

5.3 Aplicação: cálculo da deflexão em vigas sujeitas a cargas concentradas

Considere uma viga elástica horizontal de comprimento L sob a ação de forças verticais. Colocamos o eixo horizontal x com origem no extremo a esquerda da viga e, portanto, $x = L$ é o outro extremo. Supomos que a viga está sujeita a uma carga $W(x)$ que provoca uma deflexão em cada ponto $x \in [0, L]$. Então, para pequenas deflexões podemos aproximar a curvatura $k(x)$ pela variação instantânea de $\theta(x)$, onde $\theta(x)$ é o ângulo entre o eixo x e a tangente, ou seja,

$$k(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}. \quad (5.24)$$

Como

$$\frac{dy(x)}{dx} = \tan(\theta(x)) \quad (5.25)$$

e, para $\theta(x)$ pequeno, $\tan(\theta(x)) \approx \theta(x)$, temos:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \theta(x), \quad (5.26)$$

Derivamos a equação (5.26) e substituímos na equação (5.24) para obter

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = k(x). \quad (5.27)$$

Por outro lado, a lei de Hooke para materiais nos dá $k(x) = \frac{M(x)}{EI}$, onde E é o módulo de Young, I é o momento de inércia da viga e $M(x)$ é o momento fletor. Assim, substituindo na equação (5.27),

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (5.28)$$

A variação do momento de inércia $M(x)$ é a força de cisalhamento $V(x)$:

$$\frac{d}{dx}M(x) = V(x) \quad (5.29)$$

e a variação da força de cisalhamento é a carga:

$$\frac{d}{dx}V(x) = W(x). \quad (5.30)$$

Logo,

$$\frac{d^2}{dx^2}M(x) = W(x). \quad (5.31)$$

Derivamos a equação (5.28) duas vezes e substituímos na equação (5.31) para obter a equação de Euler-Bernoulli:

$$\frac{d^4}{dx^4}y(x) = \frac{1}{EI}W(x). \quad (5.32)$$

Consideraremos aqui uma viga engastada, ou seja:

$$y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0. \quad (5.33)$$

A carga está concentrada na posição $x = \frac{L}{3}$ e tem intensidade P_0 , sendo modelada pela seguinte expressão:

$$W(x) = P_0\delta\left(x - \frac{L}{3}\right). \quad (5.34)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (5.32) e usando o fato que $\mathcal{L}\left(\delta\left(x - \frac{L}{3}\right)\right) = e^{-\frac{L}{3}s}$, obtemos

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{P_0}{EI}e^{-\frac{L}{3}s} \quad (5.35)$$

Substituímos $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = C_1$ e $y'''(0) = C_2$ onde C_1 e C_2 são constantes a determinar:

$$s^4Y(s) - sC_1 - C_2 = \frac{P_0}{EI}e^{-\frac{L}{3}s} \quad (5.36)$$

finalmente:

$$Y(s) = \frac{C_1}{s^3} + \frac{C_2}{s^4} + \frac{P_0}{EI} \frac{e^{-\frac{L}{3}s}}{s^4} \quad (5.37)$$

e recuperamos a solução do domínio x através da transformada inversa de Laplace:

$$y(x) = \frac{C_1}{2!}x^2 + \frac{C_2}{3!}x^3 + \frac{P_0}{EI} \frac{(x - L/3)^3}{3!}u(x - L/3). \quad (5.38)$$

A expressão para $y(x)$ pode ser escrita como função definida por partes na forma:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{2!}x^2 + \frac{C_2}{3!}x^3, & 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \\ \frac{C_1}{2!}x^2 + \frac{C_2}{3!}x^3 + \frac{P_0}{EI} \frac{(x-L/3)^3}{3!}, & \frac{L}{3} < x \leq L. \end{cases} \quad (5.39)$$

Para calcular o valor das constantes C_1 e C_2 calculamos $y(L)$ e $y'(L)$ usando a segunda parte da função $y(x)$:

$$0 = y(L) = \frac{C_1}{2}L^2 + \frac{C_2}{6}L^3 + \frac{4}{81} \frac{P_0}{EI} L^3$$

$$0 = y'(L) = C_1 L + \frac{C_2}{2}L^2 + \frac{2}{9} \frac{P_0}{EI} L^2$$

Colocando na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{6} \\ L & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{81} \frac{P_0}{EI} L^3 \\ -\frac{2}{9} \frac{P_0}{EI} L^2 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Invertamos a matriz do sistema para obter as constantes C_1 e C_2 :

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{12}{L^4} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} & -\frac{L^3}{6} \\ -L & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{81} \frac{P_0}{EI} L^3 \\ -\frac{2}{9} \frac{P_0}{EI} L^2 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

o que resulta em $C_1 = \frac{4P_0L}{27EI}$ e $C_2 = -\frac{20P_0}{27EI}$. A figura 5.10 apresenta o gráfico da função $y(x)$ quando $L = 5$ e $\frac{P_0}{EI} = 1$.

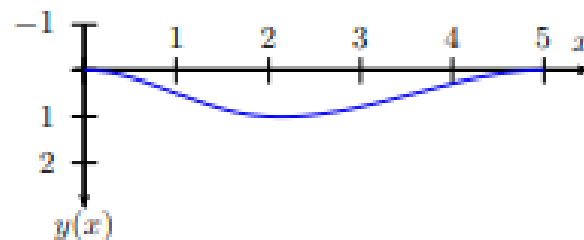


Figura 5.10:

5.4 Aplicação: metabolismo de uma medicação

Durante um período de consumo de uma medicação, a concentração da substância ingerida na corrente sanguínea evolui segundo um modelo simples da seguinte forma:

- No caso de ausência de dosagens, a variação da concentração é proporcional a concentração.

- O organismo metaboliza o medicamento com uma taxa τ .
- As doses de medicamento são liberadas e entra na corrente sanguínea instantaneamente e homoganeamente.

O modelo que descreve esse fenômeno é

$$c'(t) + \frac{1}{\tau}c(t) = x(t), \quad t > 0 \quad (5.42)$$

onde $c(t)$ é a concentração e $x(t)$ representa a dosagem ao longo do tempo t . Em geral, as dosagens não são únicas e são tomadas periodicamente. Seja c_0 a concentração administrada instantaneamente a cada período T , então

$$x(t) = c_0 (\delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \delta(t - 3T) + \dots) \quad (5.43)$$

Supondo que $c(0) = 0$, ou seja, inicialmente não havia substância no organismo, vamos calcular $c(t)$. Começamos aplicando a transformada de Laplace:

$$sC(s) + \frac{1}{\tau}C(s) = c_0 (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \dots) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n. \quad (5.44)$$

e encontramos:

$$C(s) = \left(\frac{c_0}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n. \quad (5.45)$$

Calculamos a transformada inversa usando a propriedade do deslocamento no eixo s .

$$\begin{aligned} c(t) &= c_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t-T}{\tau}} u(t-T) + e^{-\frac{t-2T}{\tau}} u(t-2T) + e^{-\frac{t-3T}{\tau}} u(t-3T) + \dots \right) \\ &= c_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} u(t-T) + e^{\frac{2T}{\tau}} u(t-2T) + e^{\frac{3T}{\tau}} u(t-3T) + \dots \right) \end{aligned}$$

O gráfico da concentração é apresentado na figura 5.11, usando $c_0 = 1$, $\tau = 1$ e $T = 1$. O salto em cada descontinuidade é exatamente c_0 , pois os limites laterais são

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow nT^-} c(t) &= \lim_{t \rightarrow nT^-} \left(c_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \dots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} \right) \right) \\ &= \left(c_0 e^{-\frac{nT}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \dots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} \right) \right) \\ &= \left(c_0 \left(e^{-\frac{nT}{\tau}} + e^{-\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{-\frac{(n-2)T}{\tau}} + \dots + e^{-\frac{T}{\tau}} \right) \right) \end{aligned}$$

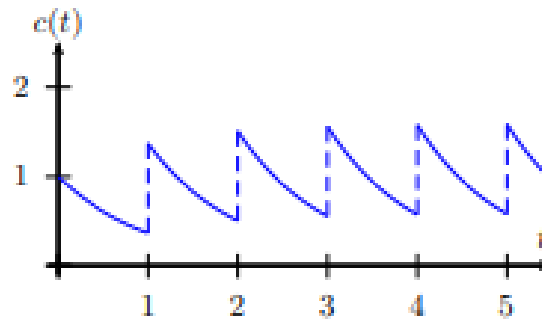


Figura 5.11:

e

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow nT^+} c(t) &= \lim_{t \rightarrow nT^+} \left(c_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \dots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{\frac{nT}{\tau}} \right) \right) \\
 &= \left(c_0 e^{-\frac{nT}{\tau}} \left(1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \dots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{\frac{nT}{\tau}} \right) \right) \\
 &= \left(c_0 \left(e^{-\frac{nT}{\tau}} + e^{-\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{-\frac{(n-2)T}{\tau}} + \dots + e^{-\frac{T}{\tau}} + 1 \right) \right),
 \end{aligned}$$

que possuem diferença igual a c_0 . Observe que quando calculamos o limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} c(t)$ obtemos $c(0^+) = c_0$, valor diferente da condição inicial dada, que é $c(0) = 0$. Apesar de parecer estranho, não está errado. Tudo é consequência da presença do Dirac em $t = 0$, que produz uma discontinuidade na origem. Este assunto será discutido na seção 5.5.

5.5 Problemas na origem

Para entender melhor esse fenômeno, vamos considerar um problema um pouco mais simples, dado pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = \delta(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Tomando a Transformada de Laplace, temos:

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = 1$$

ou seja, $Y(s) = \frac{1}{s+1}$, o que implica

$$y(t) = e^{-t}. \quad (5.46)$$

Observamos que $y(0) = 1 \neq 0$, ou seja, a condição inicial não é satisfeita. Para entendermos o que está acontecendo, devemos lembrar que a Transformada de Laplace só produz a solução para $t > 0$ e interpretar $y(t)$ como

$$y(t) = u(t)e^{-t}. \quad (5.47)$$

Desta forma $y(0)$ simplesmente não está definido. De fato, para compreender esse comportamento, vamos definir um problema auxiliar colocando no lugar da função delta de Dirac uma função pulso:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) &= \frac{u(t) - u(t-\varepsilon)}{\varepsilon} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

onde ε é uma constante positiva pequena. Sabemos que o termo

$$\frac{u(t) - u(t - \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (5.48)$$

converge para $\delta(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0+$. Aplicando a Transformada de Laplace e resolvendo para $Y(s)$, temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon}, \quad (5.49)$$

ou seja,

$$y(t) = \frac{1 - e^{-t}}{\varepsilon} u(t) - u(t - \varepsilon) \frac{1 - e^{-(t-\varepsilon)}}{\varepsilon}. \quad (5.50)$$

Esta solução pode ser escrita como uma função contínua:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1-e^{-t}}{\varepsilon}, & 0 < t \leq \varepsilon, \\ \frac{e^t-1}{\varepsilon} e^{-t}, & t \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (5.51)$$

Para $\varepsilon > 0$ pequeno podemos usar a seguinte aproximação:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots \approx 1 + t \quad (5.52)$$

Assim, temos:

$$y(t) \approx \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{\varepsilon}, & 0 < t \leq \varepsilon, \\ e^{-t}, & t \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (5.53)$$

Ou seja, existe uma pequena região de transição entre 0 e ε onde a solução $y(t)$ sobe rapidamente. O gráfico apresentado na figura 5.12 mostra o comportamento de $y(t)$ para $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.05$ em azul, vermelho e verde, respectivamente, assim como a solução limite $e^{-t}u(t)$ em preto.

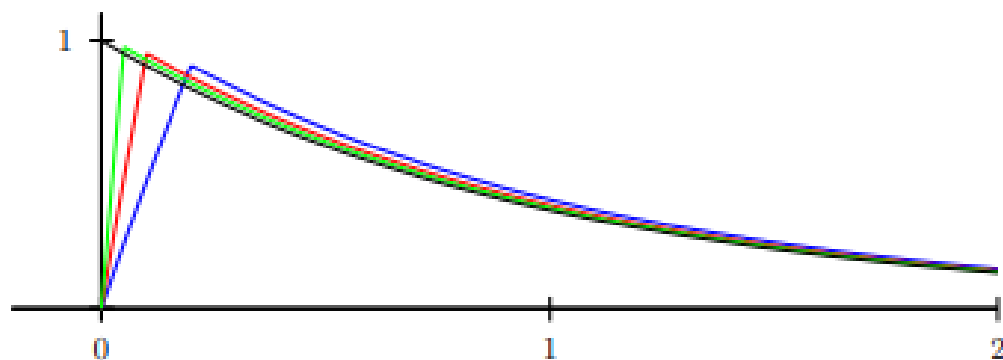


Figura 5.12:

5.6 Propriedade da convolução

Dada duas funções contínuas por partes em $[0, \infty]$, a convolução de f e g denotada por $f * g$ é definida pela integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (5.54)$$

Exemplo 5.6.1. Dadas $f(t) = e^t$ e $g(t) = \cos(t)$, vamos calcular $f * g$:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t e^\tau \cos(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}e^\tau (\cos(t - \tau) - \text{sen}(t - \tau)) \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{2} (e^t - \cos(t) + \text{sen}(t)). \end{aligned}$$

onde usamos que $\int e^\tau \cos(t - \tau)d\tau = \frac{1}{2}e^\tau (\cos(t - \tau) - \text{sen}(t - \tau)) + \text{constante}$.

Teorema 5.6.1. (*Propriedade da convolução*) Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s). \quad (5.55)$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t). \quad (5.56)$$

Demonstração. Partimos da definição das transformadas:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (5.57)$$

e

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(\tau)\} = \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau. \quad (5.58)$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty g(\tau)e^{-s(t+\tau)}d\tau dt \end{aligned}$$

Mantemos t fixo e fazemos a mudança de variável $v = t + \tau$ para obter:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty g(v - t)e^{-sv}dv dt$$

Agora, vamos mudar a ordem de integração na região que é a metade inferior do primeiro quadrante: em vez de variar v em $[t, \infty]$ depois t em $[0, \infty]$, primeiro vamos variar t em $[0, v]$, depois v em $[0, \infty]$, ou seja,

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \int_0^\infty \int_0^v f(t)g(v-t)e^{-sv} dt dv \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^v f(t)g(v-t) dt \right) e^{-sv} dv \\
&= \int_0^\infty (f * g) e^{-sv} dv \\
&= \mathcal{L}\{f * g\}
\end{aligned}$$

Exemplo 5.6.2. Vamos calcular a transformada inversa de $\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$. Primeiro observamos que a expressão pode ser escrita como um produto de duas funções tabelas:

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s-1} \frac{s}{s^2+1}, \quad (5.59)$$

onde $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(t)$. Usando a propriedade 5.6.1 da convolução, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} \frac{s}{s^2+1}\right\} = \int_0^t e^\tau \cos(t-\tau) d\tau. \quad (5.60)$$

A convolução acima foi calculada no exemplo 5.6.1, logo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} \frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{2} (e^t - \cos(t) + \sin(t)). \quad (5.61)$$

A propriedade 5.6.1 da convolução pode ser útil para resolver equações integrais, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 5.6.3. Vamos resolver a seguinte equação integral:

$$y(t) = 4 + 9 \int_0^t y(\tau)(t-\tau) d\tau. \quad (5.62)$$

Aplicamos a transformada de Laplace e usamos a propriedade 5.6.1 da convolução com $f(t) = y(t)$ e $g(t) = t$ para obter:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{4}{s} + 9\mathcal{L}\{y(t)\}\mathcal{L}\{t\} \quad (5.63)$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{4}{s} + 9Y(s)\frac{1}{s^2}. \quad (5.64)$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 - 9} = \frac{4s}{s^2 - 9}. \quad (5.65)$$

Portanto,

$$y(t) = 4 \cosh(3t) \quad (5.66)$$