$$

com $a < b$. A figura 4.5 apresenta uma representação gráfica para a função pulso. A

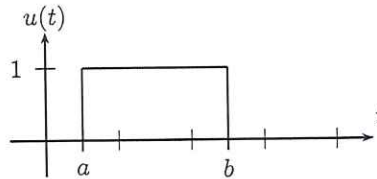


Figura 4.5:

função pulso normalmente é representada em termos da diferença de duas função de Heaviside:

$$f_p(t) = u(t - a) - u(t - b), \quad a < b. \quad (4.39)$$

A função pulso geralmente indica uma chave “liga-desliga”. Por exemplo, o produto $f_p(t)f(t)$ significa que f estava “desligada” para $t < a$, f foi “ligada” em $t = a$ e “desligada” em $t = b$. Analogamente, o produto $u(t - a)f(t)$ indica que a função foi ligada em $t = a$. Observe o gráfico de $u(t - 1) \text{ sen}(t)$ na figura 4.6.

Exemplo 4.3.1. Representar algebricamente em termos da função de Heaviside a função dada no gráfico da figura 4.7. Observe que podemos representar $f(t)$ da

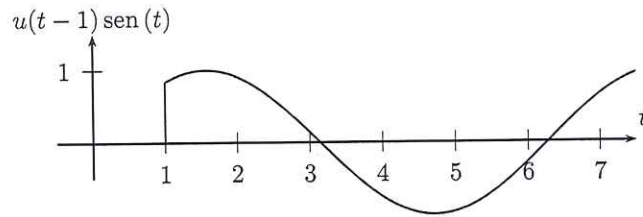
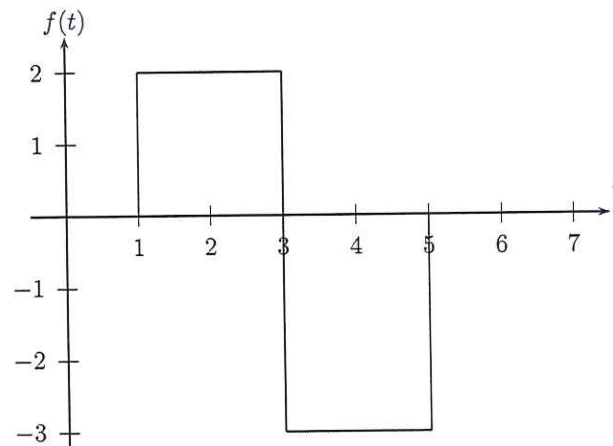
Figura 4.6: Gráfico da função $u(t-1)\text{sen}(t)$.

Figura 4.7:

seguinte forma:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 2, & 1 < t < 3 \\ -3, & 3 < t < 5 \\ 0, & t > 5. \end{cases} \quad (4.40)$$

Para representar em termos da função de Heaviside, olhe para o gráfico pensando em dois pulsos: $2(u(t-1) - u(t-3))$ e $-3(u(t-3) - u(t-5))$. A soma deles é a função desejada:

$$f(t) = 2(u(t-1) - u(t-3)) - 3(u(t-3) - u(t-5)). \quad (4.41)$$

A transformada de Laplace da função de Heaviside é obtida direto da definição.

Primeiro considere $a \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(t-a)\} &= \int_0^{\infty} u(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Se $a < 0$, então

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}.\tag{4.43}$$

Exercícios

E 4.3.1. Esboce o gráfico da função $f(t) = (u(t) - u(t - 2\pi)) \operatorname{sen}(t)$.

E 4.3.2. Escreva uma expressão em termos da função de Heaviside para a função dada no gráfico 4.8.

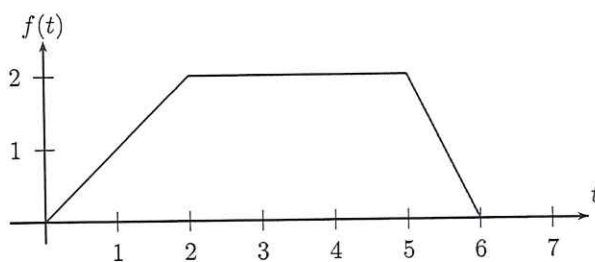


Figura 4.8:

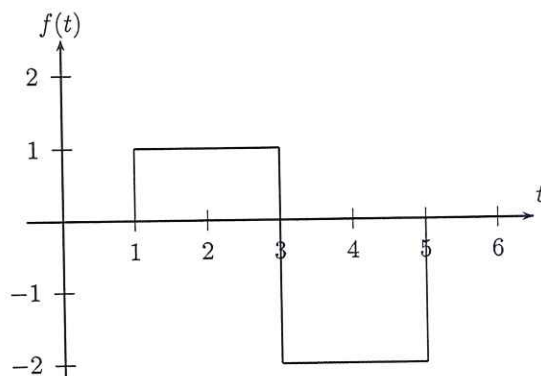
E 4.3.3. Esboce o gráfico das seguintes funções:

- $(t - \pi)u(t - \pi)$
- $t u(t - 2)$
- $(\operatorname{sen} t)u(t - \pi)$
- $f(t) = u(t - 1) + 3u(t - 3) - 4u(t - 5)$
- $f(t) = tu(t) + (t^2 - t)u(t - 1) + (6 - t - t^2)u(t - 2) + (t - 6)u(t - 6)$
- $f(t) = [u(t) + u(t - 1)]^2$

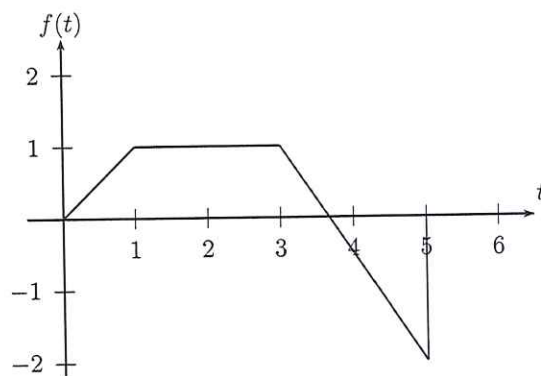
$$g) f(t) = u(t - 1) [1 - u(t - 2)]$$

E 4.3.4. Escreva uma expressão para cada função em termos da função de Heaviside.

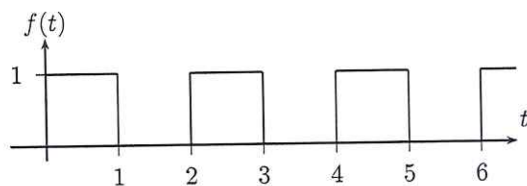
a)



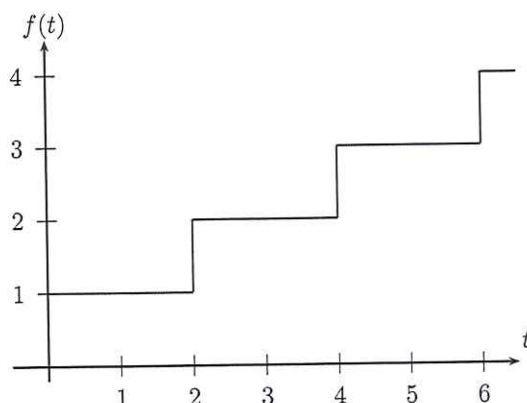
b)



c)



d)



4.4 Propriedade do deslocamento no eixo t

Teorema 4.4.1. (Propriedade do deslocamento no eixo t) Se $F(s)$ é a transformada de $f(t)$, então $f(t-a)u(t-a)$ é a transformada inversa de $e^{-as}F(s)$, isto é

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad a > 0 \quad (4.44)$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a), \quad a > 0. \quad (4.45)$$

Demonstração. Aplicamos a definição da transformada de Laplace e obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^a u(t-a)f(t-a)e^{-st} dt + \int_a^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt, \end{aligned}$$

pois $u(t-a)$ é zero no intervalo $[0, a)$ e um no intervalo (a, ∞) . Depois usamos a mudança de variável $v = t - a$ na última integral:

$$\int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(v)e^{-s(v+a)} dv = e^{-as} \int_0^{\infty} f(v)e^{-sv} dv.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s). \quad (4.46)$$

□

Observe que tomando $f(t) = 1$ na propriedade 4.4.1, temos:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad a > 0 \quad (4.47)$$

que coincide com a fórmula calculada na equação (4.42). Quando $a = 0$ na equação (4.47), recaímos no item 1 da tabela A.1.

Exemplo 4.4.1. Aplicando diretamente a propriedade 4.4.1 e usando que $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$, calculamos a transformada inversa de Laplace de $e^{-3s} \frac{2}{s^3}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s} \frac{2}{s^3}\right\} = u(t-3)(t-3)^2. \quad (4.48)$$

Exemplo 4.4.2. Vamos calcular a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = e^{-s} \frac{1}{(s+1)^2 - 1}. \quad (4.49)$$

Primeiro calculamos a transformada de $\frac{1}{(s+1)^2 - 1}$ usando a propriedade 4.1.1

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 - 1}\right\} = e^{-t} \sinh(t). \quad (4.50)$$

Depois usamos a propriedade 4.4.1 para concluir

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \frac{1}{(s+1)^2 - 1}\right\} = u(t-1) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 - 1}\right\} = u(t-1) e^{-(t-1)} \sinh(t-1). \quad (4.51)$$

Exercícios

E 4.4.1. Use a propriedade 4.4.1, calcule a transformada inversa de Laplace e esboce um gráfico para cada item:

a) $G(s) = e^{-2s} \frac{s}{s^2+4}$

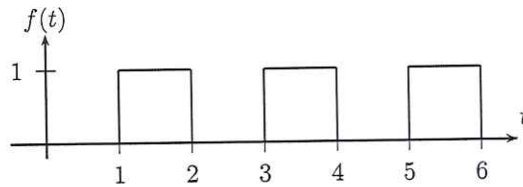
b) $G(s) = e^{-s} \frac{1}{s^2} - 3e^{-3s} \frac{1}{s^2}$

E 4.4.2. Calcule a transformada de Laplace para cada item do exercício 4.3.3.

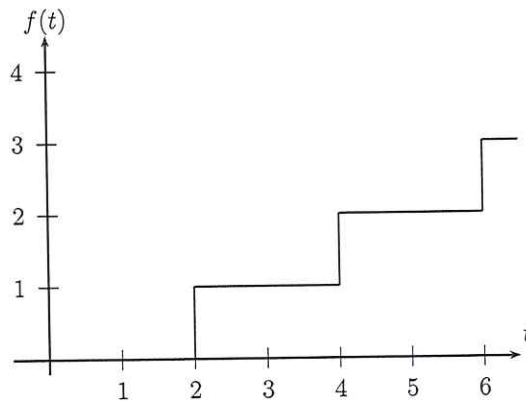
E 4.4.3. Calcule a transformada de Laplace para cada item do exercício 4.3.4.

E 4.4.4. Use os itens c) e d) do exercício 4.3.4 e a propriedade da translação no eixo t para calcular a transformada de Laplace das seguintes funções:

a)



b)



E 4.4.5. Use as propriedades de translação e a tabela de transformadas para calcular as transformadas inversa de Laplace da função $F(s)$:

a) $F(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$

b) $F(s) = \frac{2s - 2}{(s^2 - 2s + 5)(s^2 - 2s + 10)}$

c) $F(s) = \frac{2e^{-4s}}{s^2 - 4}$

d) $F(s) = 2 \frac{e^{-2s}}{(s - 3)(s - 1)}$

e) $F(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5} e^{-s}$

$$f) F(s) = \frac{2s - 2}{(s^2 - 2s + 5)(s^2 - 2s + 10)} e^{-3s}$$

E 4.4.6. Esboce o gráfico e calcule a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t) = tu(t - 1)$

b) $f(t) = t^2u(t - 1)$

E 4.4.7. Mostre que:

a) $\mathcal{L}\{\cosh(at) \operatorname{sen}(at)\} = \frac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

b) $\mathcal{L}\{\sinh(at) \cos(at)\} = \frac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

c) $\mathcal{L}\{\sinh(at) \operatorname{sen}(at)\} = \frac{2a^2s}{s^4 + 4a^4}$

A partir destas, mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 + 4a^4}\right\} = \frac{1}{4a^3} [\cosh(at) \operatorname{sen}(at) - \sinh(at) \cos(at)]. \quad (4.52)$$

E 4.4.8. Encontre a transformada inversa das funções $F(s)$ abaixo:

a) $\frac{n\pi}{(s+2)^2 + n^2\pi^2}$

b) $\frac{s}{(s+3)^2 + 1}$

c) $\frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20}$

d) $\frac{4s + 12}{s^2 + 8s + 16}$

E 4.4.9. Encontre $g(t)$ e faça um esboço de seu gráfico, sendo $\mathcal{L}\{g(t)\}$ igual a:

a) $\frac{2e^{-2s} - 2e^{-4s}}{s}$

- b) $\frac{e^{-as}}{s^2}$
- c) $\frac{se^{-\pi s}}{s^2 + 4}$
- d) $\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$
- e) $\frac{e^{-s} + e^{-2s} - 3e^{-3s} + 6e^{-6s}}{s^2}$

4.5 A propriedade da transformada de Laplace da integral de uma função

Teorema 4.5.1. (*Propriedade da transformada da integral*) Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de uma função contínua por partes $f(t)$, então $\int_0^t f(\tau)d\tau$ é a transformada inversa de $\frac{1}{s}F(s)$, isto é

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s), \quad (4.53)$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau. \quad (4.54)$$

Demonstração. Seja $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Então $g'(t) = f(t)$. Aplicamos a propriedade da transformada da derivada 3.2.1 e temos:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0). \quad (4.55)$$

Usando o fato que $g(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} &= \mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{g'(t)\} \\ &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= \frac{1}{s}F(s). \end{aligned}$$

□

Essa propriedade será útil na aplicação de um circuito RC discutido na seção 4.6.

4.6. APLICAÇÃO: CIRCUITO RC A UM PULSO DE AMPLITUDE V_0

Exercícios

E 4.5.1. Use a propriedade da transformada da integral para calcular $f(t)$ sabendo que $\mathcal{L}\{f\}$ é:

a) $\frac{5}{s^3 - 5s}$

b) $\frac{10}{s^3 - \pi s^2}$

c) $\frac{1}{s^4 + s^2}$

4.6 Aplicação: circuito RC a um pulso de amplitude V_0 .

Considere o circuito Resistor/Capacitor representado na figura 4.9 com uma tensão $V(t)$ aplicada do tipo pulso,

$$V(t) = V_0 (u(t - a) - u(t - b)). \quad (4.56)$$

ou seja, o circuito estava em repouso até $t = a$ e foi aplicada a tensão V_0 entre $t = a$ e $t = b$. O modelo para a corrente $i(t)$ obedece a lei de Kirchoff:

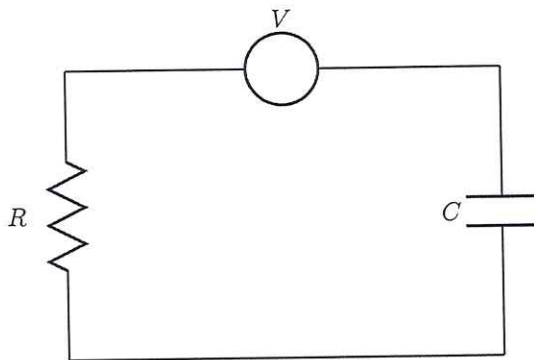


Figura 4.9:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = V(t), \quad (4.57)$$

onde $q(t)$ é a carga no capacitor, $\frac{1}{C}q(t)$ é a tensão no capacitor de capacitância C e $Ri(t)$ é a tensão no resistor de resistência R . Usando o fato que $q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau$, obtemos uma equação integral para $i(t)$:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau)d\tau = V_0 (u(t-a) - u(t-b)). \quad (4.58)$$

Para resolver esse problema de valor inicial, aplicamos a transformada de Laplace na equação acima e usamos a propriedade 4.5.1:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} + \frac{1}{sRC} \mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{V_0}{Rs} (e^{-as} - e^{-bs}), \quad (4.59)$$

ou seja, obtemos a seguinte equação subsidiária:

$$sI(s) + \frac{1}{RC}I(s) = \frac{V_0}{R} (e^{-as} - e^{-bs}), \quad (4.60)$$

onde $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$. Logo,

$$I(s) = \frac{V_0C}{RCs+1} (e^{-as} - e^{-bs}) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} (e^{-as} - e^{-bs}). \quad (4.61)$$

O item 7 da tabela de transformadas A.1 nos dá $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-d}\right\} = e^{dt}$. Tome $d = -\frac{1}{RC}$ e obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.62)$$

Agora, usamos a propriedade 4.4.1 do deslocamento no eixo t para calcular a função corrente:

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{V_0}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} (e^{-as} - e^{-bs})\right\} \\ &= \frac{V_0}{R} \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} e^{-as}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} e^{-bs}\right\} \right] \\ &= \frac{V_0}{R} \left[u(t-a)e^{-\frac{(t-a)}{RC}} - u(t-b)e^{-\frac{(t-b)}{RC}} \right] \\ &= \frac{V_0}{R} \left[u(t-a)e^{-\frac{a}{RC}} - u(t-b)e^{-\frac{b}{RC}} \right] e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned}$$

Olhando numa notação de função definida por partes, podemos escrever

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ Ae^{-\frac{t}{RC}}, & a < t < b, \\ (A-B)e^{-\frac{t}{RC}}, & t > b, \end{cases} \quad (4.63)$$

4.6. APLICAÇÃO: CIRCUITO RC A UM PULSO DE AMPLITUDE V_0

onde

$$A = \frac{V_0}{R} e^{\frac{a}{RC}} \quad \text{e} \quad B = \frac{V_0}{R} e^{\frac{b}{RC}}. \quad (4.64)$$

Observe que $A > 0$, $B > 0$ e $A < B$, ou seja, para $t > b$ a corrente é negativa e se aproxima exponencialmente de zero. Essa é a chamada corrente de descarga. A figura 4.10 apresenta um gráfico da corrente quando $a = 0.5$, $b = 2$, $R = 1\Omega$, $C = 1\text{ F}$ e $V_0 = 3\text{ V}$.

Para obter a carga no capacitor usamos $q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$ e obtemos a seguinte expressão:

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t-a}{RC}}\right), & a < t < b, \\ CV_0 \left(e^{-\frac{t-b}{RC}} - e^{-\frac{t-a}{RC}}\right), & t > b, \end{cases} \quad (4.65)$$

A figura 4.11 apresenta um gráfico da carga quando $a = 0.5$, $b = 2$, $R = 1\Omega$, $C = 1\text{ F}$ e $V_0 = 3\text{ V}$. Observe a consistência com o gráfico da figura 4.10.

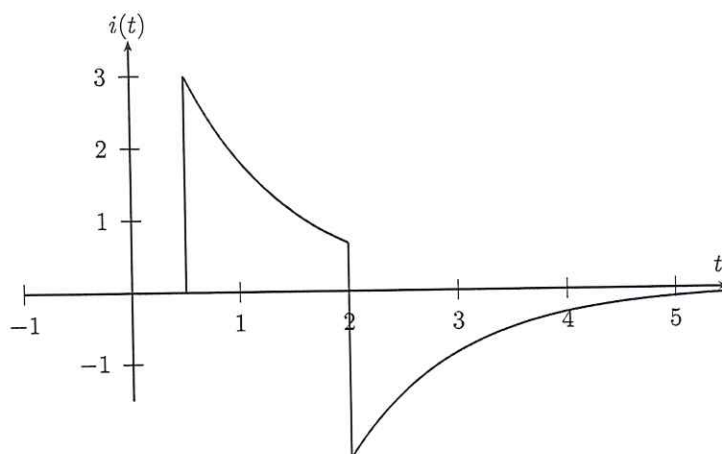


Figura 4.10:

Exercícios

E 4.6.1. Use as equações (4.57) $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ para obter uma equação diferencial ordinária para a carga $q(t)$. Depois resolva-o usando transformada de Laplace e obtenha a solução (4.65).

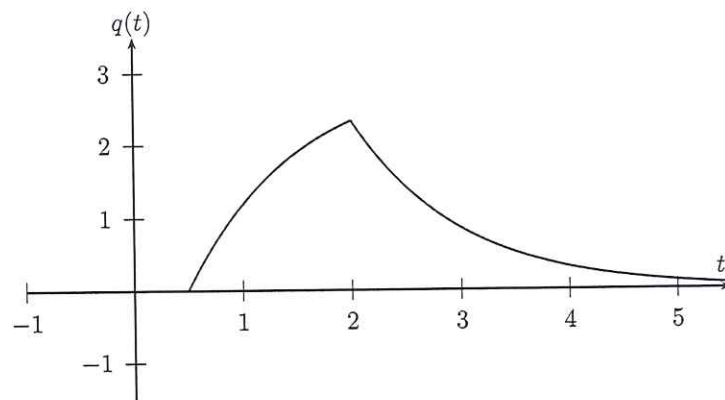


Figura 4.11:

Capítulo 5

A função Delta de Dirac e a propriedade da convolução

5.1 A função Delta de Dirac

Muitos fenômenos físicos exigem a representação de uma força muito grande em um intervalo de tempo muito pequeno, por exemplo:

- um circuito elétrico recebe uma força eletromotriz grande em um curto intervalo de tempo.
- um sistema massa-mola é atingido por uma martelo.
- uma bola de futebol parada recebe um chute, ou seja, uma força quase instantânea, que a coloca em movimento.
- um avião é atingido por um raio.

Para representar essa força, vamos tomar a função pulso unitário em um curto intervalo de tempo $[-\epsilon, \epsilon]$ em torno da origem, isto é, um pulso com integral unitária:

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon} (u(t + \epsilon) - u(t - \epsilon)) = \begin{cases} 0, & t < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon}, & -\epsilon < t < \epsilon \\ 0, & t > \epsilon. \end{cases} \quad (5.1)$$

Um pulso unitário em torno de $t = a$ é representado por

$$\delta_\epsilon(t - a) = \frac{1}{2\epsilon} (u(t - (a - \epsilon)) - u(t - (a + \epsilon))) = \begin{cases} 0, & t < a - \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon}, & a - \epsilon < t < a + \epsilon \\ 0, & t > a + \epsilon. \end{cases} \quad (5.2)$$

Observe que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(t - a) = 1$ para qualquer $\epsilon > 0$. A figura 5.1 apresenta o gráfico de $\delta_{\epsilon}(t - a)$ para $a > 0$ e $\epsilon = 1$, $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$, $\epsilon = \frac{1}{8}$ e $\epsilon = \frac{1}{12}$. A função que representa uma grande força instantânea é chamada de **função impulso** ou **função Delta de Dirac** e pode ser definida pelo limite das funções pulsos:

$$\delta(t - a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t - a). \quad (5.3)$$

Este limite não pode ser interpretado pontualmente, isto é, como o limite usual de funções reais, mas apenas no contexto de uma integral, como veremos. A figura 5.1 apresenta o gráfico de $\delta_{\epsilon}(t - a)$ quando ϵ diminui e uma representação gráfica para $\delta(t - a)$.

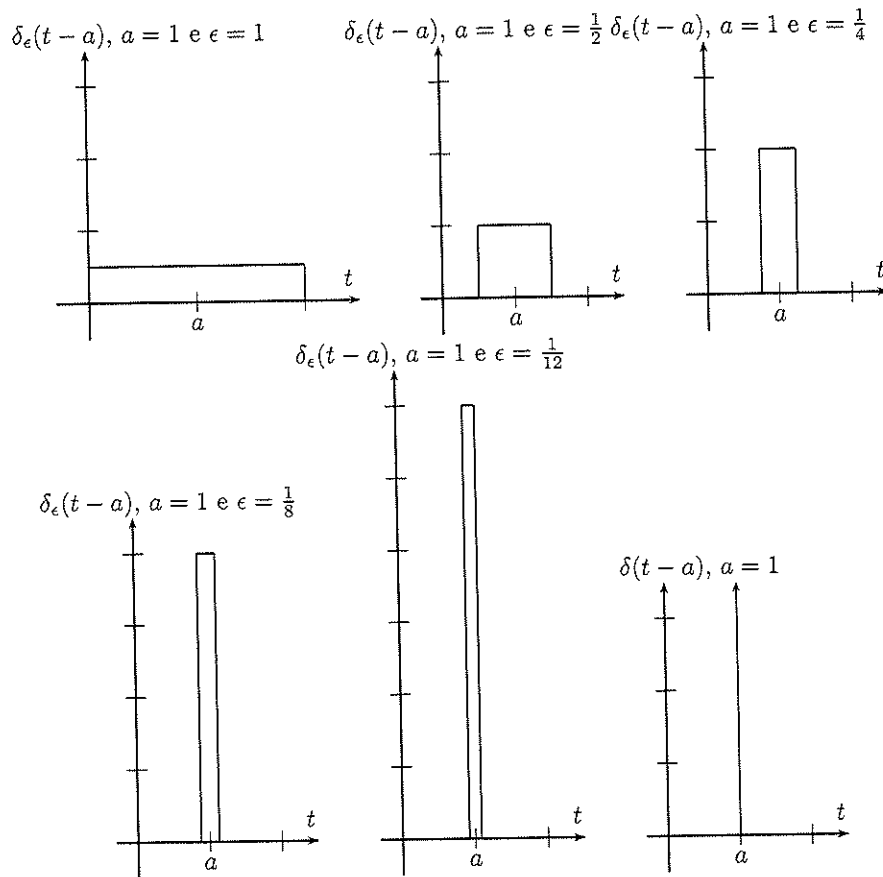


Figura 5.1:

Observação 5.1.1. A função delta de Dirac pode ser definida como limite de outras sequências de funções com propriedades análogas a sequência de pulsos.

Por exemplo, podemos definir $\delta(t)$ como limite das funções

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\epsilon^2}} \quad (5.4)$$

A função Impulso é zero em todo ponto, exceto em $t = a$:

$$\delta(t - a) = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases} \quad (5.5)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1 \quad (5.6)$$

A função Delta de Dirac deve ser sempre compreendida como o limite de funções reais no contexto de uma integração, isto conduz à chamada **propriedade da filtragem**, que define totalmente a Delta da Dirac: Se $f(t)$ for um função contínua em torno de $t = a$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt = f(a). \quad (5.7)$$

Para chegar a esta conclusão, definimos $F(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$ e calculamos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t - a) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(t) dt \\ &= \frac{F(\epsilon) - F(-\epsilon)}{2\epsilon} \\ &= F'(0) = f(a). \end{aligned}$$

5.1.1 Delta de Dirac como derivada distribucional da função Heaviside

Na equação (5.2) definimos a função Delta de Dirac como

$$\delta(t - a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} (u(t - (a - \epsilon)) - u(t - (a + \epsilon))). \quad (5.8)$$

Por outro lado, usamos a definição de derivada para escrever

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} (u((t - a) + \epsilon) - u((t - a) - \epsilon)) = \frac{d}{dt} u(t - a) \quad (5.9)$$

ou seja,

$$\delta(t - a) = \frac{d}{dt}u(t - a). \quad (5.10)$$

Observe que as funções de Heaviside e de Dirac não são funções no sentido do cálculo diferencial e integral. Naturalmente, a derivada acima também vale somente num sentido generalizado, mas é coerente quando olhamos a função de Heaviside como limite de funções rampas (ver figura 4.4), pois na origem a derivada tende ao infinito. A transformada de Laplace de função Delta de Dirac é obtido pela propriedade da filtragem dada na equação (5.7):

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - a)e^{-st} dt = e^{-as}. \quad (5.11)$$

Exercícios

E 5.1.1. Encontre

a) $\mathcal{L}\{tu(t - 1) + t^2\delta(t - 1)\}$

b) $\mathcal{L}\{(\cos t)(\ln t)\delta(t - \pi)\}$

c) $\mathcal{L}\{\delta(t - 1)e^t\}$

E 5.1.2. Considere as funções $f_\varepsilon(t)$ e $g_\varepsilon(t)$ dadas por

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\varepsilon^2}, & 0 \leq t < \varepsilon \\ \frac{2\varepsilon - t}{\varepsilon^2}, & \varepsilon \leq t < 2\varepsilon \\ 0, & t \geq 2\varepsilon \end{cases}$$

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}, & 0 \leq t < \varepsilon \\ -\frac{1}{\varepsilon^2}, & \varepsilon < t < 2\varepsilon \\ 0, & t > 2\varepsilon \end{cases}$$

onde ε é um parâmetro positivo.

- a) Esboce sob o mesmo plano cartesiano o gráfico da função f_ε para $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Faça o mesmo em outro plano cartesiano para a função $g_\varepsilon(t)$. Lembre de indicar os eixos e pontos notáveis (ex. pontos de zero e máximo)
- b) Calcule as transformada de Laplace, $F_\varepsilon(s) = \mathcal{L}\{f_\varepsilon(t)\}$ e $G_\varepsilon(s) = \mathcal{L}\{g_\varepsilon(t)\}$. Aqui ε é um parâmetro positivo genérico.
- c) Estude o comportamento das funções $f_\varepsilon(t)$, $g_\varepsilon(t)$, $F_\varepsilon(s)$ e $G_\varepsilon(s)$ no limite $\varepsilon \rightarrow 0+$. Discuta os resultados obtidos analisando as função no domínio tempo e no domínio frequência (s). Qual a relação que se observa entre $f_\varepsilon(t)$ e $g_\varepsilon(t)$ e entre suas transformadas de Laplace?

5.2 Aplicação: circuito RLC

Considere o circuito Resistor/Capacitor/Indutor representado na figura 5.2 com uma tensão $V(t)$ aplicada do tipo pulso,

$$V(t) = V_0 (u(t - a) - u(t - b)). \quad (5.12)$$

O modelo para a corrente $i(t)$ obedece a lei de Kirchoff:

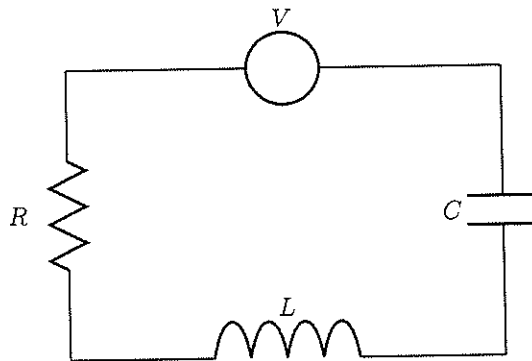


Figura 5.2:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = V_0 (u(t - a) - u(t - b)), \quad (5.13)$$

onde $q(t)$ é a carga no capacitor, $\frac{1}{C}q(t)$ é a tensão no capacitor de capacitância C , $Ri(t)$ é a tensão no resistor de resistência R e $Li'(t)$ é a tensão no indutor

de indutância L . Considere as condições iniciais $i(0) = 0$ e $q(0) = 0$. Dado que $\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$, derivamos a equação (5.13) para obter a seguinte equação diferencial:

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = V_0(\delta(t-a) - \delta(t-b)), \quad (5.14)$$

onde usamos que a derivada da função de Heaviside é a função delta de Dirac. As condições iniciais para a equação (5.14) são $i'(0) = 0$ e $i(0) = 0$. Com o objetivo de resolver a problema de valor inicial, aplicamos a transformada de Laplace para obter a equação subsidiária

$$Ls^2I(s) + RsI(s) + \frac{1}{C}I(s) = V_0(e^{-as} - e^{-bs}),$$

que tem solução

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V_0(e^{-as} - e^{-bs})}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \\ &= \frac{1}{L} \frac{V_0(e^{-as} - e^{-bs})}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{V_0}{L} \left[\frac{e^{-as}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \eta} - \frac{e^{-bs}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \eta} \right] \end{aligned}$$

onde

$$\eta = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2. \quad (5.15)$$

Vamos exemplificar os casos subamortecido, superamortecido e criticamente amortecido tomando $V_0 = 10V$, $a = 1$ e $b = 5$:

- Caso subamortecido ($\eta > 0$): escolhemos o caso onde $L = 1$ H, $C = \frac{1}{10}$ F e $R = 2\Omega$. Nesse caso

$$I(s) = 10 \left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2 + 9} - \frac{e^{-5s}}{(s+1)^2 + 9} \right]. \quad (5.16)$$

Logo,

$$i(t) = \frac{10}{3} \left(u(t-1)e^{-(t-1)} \operatorname{sen}(3(t-1)) - u(t-5)e^{-(t-5)} \operatorname{sen}(3(t-5)) \right). \quad (5.17)$$

O gráfico da corrente é apresentado na figura 5.3.

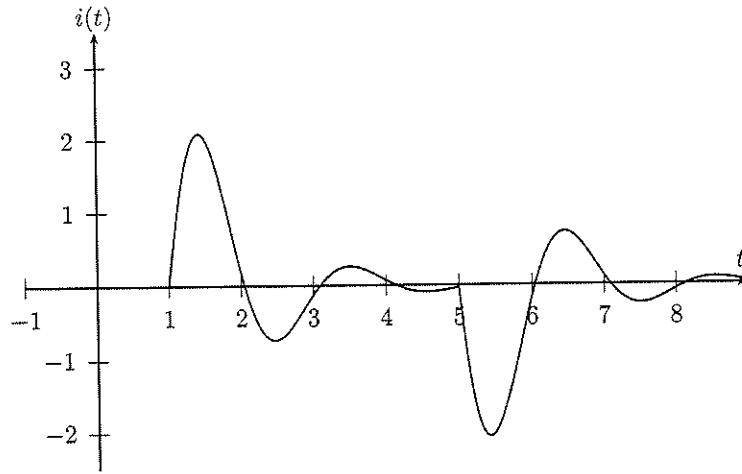


Figura 5.3:

- Caso superamortecido ($\eta < 0$): escolhamos o caso onde $L = 1$ H, $C = 1$ F e $R = 4\Omega$. Nesse caso

$$I(s) = 10 \left[\frac{e^{-s}}{(s+2)^2 - 3} - \frac{e^{-5s}}{(s+2)^2 - 3} \right]. \quad (5.18)$$

Logo,

$$\begin{aligned} i(t) &= 10 \left(u(t-1) \frac{e^{-2(t-1)}}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{3}(t-1)) - u(t-5) \frac{e^{-2(t-5)}}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{3}(t-5)) \right) \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}} u(t-1) \left(e^{(\sqrt{3}-2)(t-1)} - e^{-(\sqrt{3}+2)(t-1)} \right) + \\ &+ \frac{5}{\sqrt{3}} u(t-5) \left(e^{(\sqrt{3}-2)(t-5)} - e^{-(\sqrt{3}+2)(t-5)} \right) \end{aligned}$$

O gráfico da corrente é apresentado na figura 5.4.

- Caso criticamente amortecido ($\eta = 0$): escolhamos o caso onde $L = 1$ H, $C = 1$ F e $R = 2\Omega$. Nesse caso

$$I(s) = 10 \left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2} - \frac{e^{-5s}}{(s+1)^2} \right]. \quad (5.19)$$

Logo,

$$i(t) = 10 \left(u(t-1) e^{-(t-1)} (t-1) - u(t-5) e^{-(t-5)} (t-5) \right). \quad (5.20)$$

O gráfico da corrente é apresentado na figura 5.5.

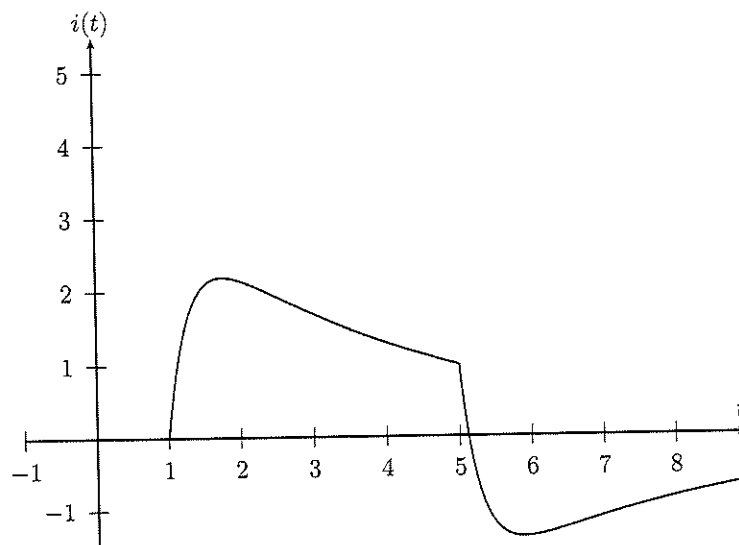


Figura 5.4:

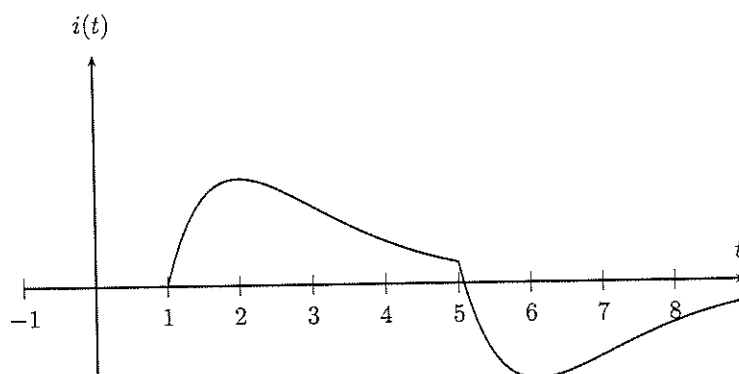


Figura 5.5:

Exercícios

E 5.2.1. Um capacitor de capacitância C está inicialmente carregado de forma que seu potencial seja V_0 . A partir de $t = 0$, o capacitor se descarrega através de um resistor de resistência R (veja figura 5.6). Use o método da transformada de Laplace para encontrar a carga $q(t)$ no capacitor.

E 5.2.2. Dado o circuito LC da figura 5.7, encontre a corrente $i(t)$ e faça

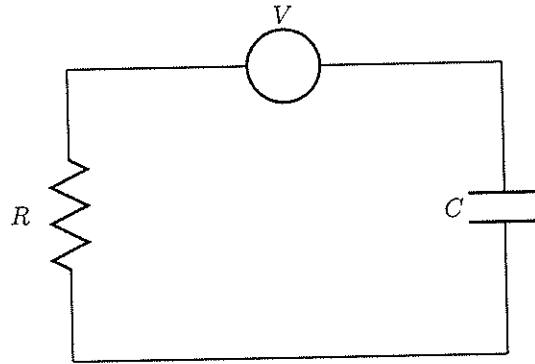


Figura 5.6:

seu gráfico, assumindo $L = 1$ H, $C = 1$ F, corrente inicial nula, carga inicial no capacitor nula e $V(t) = u(t) - u(t - a)$.

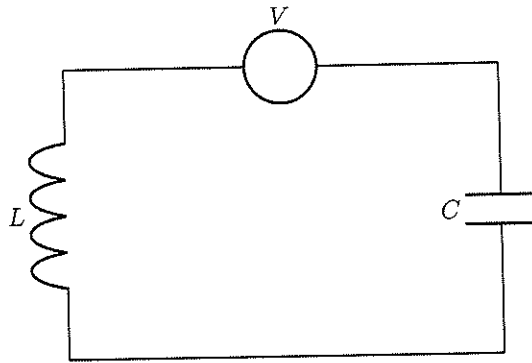


Figura 5.7:

E 5.2.3. Dado o circuito RLC da figura 5.8, encontre a corrente $i(t)$, assumindo que a corrente e a carga iniciais sejam nulas e que $R = 2 \Omega$, $L = 1$ H, $C = 1/2$ F e

$$V(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in (0,2) \\ 0, & \text{se } t > 2 \end{cases} \quad (5.21)$$

E 5.2.4. Dada a equação do movimento de um oscilador harmônico simples (OHS)

$$-ky(t) - \gamma y'(t) + f = my''(t), \quad (5.22)$$

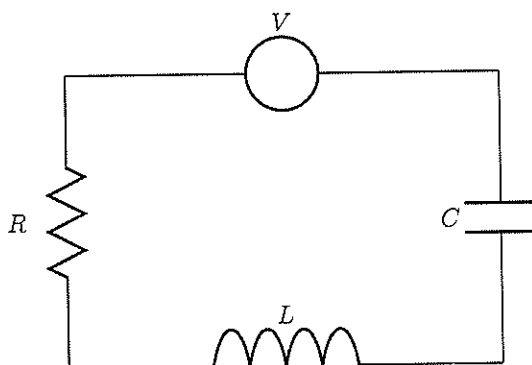


Figura 5.8:

calcule a resposta $y(t)$ deste oscilador sujeito a forças externas f do tipo dado abaixo. Considere $m = 1$, $k = 2$, $\gamma = 3$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [1,2] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(t) = \delta(t - 1)$$

E 5.2.5. Considere um OHS não amortecido, isto é, $\gamma = 0$ na equação diferencial associada (5.22). Suponha que este oscilador está sujeito a uma força externa dada por $f = F_0 \sin(\sqrt{k/mt})$.

- Use o método da transformada de Laplace para calcular as oscilações forçadas $y(t)$, sabendo que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.
- Como se comporta o gráfico destas oscilações? Que fenômeno físico você identifica?

E 5.2.6. A equação do movimento de um OHS não amortecido sujeito a oscilações forçadas pode ser escrita como

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = r(t), \quad \text{onde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e } r(t) = \frac{f(t)}{m}. \quad (5.23)$$

- Pelo método da transformada de Laplace, encontre $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.
- Com o auxílio do Teorema da Convolução, encontre $y(t)$ (em termos de $R = \mathcal{L}\{r\}$).

E 5.2.7. Considere o OHS não amortecido representado na figura 5.9. Suponha que, em $t = 0$, a massa m está em sua posição de equilíbrio. Encontre o deslocamento $x(t)$ para $t > 0$, se uma força $F_0\delta(t)$ é aplicada.

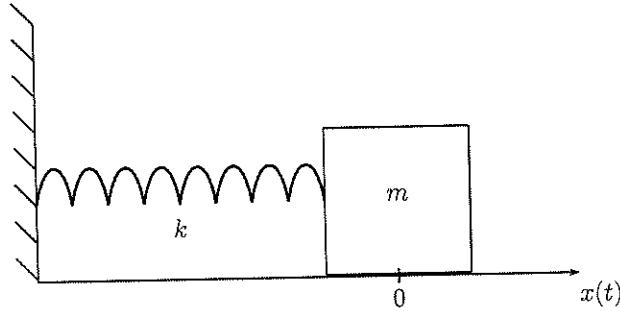


Figura 5.9:

5.3 Aplicação: cálculo da deflexão em vigas sujeitas a cargas concentradas

Considere uma viga elástica horizontal de comprimento L sob a ação de forças verticais. Colocamos o eixo horizontal x com origem no extremo a esquerda da viga e, portanto, $x = L$ é o outro extremo. Supomos que a viga está sujeita a uma carga $W(x)$ que provoca uma deflexão em cada ponto $x \in [0, L]$. Então, para pequenas deflexões podemos aproximar a curvatura $k(x)$ pela variação instantânea de $\theta(x)$, onde $\theta(x)$ é o ângulo entre o eixo x e a tangente, ou seja,

$$k(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}. \quad (5.24)$$

Como

$$\frac{dy(x)}{dx} = \tan(\theta(x)) \quad (5.25)$$

e, para $\theta(x)$ pequeno, $\tan(\theta(x)) \approx \theta(x)$, temos:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \theta(x), \quad (5.26)$$

Derivamos a equação (5.26) e substituímos na equação (5.24) para obter

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = k(x). \quad (5.27)$$

Por outro lado, a lei de Hooke para materiais nos dá $k(x) = \frac{M(x)}{EI}$, onde E é o módulo de Young, I é o momento de inércia da viga e $M(x)$ é o momento fletor. Assim, substituindo na equação (5.27),

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (5.28)$$

A variação do momento de inércia $M(x)$ é a força de cisalhamento $V(x)$:

$$\frac{d}{dx}M(x) = V(x) \quad (5.29)$$

e a variação da força de cisalhamento é a carga:

$$\frac{d}{dx}V(x) = W(x). \quad (5.30)$$

Logo,

$$\frac{d^2}{dx^2}M(x) = W(x). \quad (5.31)$$

Derivamos a equação (5.28) duas vezes e substituímos na equação (5.31) para obter a equação de Euler-Bernoulli:

$$\frac{d^4}{dx^4}y(x) = \frac{1}{EI}W(x). \quad (5.32)$$

Consideraremos aqui uma viga engastada, ou seja:

$$y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0. \quad (5.33)$$

A carga está concentrada na posição $x = \frac{L}{3}$ e tem intensidade P_0 , sendo modelada pela seguinte expressão:

$$W(x) = P_0\delta\left(x - \frac{L}{3}\right). \quad (5.34)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (5.32) e usando o fato que $\mathcal{L}\left(\delta\left(x - \frac{L}{3}\right)\right) = e^{-\frac{L}{3}s}$, obtemos

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{P_0}{EI}e^{-\frac{L}{3}s} \quad (5.35)$$

Substituímos $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = C_1$ e $y'''(0) = C_2$ onde C_1 e C_2 são constantes a determinar:

$$s^4Y(s) - sC_1 - C_2 = \frac{P_0}{EI}e^{-\frac{L}{3}s} \quad (5.36)$$

finalmente:

$$Y(s) = \frac{C_1}{s^3} + \frac{C_2}{s^4} + \frac{P_0}{EI} \frac{e^{-\frac{L}{3}s}}{s^4} \quad (5.37)$$

e recuperamos a solução do domínio x através da transformada inversa de Laplace:

$$y(x) = \frac{C_1}{2!}x^2 + \frac{C_2}{3!}x^3 + \frac{P_0}{EI} \frac{(x - L/3)^3}{3!}u(x - L/3). \quad (5.38)$$

A expressão para $y(x)$ pode ser escrita como função definida por partes na forma:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{2!}x^2 + \frac{C_2}{3!}x^3, & 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \\ \frac{C_1}{2!}x^2 + \frac{C_2}{3!}x^3 + \frac{P_0}{EI} \frac{(x-L/3)^3}{3!}, & \frac{L}{3} < x \leq L. \end{cases} \quad (5.39)$$

Para calcular o valor das constantes C_1 e C_2 calculamos $y(L)$ e $y'(L)$ usando a segunda parte da função $y(x)$:

$$\begin{aligned} 0 = y(L) &= \frac{C_1}{2}L^2 + \frac{C_2}{6}L^3 + \frac{4}{81} \frac{P_0}{EI} L^3 \\ 0 = y'(L) &= C_1L + \frac{C_2}{2}L^2 + \frac{2}{9} \frac{P_0}{EI} L^2 \end{aligned}$$

Colocando na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{6} \\ L & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{81} \frac{P_0}{EI} L^3 \\ -\frac{2}{9} \frac{P_0}{EI} L^2 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Invertemos a matriz do sistema para obter as constantes C_1 e C_2 :

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{12}{L^4} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} & -\frac{L^3}{6} \\ -L & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{81} \frac{P_0}{EI} L^3 \\ -\frac{2}{9} \frac{P_0}{EI} L^2 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

o que resulta em $C_1 = \frac{4P_0L}{27EI}$ e $C_2 = -\frac{20P_0}{27EI}$. A figura 5.10 apresenta o gráfico da função $y(x)$ quando $L = 5$ e $\frac{P_0}{EI} = 1$.

Exercícios

E 5.3.1. Para k constante, encontre a solução de

$$a) \begin{cases} 2y''(t) + 8y(t) = ku(t - a) \\ y(0) = 10, y'(0) = 0 \end{cases}$$

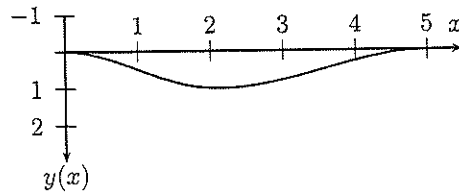


Figura 5.10:

$$b) \begin{cases} 2y''(t) + 8y(t) = k\delta(t) \\ y(0) = 10, y'(0) = 0 \end{cases}$$

E 5.3.2. Calcule a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

$$a) \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 5) - u(t - 10) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y'' + y = \delta(t - 2\pi) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} y'' - 2y' = 1 + \delta(t - 2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

5.4 Aplicação: metabolismo de uma medicação

Durante um período de consumo de uma medicação, a concentração da substância ingerida na corrente sanguínea evolui segundo um modelo simples da seguinte forma:

- No caso de ausência de dosagens, a variação da concentração é proporcional a concentração.

- O organismo metaboliza o medicamento com uma taxa τ .
- As doses de medicamento são liberadas e entra na corrente sanguínea instantaneamente e homoganeamente.

O modelo que descreve esse fenômeno é

$$c'(t) + \frac{1}{\tau}c(t) = x(t), \quad t > 0 \quad (5.42)$$

onde $c(t)$ é a concentração e $x(t)$ representa a dosagem ao longo do tempo t . Em geral, as dosagens não são únicas e são tomadas periodicamente. Seja c_0 a concentração administrada instantaneamente a cada período T , então

$$x(t) = c_0 (\delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \delta(t - 3T) + \dots) \quad (5.43)$$

Supondo que $c(0) = 0$, ou seja, inicialmente não havia substância no organismo, vamos calcular $c(t)$. Começamos aplicando a transformada de Laplace:

$$sC(s) + \frac{1}{\tau}C(s) = c_0 (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \dots) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n. \quad (5.44)$$

e encontramos:

$$C(s) = \left(\frac{c_0}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n. \quad (5.45)$$

Calculamos a transformada inversa usando a propriedade do deslocamento no eixo s .

$$\begin{aligned} c(t) &= c_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t-T}{\tau}} u(t-T) + e^{-\frac{t-2T}{\tau}} u(t-2T) + e^{-\frac{t-3T}{\tau}} u(t-3T) + \dots \right) \\ &= c_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} u(t-T) + e^{\frac{2T}{\tau}} u(t-2T) + e^{\frac{3T}{\tau}} u(t-3T) + \dots \right) \end{aligned}$$

O gráfico da concentração é apresentado na figura 5.11, usando $c_0 = 1$, $\tau = 1$ e $T = 1$. O salto em cada descontinuidade é exatamente c_0 , pois os limites laterais são

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow nT^-} c(t) &= \lim_{t \rightarrow nT^-} \left(c_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \dots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} \right) \right) \\ &= \left(c_0 e^{-\frac{nT}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \dots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} \right) \right) \\ &= \left(c_0 \left(e^{-\frac{nT}{\tau}} + e^{-\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{-\frac{(n-2)T}{\tau}} + \dots + e^{-\frac{T}{\tau}} \right) \right) \end{aligned}$$

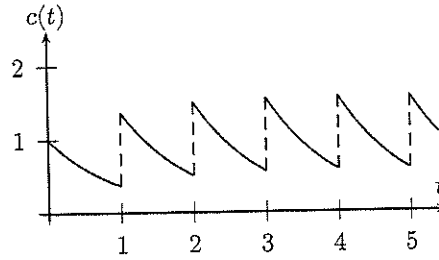


Figura 5.11:

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow nT^+} c(t) &= \lim_{t \rightarrow nT^+} \left(c_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \dots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{\frac{nT}{\tau}} \right) \right) \\ &= \left(c_0 e^{-\frac{nT}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \dots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{\frac{nT}{\tau}} \right) \right) \\ &= \left(c_0 \left(e^{-\frac{nT}{\tau}} + e^{-\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{-\frac{(n-2)T}{\tau}} + \dots + e^{-\frac{T}{\tau}} + 1 \right) \right), \end{aligned}$$

que possuem diferença igual a c_0 . Observe que quando calculamos o limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} c(t)$ obtemos $c(0^+) = c_0$, valor diferente da condição inicial dada, que é $c(0) = 0$. Apesar de parecer estranho, não está errado. Tudo é consequência da presença do Dirac em $t = 0$, que produz uma discontinuidade na origem. Este assunto será discutido na seção 5.5.

5.5 Problemas na origem

Para entender melhor esse fenômeno, vamos considerar um problema um pouco mais simples, dado pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = \delta(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Tomando a Transformada de Laplace, temos:

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = 1$$

ou seja, $Y(s) = \frac{1}{s+1}$, o que implica

$$y(t) = e^{-t}. \quad (5.46)$$

Observamos que $y(0) = 1 \neq 0$, ou seja, a condição inicial não é satisfeita. Para entendermos o que está acontecendo, devemos lembrar que a Transformada de Laplace só produz a solução para $t > 0$ e interpretar $y(t)$ como

$$y(t) = u(t)e^{-t}. \quad (5.47)$$

Desta forma $y(0)$ simplesmente não está definido. De fato, para compreender esse comportamento, vamos definir um problema auxiliar colocando no lugar da função delta de Dirac uma função pulso:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = \frac{u(t) - u(t-\varepsilon)}{\varepsilon} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

onde ε é uma constante positiva pequena. Sabemos que o termo

$$\frac{u(t) - u(t-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (5.48)$$

converge para $\delta(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0+$. Aplicando a Transformada de Laplace e resolvendo para $Y(s)$, temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon}, \quad (5.49)$$

ou seja,

$$y(t) = \frac{1 - e^{-t}}{\varepsilon} u(t) - u(t-\varepsilon) \frac{1 - e^{-(t-\varepsilon)}}{\varepsilon}. \quad (5.50)$$

Esta solução pode ser escrita como uma função contínua:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1 - e^{-t}}{\varepsilon}, & 0 < t \leq \varepsilon, \\ \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} e^{-t}, & t \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (5.51)$$

Para $\varepsilon > 0$ pequeno podemos usar a seguinte aproximação:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots \approx 1 + t \quad (5.52)$$

Assim, temos:

$$y(t) \approx \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{\varepsilon}, & 0 < t \leq \varepsilon, \\ e^{-t}, & t \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (5.53)$$

Ou seja, existe uma pequena região de transição entre 0 e ε onde a solução $y(t)$ sobe rapidamente. O gráfico apresentado na figura 5.12 mostra o comportamento de $y(t)$ para $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.05$ em azul, vermelho e verde, respectivamente, assim como a solução limite $e^{-t}u(t)$ em preto.

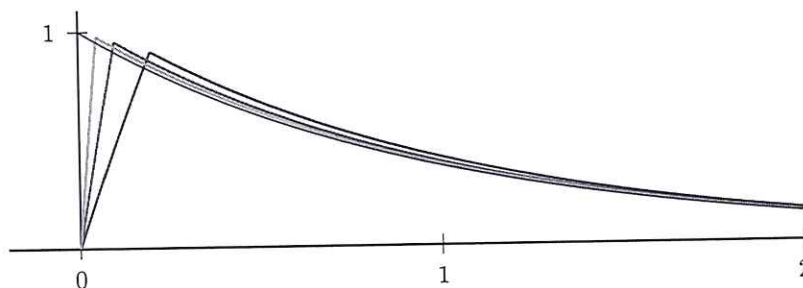


Figura 5.12:

Exercícios

E 5.5.1. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) &= \delta(t) \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$

- a) Calcule a transformada de Laplace $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. b) Calcule a transformada inversa e escreva $x(t)$. c) Aplique sua solução do item b) nas condições iniciais.

5.6 Propriedade da convolução

Dada duas funções contínuas por partes em $[0, \infty]$, a convolução de f e g denotada por $f * g$ é definida pela integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (5.54)$$

Exemplo 5.6.1. Dadas $f(t) = e^t$ e $g(t) = \cos(t)$, vamos calcular $f * g$:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t e^\tau \cos(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}e^\tau (\cos(t - \tau) - \text{sen}(t - \tau)) \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{2} (e^t - \cos(t) + \text{sen}(t)). \end{aligned}$$

onde usamos que $\int e^\tau \cos(t - \tau)d\tau = \frac{1}{2}e^\tau (\cos(t - \tau) - \text{sen}(t - \tau)) + \text{constante}$.

Teorema 5.6.1. (*Propriedade da convolução*) Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s). \quad (5.55)$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t). \quad (5.56)$$

Demonstração. Partimos da definição das transformadas:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (5.57)$$

e

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(\tau)\} = \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau. \quad (5.58)$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty g(\tau)e^{-s(t+\tau)}d\tau dt \end{aligned}$$

Mantemos t fixo e fazemos a mudança de variável $v = t + \tau$ para obter:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty g(v - t)e^{-sv}dv dt$$

Agora, vamos mudar a ordem de integração na região que é a metade inferior do primeiro quadrante: em vez de variar v em $[t, \infty]$ depois t em $[0, \infty]$, primeiro vamos variar t em $[0, v]$, depois v em $[0, \infty]$, ou seja,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \int_0^v f(t)g(v-t)e^{-sv} dt dv \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^v f(t)g(v-t) dt \right) e^{-sv} dv \\ &= \int_0^\infty (f * g) e^{-sv} dv \\ &= \mathcal{L}\{f * g\} \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.6.2. Vamos calcular a transformada inversa de $\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$. Primeiro observamos que a expressão pode ser escrita como um produto de duas funções tabelas:

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s-1} \frac{s}{s^2+1}, \quad (5.59)$$

onde $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(t)$. Usando a propriedade 5.6.1 da convolução, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} \frac{s}{s^2+1}\right\} = \int_0^t e^\tau \cos(t-\tau) d\tau. \quad (5.60)$$

A convolução acima foi calculada no exemplo 5.6.1, logo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} \frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{2} (e^t - \cos(t) + \text{sen}(t)). \quad (5.61)$$

A propriedade 5.6.1 da convolução pode ser útil para resolver equações integrais, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 5.6.3. Vamos resolver a seguinte equação integral:

$$y(t) = 4 + 9 \int_0^t y(\tau)(t-\tau) d\tau. \quad (5.62)$$

Aplicamos a transformada de Laplace e usamos a propriedade 5.6.1 da convolução com $f(t) = y(t)$ e $g(t) = t$ para obter:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{4}{s} + 9\mathcal{L}\{y(t)\}\mathcal{L}\{t\} \quad (5.63)$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{4}{s} + 9Y(s)\frac{1}{s^2}. \quad (5.64)$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^2 - 9} \frac{4}{s} = \frac{4s}{s^2 - 9}. \quad (5.65)$$

Portanto,

$$y(t) = 4 \cosh(3t) \quad (5.66)$$

Exercícios

E 5.6.1. Encontre por integração:

- a) $1 * 1$
- b) $t * e^t$
- c) $1 * \cos(\omega t)$
- d) $e^{kt} * e^{-kt}$

E 5.6.2. Justifique as seguintes propriedades da operação de convolução:

- a) $f * g = g * f$
- b) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- c) $f * (g + h) = f * g + f * h$
- d) $(\delta * f)(t) = f(t)$

[Dica: cuidado para não confundir as variáveis de integração que aparecerão no item (b).]

E 5.6.3. Resolva a seguinte equação integral:

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau) d\tau \quad (5.67)$$

E 5.6.4. Use o Teorema da Convolução para calcular

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} \right). \quad (5.68)$$

E 5.6.5. Use o Teorema da Convolução para resolver as seguintes equações integrais:

$$\text{a) } y(t) = 1 + \int_0^t y(\tau) d\tau$$

$$\text{b) } y(t) = 1 - \int_0^t y(\tau)(t - \tau) d\tau$$

$$\text{c) } y(t) = te^t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau) d\tau$$

$$\text{d) } y(t) = 1 - \sinh t + \int_0^t (1 + \tau)y(t - \tau) d\tau$$

E 4.1.5.

a) $\frac{2}{(s-3)^3}$

b) $\frac{4}{s^2 + 4s + 20}$

c) $\frac{s-4}{s^2 - 8s - 9}$

d) $\frac{3s-24}{s^2 + 4s + 40}$

E 4.2.1. $0 < k < \frac{4}{3}$.

E 4.2.2.

a) $y(t) = -2e^{-2t} + e^t + 2e^{-3t}$

b) $y(t) = u(t)(2e^{-2t} - e^{-3t}) + u(t-3)(1 - 3e^{-2t+6} + 2e^{-3t+9})$

E 4.2.3. $y(t) = \frac{F_0}{2k} \left(\text{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \sqrt{\frac{k}{m}} t \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right)$

E 4.2.4. $y(t) = (1 - 2e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)})u(t-1) - (1 - 2e^{-(t-2)} + e^{-2(t-2)})u(t-2)$

E 4.2.5.

a) $\alpha > 0$

b) $0 < \alpha < 4$

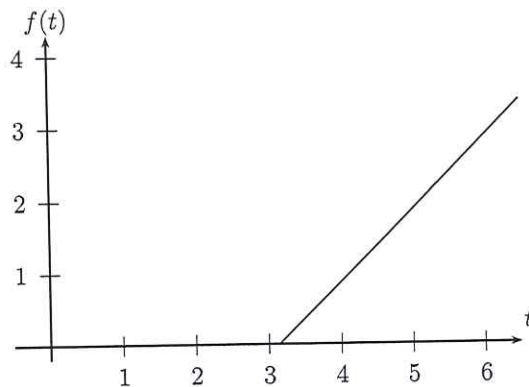
c) $\alpha = 4$

d) $\alpha > 4$

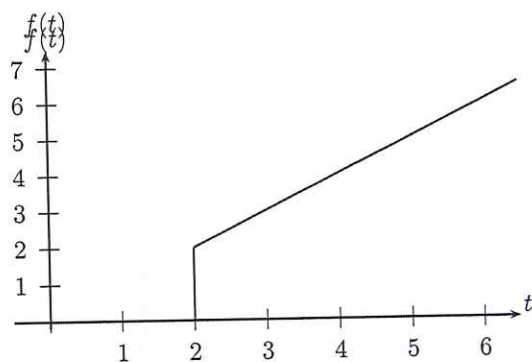
e) $y(t) = \frac{1}{4}u(t-1)(t-1)e^{-\frac{t-1}{2}}$

E 4.3.3.

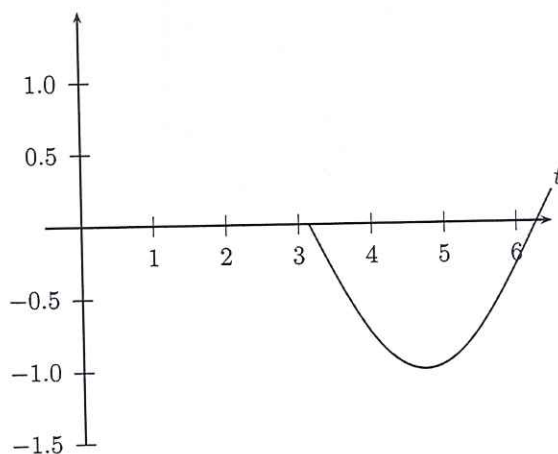
a) $(t - \pi)u(t - \pi)$



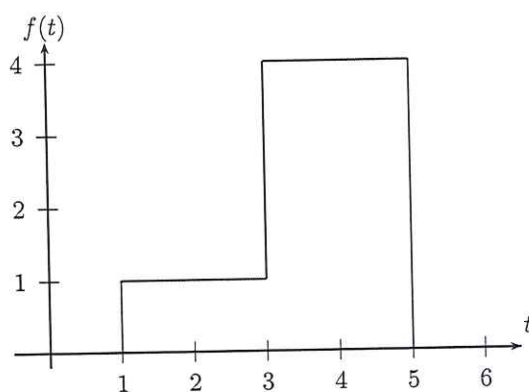
b) $t u(t - 2)$



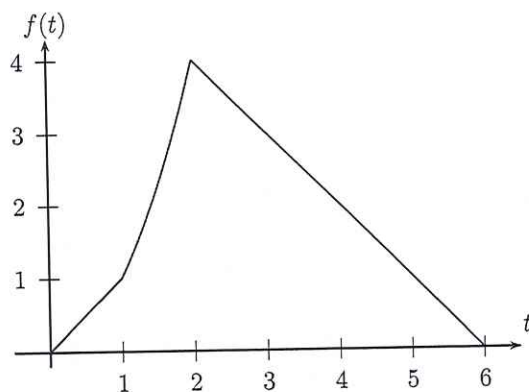
c) $(\text{sen } t)u(t - \pi)$



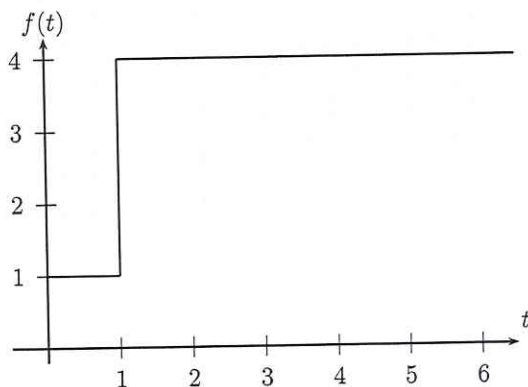
d) $f(t) = u(t - 1) + 3u(t - 3) - 4u(t - 5)$



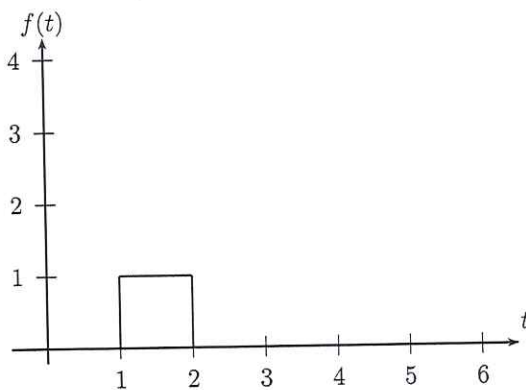
e) $f(t) = tu(t) + (t^2 - t)u(t - 1) + (6 - t - t^2)u(t - 2) + (t - 6)u(t - 6)$



f) $f(t) = [u(t) + u(t-1)]^2 = u(t) + 3u(t-1)$



g) $f(t) = u(t-1)[1 - u(t-2)] = u(t-1) - u(t-2)$



E 4.3.4.

a) $f(t) = u(t-1) - 3u(t-3) + 2u(t-5)$

b) $f(t) = tu(t) + (1-t)u(t-1) + \left(-\frac{3}{2}t + \frac{9}{2}\right)u(t-3) + \left(\frac{3}{2}t - \frac{11}{2}\right)u(t-5)$

$$c) f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t-n)$$

$$d) f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-2n)$$

E 4.4.2.

$$a) F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2}$$

$$b) F(s) = e^{-2s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} \right)$$

$$c) F(s) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

$$d) F(s) = \frac{1}{s} (e^{-s} + 3e^{-3s} - 4e^{-5s})$$

$$e) F(s) = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-s} + \left(-\frac{2}{s^3} - \frac{5}{s^2} \right) e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-6s}$$

$$f) F(s) = \frac{1+3e^{-s}}{s}$$

$$g) F(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$$

E 4.4.3.

$$a) F(s) = \frac{1}{s} (e^{-s} - 3e^{-3s} + 2e^{-5s})$$

$$b) F(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 - e^{-s} - \frac{3}{2}e^{-3s} + \frac{3}{2}e^{-5s} + 2se^{-5s} \right)$$

$$c) F(s) = \frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

$$d) F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-2s})}$$

E 4.4.4.

$$a) F(s) = \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

$$b) F(s) = \frac{e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})}$$

E 4.4.5.

$$a) f(t) = (2 \cos(2t) - \sin(2t)) e^{-t}$$

$$b) f(t) = \frac{2e^t}{5} (\cos(2t) - \cos(3t))$$

$$c) f(t) = u(t-4) \sinh(2(t-4))$$

$$d) f(t) = u(t-2) (e^{3(t-2)} - e^{(t-2)})$$

$$e) f(t) = u(t-1) e^{-(t-1)} (2 \cos(2(t-1)) - \sin(2(t-1)))$$

$$f) f(t) = 2 \frac{u(t-3)e^{t-3}}{5} (\cos(2(t-3)) - \cos(3(t-3)))$$

E 4.4.6.

$$a) F(s) = \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) e^{-s}$$

$$b) F(s) = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) e^{-s}$$

E 4.4.8.

$$a) e^{-2t} \operatorname{sen}(n\pi t)$$

$$b) e^{-3t} (\cos t - 3 \operatorname{sen} t)$$

$$c) e^{2t} (6 \cos(4t) + 2 \operatorname{sen}(4t))$$

$$d) 4e^{-4t}(1-t)$$

E 4.4.9.

$$a) 2(u(t-2) - u(t-4))$$

$$b) (t-a)u(t-a)$$

$$c) \cos(2(t-\pi))u(t-\pi)$$

$$d) e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}(t-\pi)u(t-\pi)$$

$$e) (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) - 3(t-3)u(t-3) + 6(t-6)u(t-6)$$

E 4.6.1. Voltamos a equação (4.57) e usamos $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

$$Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = V_0(u(t-a) - u(t-b)). \quad (4.66)$$

Obtemos a equação subsidiária aplicando a transformada de Laplace:

$$R(sQ(s) - q(0)) + \frac{1}{C}Q(s) = \frac{V_0}{s} (e^{-as} - e^{-bs}).$$

onde $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$. Como o fenômeno estava em repouso no início, $q(0) = 0$. A solução da equação subsidiária é

$$Q(s) = \frac{C}{RCs+1} \frac{V_0}{s} (e^{-as} - e^{-bs}) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{s(s + \frac{1}{CR})} (e^{-as} - e^{-bs}). \quad (4.67)$$

O item 11 da tabela A.1 nos dá

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-d_1)(s-d_2)} \right\} = \frac{1}{d_1-d_2} (e^{d_1 t} - e^{d_2 t}). \quad (4.68)$$

Colocamos $d_1 = 0$, $d_2 = -\frac{1}{CR}$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \frac{1}{CR})} \right\} = CR \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right). \quad (4.69)$$

Agora usamos a propriedade 4.4.1 da translação no eixo t e obtemos:

$$q(t) = CV_0 \left(u(t-a) \left(1 - e^{-\frac{t-a}{CR}} \right) - u(t-b) \left(1 - e^{-\frac{t-b}{CR}} \right) \right), \quad (4.70)$$

que coincide com a solução dada na equação (4.65).

E 5.1.1.

a) $\frac{e^{-s}(s^2 + s + 1)}{s^2}$

b) $-e^{-\pi s} \ln \pi$

c) e^{1-s}

E 5.2.1. $q(t) = CV_0 e^{-t/RC}$

E 5.2.2. $i(t) = \text{sen } t - \text{sen}(t - a)u(t - a)$

E 5.2.3. $i(t) = e^{-t} \text{sen } t - u(t - 2)e^{2-t} \text{sen}(t - 2)$

E 5.2.4.

a) $y(t) = \frac{1}{2} [1 - 2e^{1-t} + e^{2-2t}] u(t - 1) - \frac{1}{2} [1 - 2e^{2-t} + e^{4-2t}]$

b) $y(t) = [e^{1-t} - e^{2-2t}] u(t - 1)$

E 5.2.5. $\frac{F_0}{2k} [\text{sen}(\sqrt{k/m}t) - \sqrt{k/m}t \cos(\sqrt{k/m}t)]$

E 5.2.6.

a) $F(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + w^2} + \frac{R(s)}{s^2 + w^2}$

b) $y(t) = y(0) \cos(\omega t) + \frac{y'(0) \text{sen}(\omega t)}{\omega} + \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} * r(t)$

E 5.2.7. $y(t) = \frac{F_0}{\sqrt{km}} \text{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$

E 5.3.2.

a) $y(t) = e^{-t} \text{sen } t + e^\pi e^{-t} \text{sen}(t - \pi)u(t - \pi) + e^{-t} \cos t = e^{-t} \text{sen } t (1 - e^\pi u(t - \pi)) + e^{-t} \cos t$

b) $y(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-2t}) + (e^{5-t} - e^{10-2t})u(t - 5) - \frac{1}{2} (1 - 2e^{10-t} + e^{20-2t})u(t - 10)$

c) $y(t) = \text{sen } t + \text{sen}(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$

E 5.6.1.

a) t

b) $e^t - t - 1$

c) $\frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t)$

d) $\frac{1}{2k} (e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{1}{k} \text{senh}(kt)$

E 5.6.2.

a)

$$\begin{aligned}
 f * g &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
 &= - \int_t^0 f(t-u)g(u)du \\
 &= \int_0^t g(u)f(t-u)du \\
 &= g * f
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 (f * g) * h &= \int_0^t \left(\int_0^\tau f(u)g(\tau-u)du \right) h(t-\tau)d\tau \\
 &= \int_0^t \int_0^\tau f(u)g(\tau-u)h(t-\tau)dud\tau \\
 &= \int_0^t \int_u^t f(u)g(\tau-u)h(t-\tau)d\tau du \\
 &= \int_0^t f(u) \int_u^t g(\tau-u)h(t-\tau)d\tau du \\
 &= \int_0^t f(u) \int_0^{t-u} g(v)h(t-u-v)dv du \\
 &= \int_0^t f(u) [(g * h)(t-u)] du \\
 &= f * (g * h)
 \end{aligned}$$

onde se fez a mudança $v = \tau - u$, $dv = d\tau$.

E 5.6.4. $\frac{1}{2} [\text{sen } t - \cos t + e^{-t}]$

E 5.6.5.

- a) $y(t) = e^t$
 b) $y(t) = \cos t$
 c) $y(t) = \text{senh } t$
 d) $y(t) = \text{cosh } t$

E 6.2.1.

- a) $y(t) = 10 \cos(2t) + \frac{k}{8} (1 - \cos(2(t-a)))u(t-a)$
 b) $y(t) = 10 \cos(2t) + \frac{k}{4} \text{sen}(2t)$