

3 – Sinais Singulares

3.1 – Introdução aos sinais singulares	3
3.2 – Sinais singulares discretos	4
■ O sinal impulso unitário discreto (“ <i>unit-impulse</i> ”)	4
■ Propriedades do impulso unitário discreto	5
■ O sinal degrau unitário discreto (“ <i>unit-step</i> ”)	5
■ Relação entre $u_0[n]$ e $u_1[n]$	6
■ O sinal rampa unitária discreta (“ <i>unit-ramp</i> ”)	6
■ Relação entre $u_1[n]$ e $u_2[n]$	8
■ A família de sinais singulares discretos	8
■ Exemplo 3.1	8
■ Exemplo 3.2	9
■ Exemplo 3.3	9
■ Exemplo 3.4	10
■ Exemplo 3.5	11
■ Exemplo 3.6	12
3.3 – Sinais singulares contínuos	13
■ O sinal impulso unitário (“ <i>unit-impulse</i> ”)	13
■ Propriedades do impulso unitário contínuo	14
■ O sinal degrau unitário (“ <i>unit-step</i> ”)	15
■ Relação entre $u_0(t)$ e $u_1(t)$	16
■ O sinal rampa unitária (“ <i>unit-ramp</i> ”)	16
■ Relação entre os 3 sinais $u_0(t)$, $u_1(t)$ e $u_2(t)$	17
■ A família de sinais singulares contínuos	17
■ Exemplo 3.7	19

■ Exemplo 3.8	19
■ Exemplo 3.9	20
■ Exemplo 3.10	21
■ Exemplo 3.11	21
■ Exemplo 3.12	22
■ Exemplo 3.13	23

Sinais Singulares

3.1 – Introdução aos Sinais Singulares

Os *sinais singulares* ou, também chamados “*sinais de excitação*” formam uma família

$$u_0[n], u_1[n], u_2[n], \dots, \text{ no caso discreto;}$$

ou,

$$u_0(t), u_1(t), u_2(t), \dots, \text{ no caso contínuo;}$$

Eles são sinais recorrentes, isto é, cada sinal desta família é definido em função do anterior.

Matematicamente é mesmo possível definir esta sequência de sinais infinitamente para os dois lados, introduzindo também os sinais

$$u_{-1}[n], u_{-2}[n], \dots,$$

ou

$$u_{-1}(t), u_{-2}(t), \dots,$$

mas isto, entretanto, é sem grande interesse prático. Apenas $u_k[n]$ e $u_k(t)$ para $k \geq 0$ terão aplicações práticas em engenharia.

Portanto, embora sejam um número infinito de sinais nesta família, na prática apenas alguns de mais interesse são realmente utilizados, em especial dois deles: o impulso unitário $u_0(t)$ e o degrau unitário $u_1(t)$, normalmente usados como *sinais de excitação* (i.e., de *input* ou de entrada) de sistemas que estão sendo analisados.

3.2 – Sinais singulares discretos

■ O sinal impulso unitário discreto (“unit impulse”):

A notação do impulso unitário discreto é:

$$u_o[n] \quad \text{ou} \quad \delta[n]$$

$$u_o[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

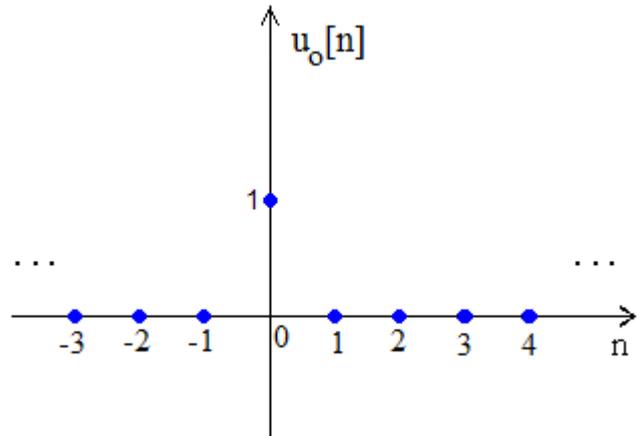


Fig. 1 – O sinal impulso unitário discreto $u_o[n]$.

Se multiplicarmos o impulso unitário $u_o[n]$ por uma constante $C \neq 0$ obtemos um impulso também, mas neste caso um impulso não unitário, um impulso de *área* C , onde C pode ser até mesmo negativo. A figura 2 ilustra estes casos.

Obs.: A constante C é chamada de *área* do impulso, inspirados no caso contínuo que será visto mais adiante, embora aqui no caso discreto não tenha o significado que terá no caso contínuo.

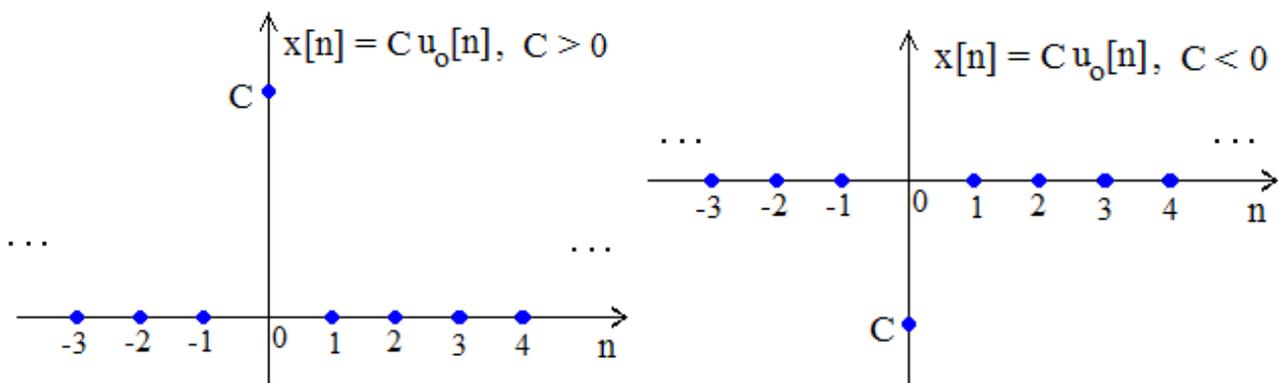


Fig. 2 – O sinal impulso unitário discreto multiplicado por uma constante: $C u_o[n]$. À esquerda para $C > 0$, impulso de *área* positiva e à direita para $C < 0$, impulso de *área* negativa.

■ Propriedades do impulso unitário discreto:

É fácil de se verificar que o impulso unitário (caso discreto), conforme definido acima, satisfaz as seguintes propriedades:

$$u_o[n - k] = 0, \text{ para } \forall n \neq k \quad \text{eq. (3.1)}$$

$$\sum_{k=l}^m u_o[n - k] = 1, \quad l < k < m \quad \text{eq. (3.2)}$$

$$\sum_{k=l}^m x[n] \cdot u_o[n - k] = x[k], \quad l < k < m \quad \text{eq. (3.3)}$$

A eq. (3.3) é chamada de “*soma de convolução*” e define a convolução entre os sinais $x[n]$ e $u_o[n]$.

■ O sinal degrau unitário discreto (“unit step”):

A notação do degrau unitário discreto é:

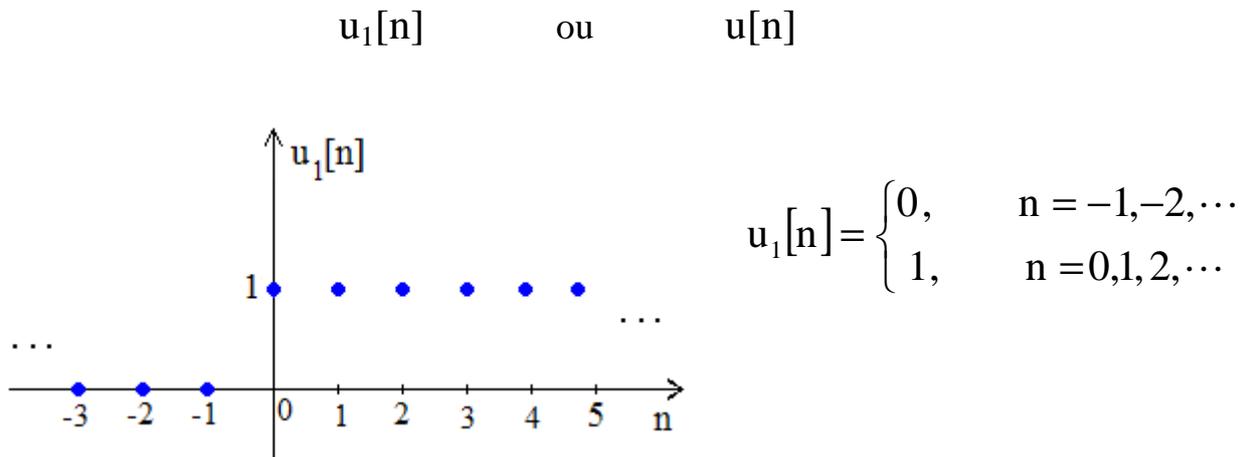


Fig. 3 – O sinal degrau unitário discreto $u_1[n]$.

Se multiplicarmos o degrau unitário $u_1[n]$ por uma constante $C \neq 0$ obtemos um degrau também, mas neste caso um degrau não unitário, um degrau de *amplitude* C , onde C pode ser até mesmo negativo. A figura 4 ilustra estes casos.

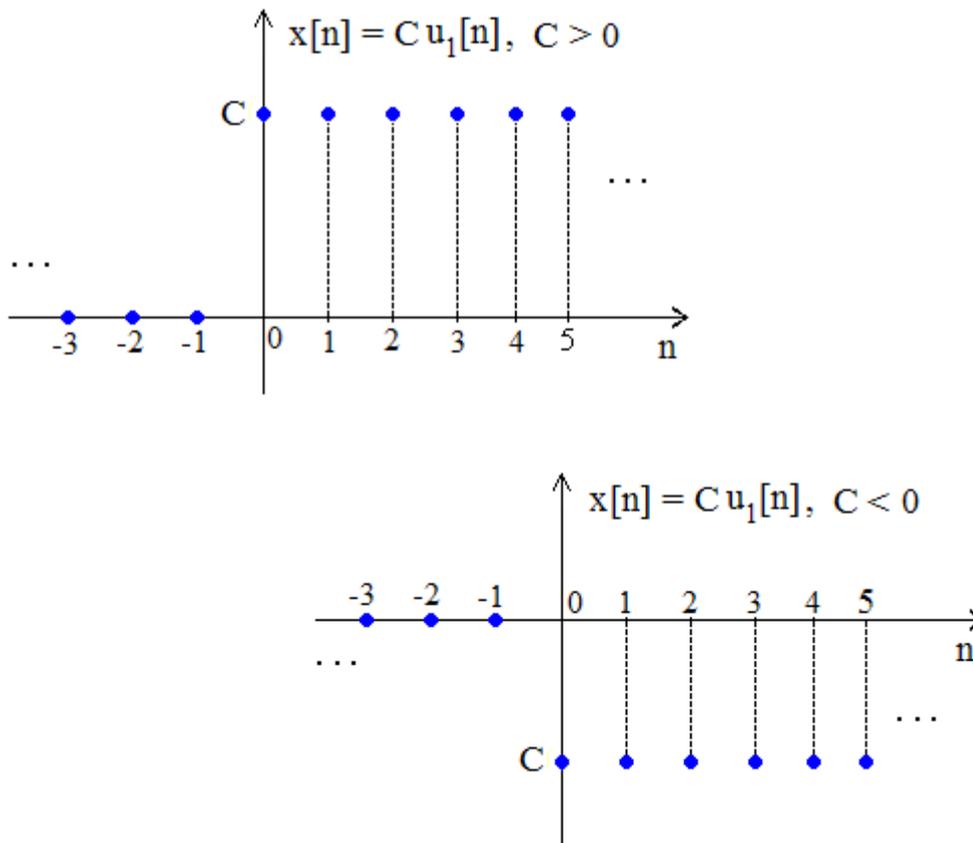


Fig. 4 – O sinal degrau unitário discreto multiplicado por uma constante: $C u_1[n]$. Para $C > 0$, degrau de *amplitude* positiva e $C < 0$, *amplitude* negativa.

■ Relação entre $u_0[n]$ e $u_1[n]$:

Algumas equações fáceis de serem verificadas e que relacionam o impulso unitário discreto $u_0[n]$ com o degrau unitário discreto $u_1[n]$ são dadas abaixo:

$$u_0[n] = u_1[n] - u_1[n-1], \quad \forall n \quad \text{eq. (3.4)}$$

$$u_1[n] = \sum_{m=-\infty}^n u_0[m], \quad \forall n \quad \text{eq. (3.5)}$$

■ O sinal rampa unitária discreta (“unit ramp”):

A notação da rampa unitária discreta é:

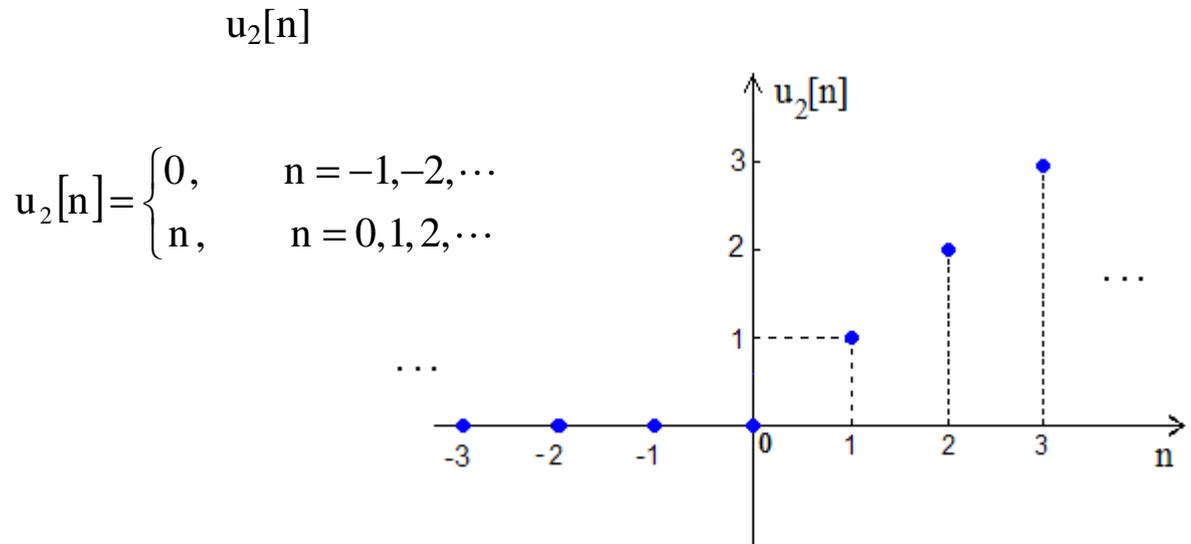


Fig. 5 – O sinal rampa unitária discreta $u_2[n]$.

Se multiplicarmos a rampa unitária $u_2[n]$ por uma constante $C \neq 0$ obtemos uma rampa também, mas neste caso não unitária, e de *declive* (ou *inclinação*) C , onde C pode ser até mesmo negativo. A figura 6 ilustra estes casos.

Portanto, um o impulso discreto fica bem determinado pela sua *área*, o degrau pela sua *amplitude* e a rampa pelo seu *declive* (ou *inclinação*). Estes termos farão mais sentido quando virmos o impulso, o degrau e a rampa contínuos, ou seja, os sinais singulares contínuos.

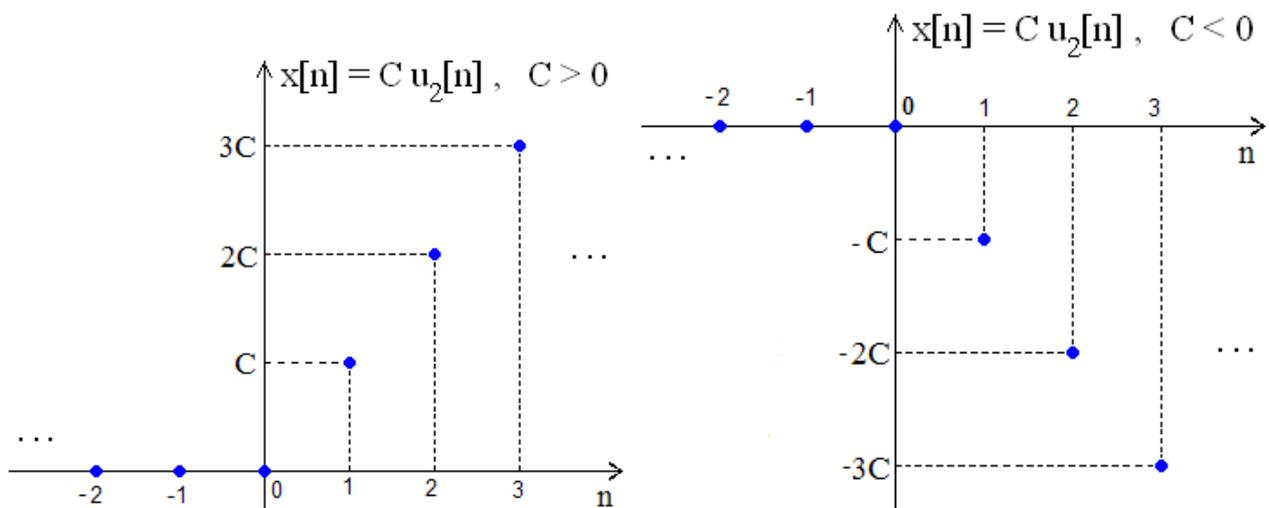


Fig. 6 – O sinal rampa unitária discreta multiplicado por uma constante: $C u_2[n]$. Para $C > 0$, rampa de *declive* positivo e $C < 0$, rampa de *declive* negativo.

■ Relação entre $u_1[n]$ e $u_2[n]$:

Algumas equações fáceis de serem verificadas e que relacionam o degrau unitário discreto $u_1[n]$ com a rampa unitária discreto $u_2[n]$ são dadas abaixo. Note que:

$$u_2[n] = n u_1[n], \quad \forall n \quad \text{eq. (3.6)}$$

ou também, na forma da eq. (3.5):

$$u_2[n+1] = \sum_{m=-\infty}^n u_1[m], \quad \forall n \quad \text{eq. (3.7)}$$

Por outro lado, na forma da eq. (3.4),

$$u_1[n] = u_2[n+1] - u_2[n], \quad \forall n \quad \text{eq. (3.8)}$$

■ A família de sinais singulares discretos:

Observando-se bem a relação entre $u_0[n]$ e $u_1[n]$ dada pelas eq. (3.4) e eq. (3.5) e a relação entre $u_1[n]$ e $u_2[n]$ dada acima pelas eq. (3.6), eq. (3.7) e eq. (3.8), vemos que estes sinais são recorrentes, ou seja, poderíamos continuar definindo $u_3[n]$, $u_4[n]$, etc. como uma família de sinais singulares discretos, onde:

$$u_k[n] = u_{k+1}[n] - u_{k+1}[n-1], \quad \forall n, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad \text{eq. (3.9)}$$

$$u_k[n] = \sum_{m=-\infty}^n u_{k-1}[m], \quad \forall n, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad \text{eq. (3.10)}$$

■ Exemplo 3.1:

Alguns sinais que podem ser escritos analiticamente em termos dos sinais do tipo degrau, impulso e rampa.

Os sinais $x[n]$ e $y[n]$ que aparecem na figura 7 são impulsos transladados e portanto podem ser representados por:

$$x[n] = 3u_o[n-2]$$

e

$$y[n] = -2u_o[n+1]$$

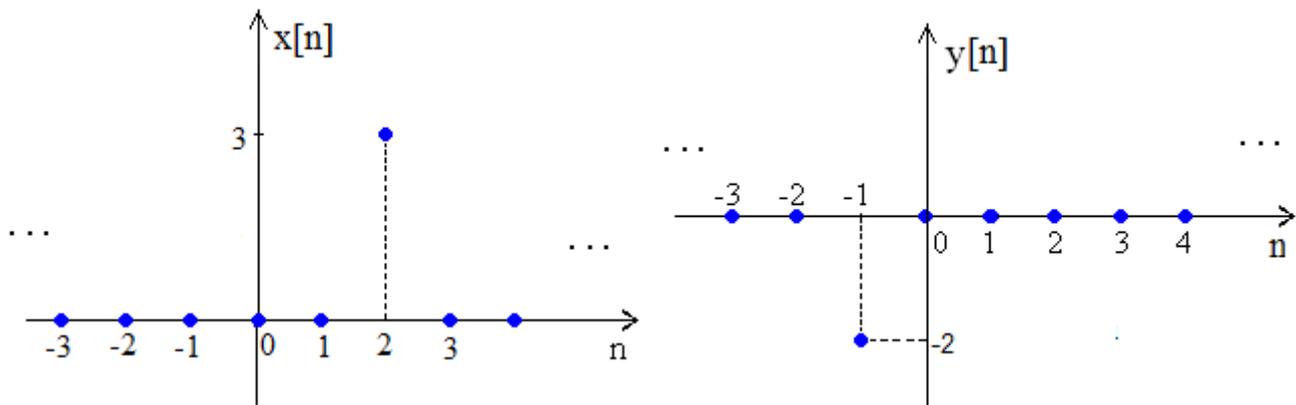


Fig. 7 – Sinais discretos impulsos transladados $x[n] = 3u_o[n-2]$ e $y[n] = -2u_o[n+1]$. □

■ Exemplo 3.2:

O sinal $x[n]$ da figura 8 pode ser expresso como um degrau revertido no tempo e transladado:

$$x[n] = -2u_1[-n+2]$$

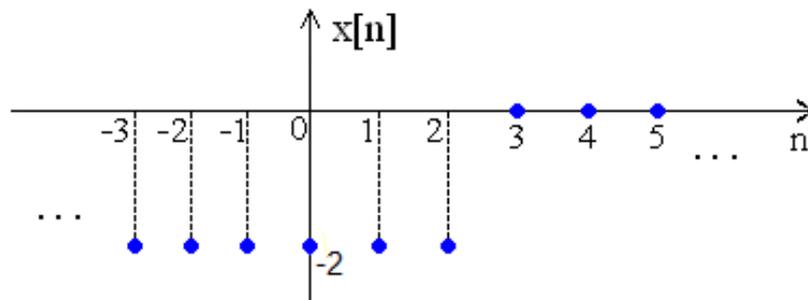


Fig. 8 – Sinal discreto degrau revertido no tempo e transladado $x[n] = -2u_1[-n+2]$.

■ Exemplo 3.3:

Considere o sinal $x[n]$ da figura 9. Este sinal tem valores não nulos à esquerda da origem (isto é, $x[n] \neq 0$ para valores de $n < 0$).

Ao multiplicarmos $x[n]$ por $u_1[n]$ obtemos um sinal que tem todos os seus valores nulos à esquerda da origem, isto é,

$$x[n] \cdot u_1[n] = 0, \quad n = -1, -2, \dots,$$

ao passo que é idêntico à $x[n]$ na origem e à direita da origem, ou seja,

$$x[n] \cdot u_1[n] = x[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

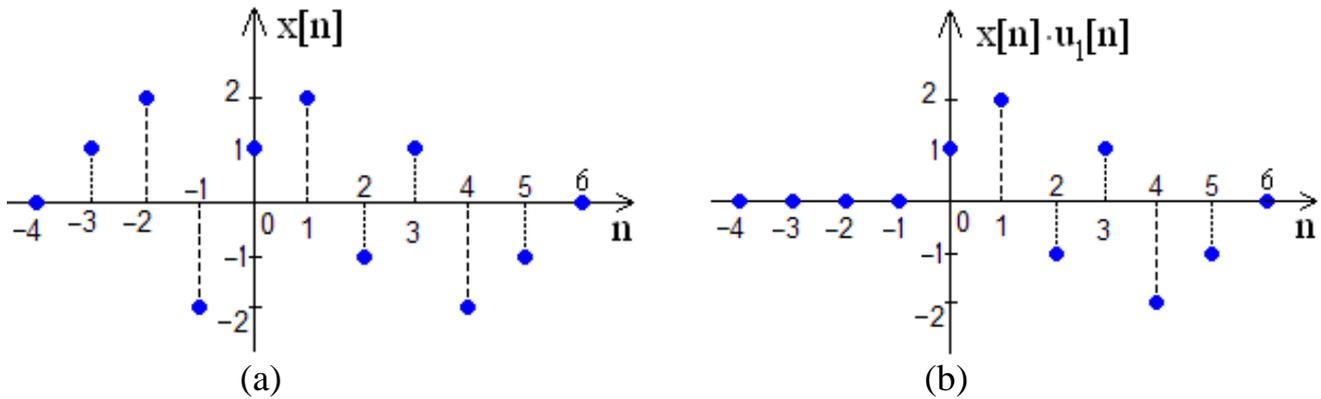


Fig. 9 – (a) O sinal $x[n]$ com valores de $x[n] \neq 0$ à esquerda da origem e (b) o sinal $x[n] \cdot u_1[n]$, que tem todos os seus valores nulos à esquerda da origem mas é idêntico à $x[n]$ na origem e à sua direita.

■ **Exemplo 3.4:**

O sinal $x[n]$ da figura 9 pode ser expresso como:

$$x[n] = u_1[n] - \sum_{k=1}^3 k \cdot u_0[n - k]$$

onde tem-se um degrau unitário, e depois retira-se valores pontualmente com impulsos em $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$, para se ter os valores correctos de $x[1]$, $x[2]$ e $x[3]$.

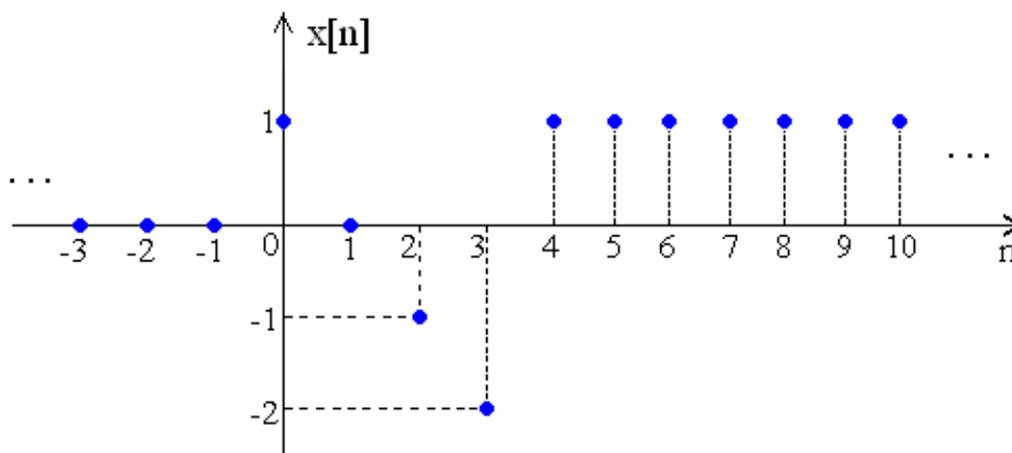


Fig. 9 – Sinal discreto $x[n] = u_1[n] - u_2[n] + u_2[n-4] + u_1[n-4]$.

Entretanto, $x[n]$ também pode ser representado, de forma equivalente pela expressão:

$$x[n] = u_1[n] - u_2[n] + u_2[n - 4] + u_1[n - 4]$$

□

■ Exemplo 3.5:

Em muitos casos os sinais têm mesmo várias expressões diferentes. Os sinal $x[n]$ que aparece na figura 10 pode ser representado por:

$$x[n] = 2u_1[n] - 2u_o[n] - u_o[n - 1]$$

onde tem-se um degrau de amplitude 2, e depois tira-se valores pontualmente com impulsos em $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$, para se ter os valores correctos de $x[1]$, $x[2]$ e $x[3]$.

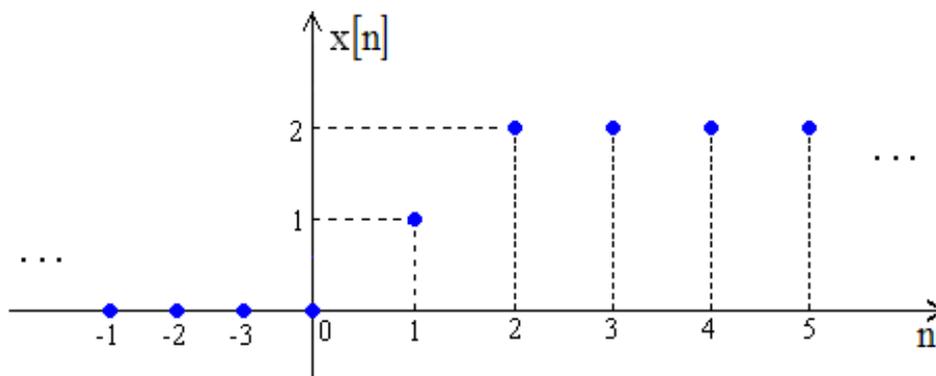


Fig. 10 – Sinal discreto $x[n] = 2u_1[n] - 2u_o[n] - 2u_o[n-1]$.

mas observe que $x[n]$ também pode ser representado, de forma equivalente pela expressão:

$$x[n] = 2u_1[n - 1] - u_o[n - 1]$$

ou também por:

$$x[n] = 2u_1[n - 2] + u_o[n - 1]$$

ou ainda, pela subtracção de duas rampas:

$$x[n] = u_2[n] + u_2[n - 2]$$

□

■ **Exemplo 3.6:**

O sinal discreto $x[n]$ da figura 11 é uma sequência de pulsos de largura 3. Este sinal pode ser escrito em termos de degraus da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x[n] &= u_1[n] - u_1[n - 3] + u_1[n - 6] - u_1[n - 9] + \dots \\ &= u_1[n] + \sum_{k=1,2,3,\dots}^{\infty} (-1)^{3k} \cdot u_1[n - 3k] \end{aligned}$$

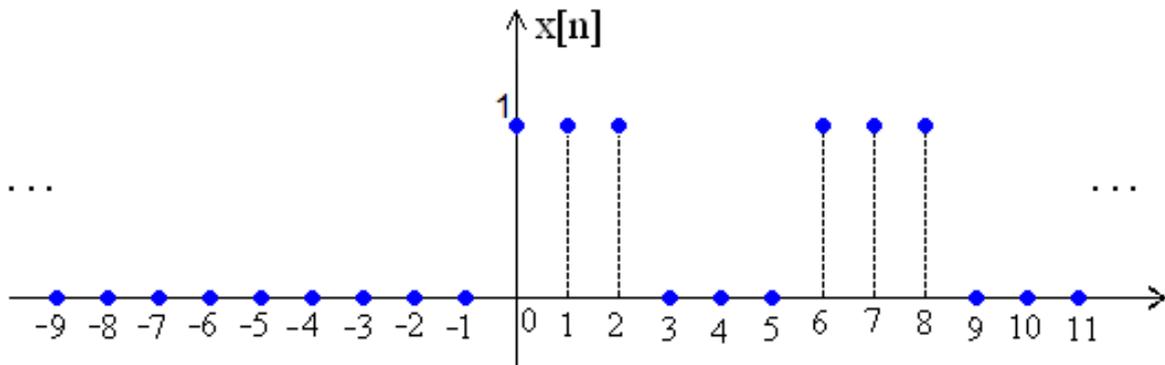


Fig. 11 – Sinal discreto $x[n]$, sequência de pulsos de largura 3.

Alternativamente este sinal $x[n]$ pode ser escrito em termos de impulsos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x[n] &= u_0[n] + u_0[n - 1] + u_0[n - 2] + u_0[n - 6] + u_0[n - 7] + u_0[n - 8] + \dots \\ &= \sum_{k=0,1,2,3,\dots}^{\infty} u_0[n - 6k] + u_0[n - (6k + 1)] + u_0[n - (6k + 2)] \\ &= \sum_{k=0,1,2,3,\dots}^{\infty} \sum_{\ell=0,1,2}^2 u_0[n - (6k + \ell)] \end{aligned}$$

□

3.3 – Sinais singulares contínuos

■ O sinal impulso unitário (“unit impulse”):

O sinal impulso unitário contínuo também é chamado de *função delta* ou *delta de Dirac*, em alusão ao físico e matemático britânico Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1982). O impulso unitário tem a seguinte notação:

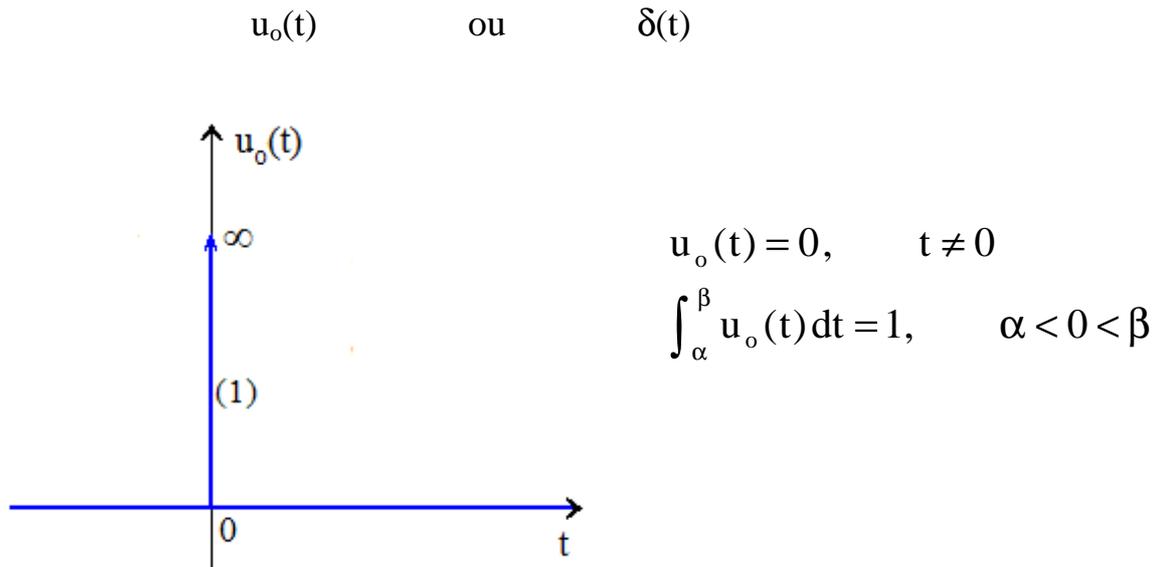


Fig. 12 – O sinal impulso unitário contínuo $u_o(t)$

O impulso unitário $u_o(t)$ pode ser interpretado como o limite de uma sequência de pulsos de área 1.

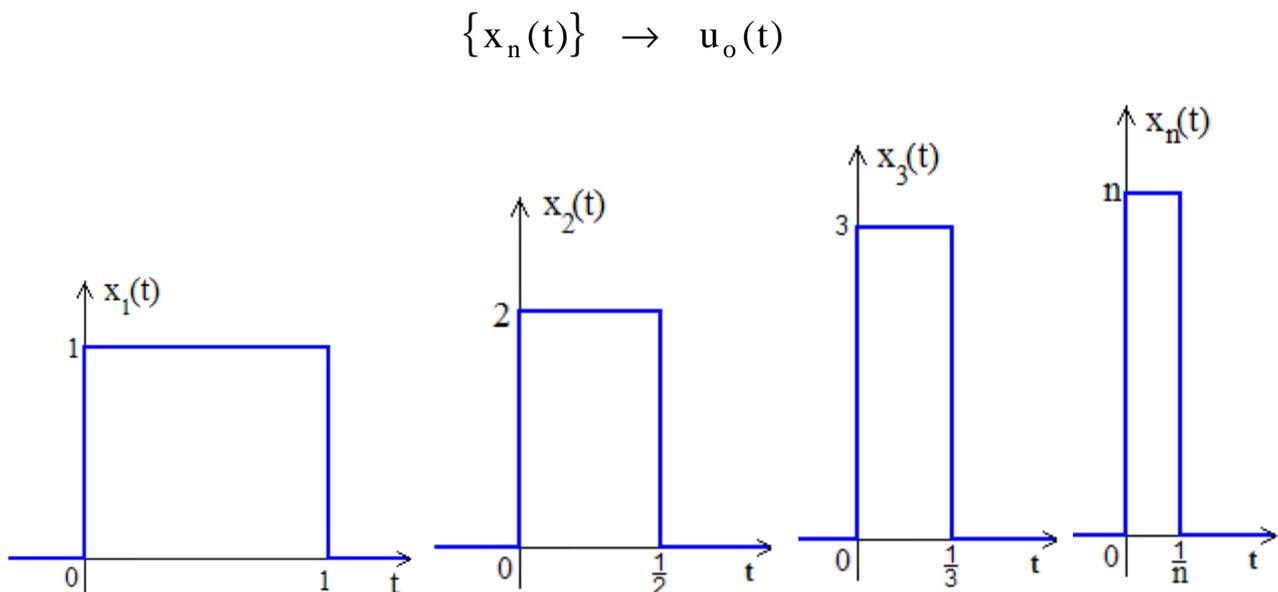


Fig. 13 – Sequência de pulsos de área igual a 1 que convergem para o sinal impulso unitário contínuo $u_o(t)$.

Note que os sinais $x_n(t)$ (pulsos) acima são cada vez mais magros e mais altos, a medida que n cresce, mas entretanto, eles têm todos área sob a curva igual a 1.

Desta forma é fácil de compreender que o impulso unitário $u_o(t)$, sendo o limite desta sequência de pulsos $\{x_n(t)\}$, vai a infinito em $t = 0$ e a área (i.e., a integral sob a curva) no intervalo $[\alpha, \beta]$ (para $\alpha < 0 < \beta$) é igual a 1.

Se multiplicarmos o impulso unitário $u_o(t)$ por uma constante $C \neq 0$ obtemos um impulso também, mas neste caso não unitário, de *área* C , onde C pode ser até mesmo negativo. A figura 14 ilustra estes casos.

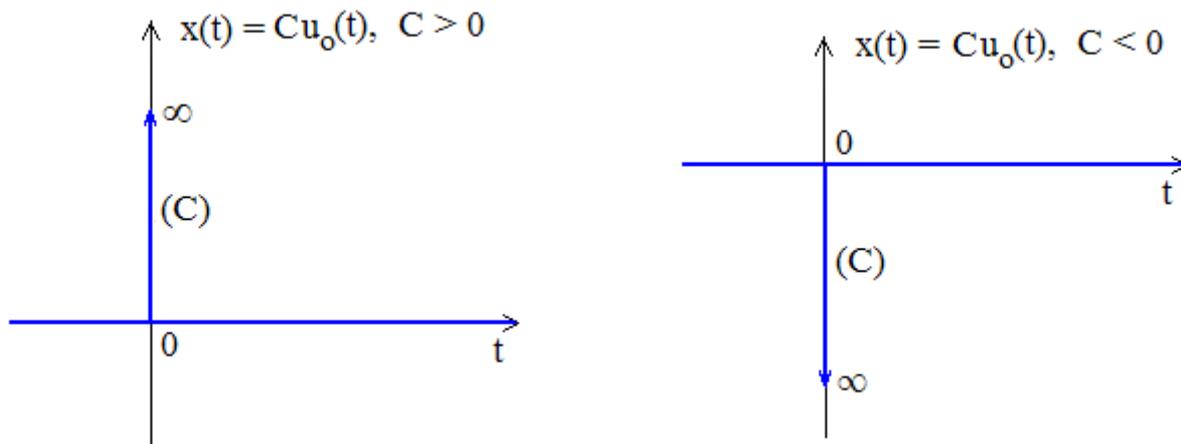


Fig. 14 – O sinal impulso unitário contínuo multiplicado por uma constante: $C u_o(t)$. À esquerda para $C > 0$, impulso de *área* positiva e à direita para $C < 0$, impulso de *área* negativa.

■ Propriedades do impulso unitário contínuo:

É fácil de se verificar que o impulso unitário (caso contínuo), conforme definido acima, satisfaz as seguintes propriedades:

$$u_o(t - a) = 0, \text{ para } \forall t \neq a \quad \text{eq. (3.11)}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} u_o(t - a) dt = 1, \quad \alpha < a < \beta \quad \text{eq. (3.12)}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t) \cdot u_o(t - a) dt = x(a), \quad \alpha < a < \beta \quad \text{eq. (3.13)}$$

As expressões das equações eq. (3.11), eq. (3.12) e eq. (3.13) correspondem, no caso discreto, às equações: eq. (3.1), eq. (3.2) e eq. (3.3).

A eq. (3.13) é chamada de “*integral de convolução*” e define a convolução entre os sinais $x(t)$ e o impulso unitário $u_0(t)$.

■ O sinal degrau unitário (“*unit step*”):

A notação do degrau unitário contínuo é:

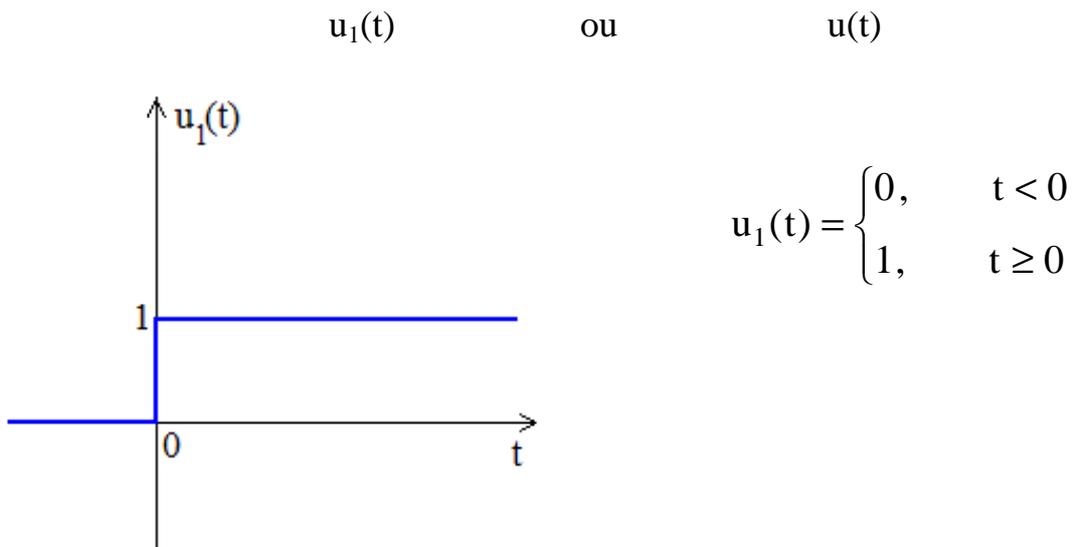


Fig. 15 – O sinal degrau unitário contínuo $u_0(t)$

Se multiplicarmos o degrau unitário $u_1(t)$ por uma constante $C \neq 0$ obtemos um degrau também, mas neste caso um degrau não unitário, um degrau de *amplitude* C , onde C pode ser até mesmo negativo. A figura 16 ilustra isso.

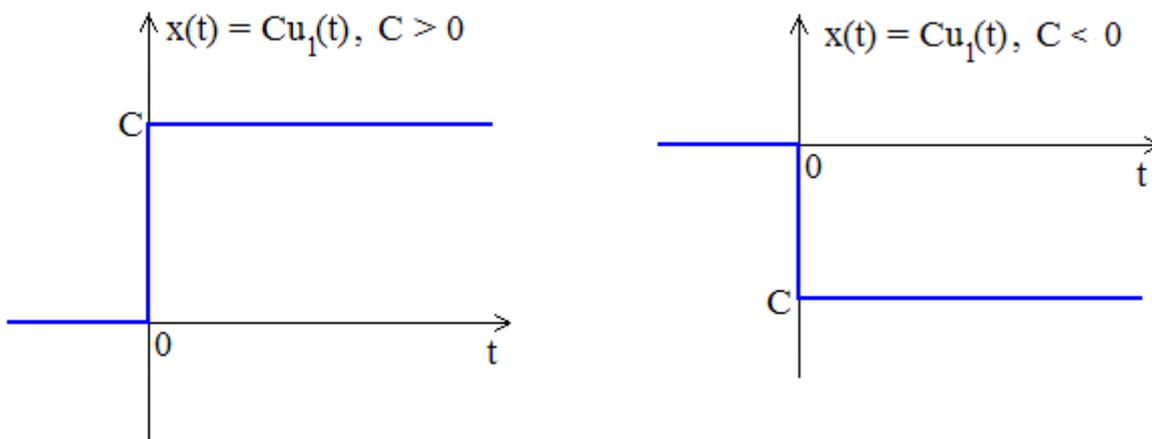


Fig. 16 – O sinal degrau unitário contínuo multiplicado por uma constante: $C u_1(t)$. À esquerda, para $C > 0$, degrau de *amplitude* positiva, e à direita. $C < 0$, degrau de *amplitude* negativa.

■ Relação entre $u_1(t)$ e $u_0(t)$:

O degrau unitário $u_1(t)$ é a integral do impulso unitário $u_0(t)$, enquanto que, por sua vez, o impulso unitário $u_0(t)$ é a derivada do degrau unitário $u_1(t)$, ou seja:

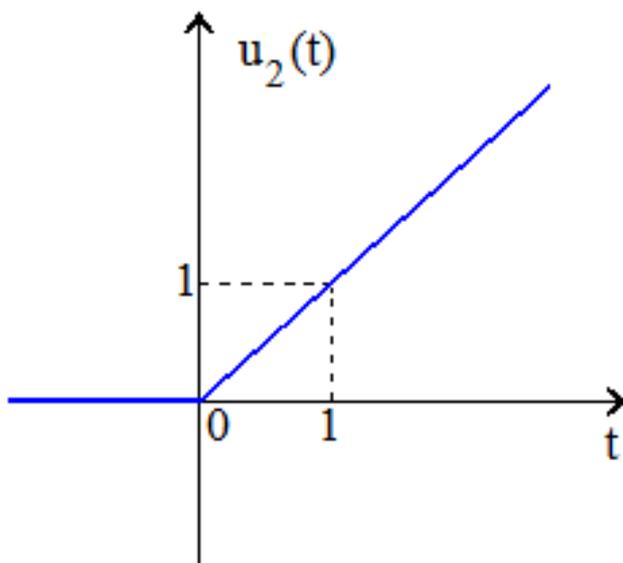
$$u_1(t) = \int_{-\infty}^t u_0(t) dt \quad \text{eq. (3.14)}$$

$$u_0(t) = \frac{du_1(t)}{dt} \quad \text{eq. (3.15)}$$

■ O sinal rampa unitária (“unit ramp”):

A notação da rampa unitária contínua é:

$u_2(t)$



$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

Fig. 17 – O sinal rampa unitária contínua $u_2(t)$

Se multiplicarmos a rampa unitária $u_2(t)$ por uma constante $C \neq 0$ obtemos uma rampa, mas neste caso não unitária, uma rampa de *declive* (ou *inclinação*) C , onde C pode ser até mesmo negativo. A figura 18 ilustra isso.

Portanto, um o impulso, ou função delta de Dirac, fica bem determinado pela sua *área*, o degrau pela sua *amplitude* e a rampa pelo seu *declive* (ou *inclinação*).

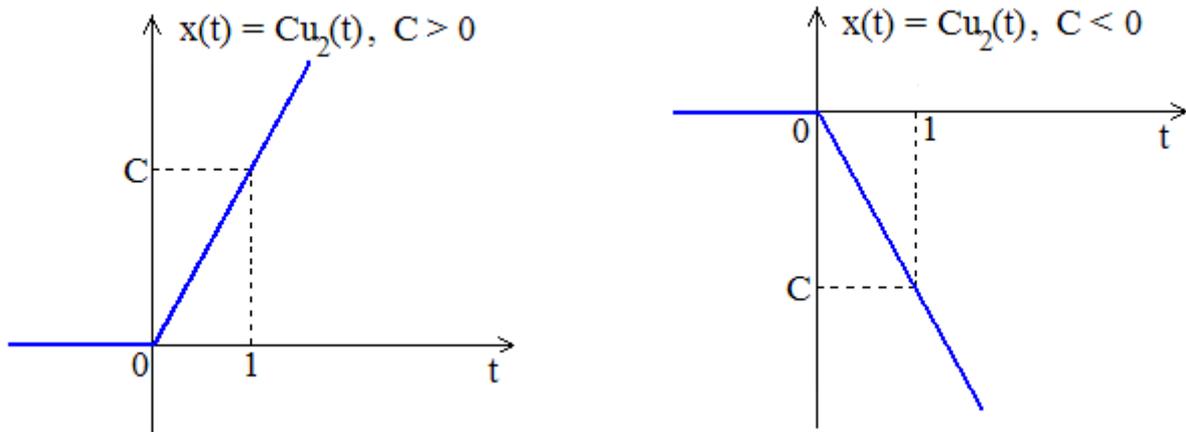


Fig. 18 – O sinal rampa unitária contínua multiplicado por uma constante: $C u_2(t)$. À esquerda, para $C > 0$, rampa de *declive* positivo, e à direita, para $C < 0$, rampa de *declive* negativo.

■ Relação entre os 3 sinais $u_0(t)$, $u_1(t)$ e $u_2(t)$:

A rampa unitária $u_2(t)$ é a integral do degrau unitário $u_1(t)$, e a integral dupla do impulso unitário $u_0(t)$. Por outro lado, o degrau unitário $u_1(t)$ é a derivada da rampa unitária $u_2(t)$, e o impulso unitário é a derivada segunda da rampa unitária $u_2(t)$. Ou seja:

$$u_1(t) = \frac{du_2(t)}{dt} \quad \text{eq. (3.16)}$$

$$u_0(t) = \frac{d^2u_2(t)}{dt^2} \quad \text{eq. (3.17)}$$

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^t u_1(t) dt \quad \text{eq. (3.18)}$$

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t u_0(t) dt \quad \text{eq. (3.19)}$$

■ A família dos sinais singulares contínuos:

Os sinais singulares na verdade são uma família bem mais ampla do que apenas $u_0(t)$, $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Eles saem recorrentes uns dos outros pelas fórmulas:

$$\boxed{u_k(t) = \frac{du_{k+1}(t)}{dt}, \quad k = 0, 1, 2, \dots} \quad \text{eq. (3.20)}$$

$$\boxed{u_k(t) = \int_{-\infty}^t u_{k-1}(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots} \quad \text{eq. (3.21)}$$

Desta forma poderíamos continuar definindo $u_3(t)$, $u_4(t)$, ..., etc.

Por exemplo, o $u_3(t)$ tem a expressão:

$$u_3(t) = \frac{t^2}{2}, \quad t > 0$$

ou seja, o sinal $u_3(t)$ é função semi-parabólica.

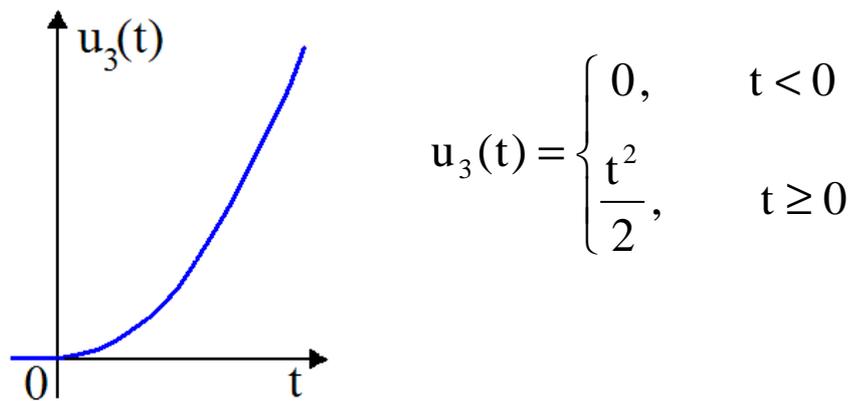


Fig. 19 – O sinal $u_3(t)$, função semi-parabólica.

e facilmente se observa que a derivada de $u_3(t)$ é $u_2(t)$. Por outro lado, a expressão de $u_4(t)$ é dada por:

$$u_4(t) = \frac{t^3}{3 \cdot 2} = \frac{t^3}{3!}, \quad t > 0$$

e novamente se observa que a derivada de $u_4(t)$ é $u_3(t)$. Por sua vez, a expressão de $u_5(t)$ é dada por:

$$u_5(t) = \frac{t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{t^4}{4!}, \quad t > 0$$

logo, a derivada de $u_5(t)$ é $u_4(t)$, e assim por diante. Desta forma temos a expressão geral:

$$u_{n+1}(t) = \frac{t^n}{n!}, \quad t > 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{eq. (3.22)}$$

As expressões acima, definidas apenas para $t > 0$, assume-se que $u_{n+1}(t) = 0, t < 0$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ pois as sinais singulares são sempre nulos à esquerda da origem.

■ Exemplo 3.7:

O sinal $x(t)$ da figura 20 é a soma de dois sinais impulsos, de áreas π e $-\pi$, transladados. Facilmente verifica-se que pode ser escrito na forma:

$$x(t) = \pi[u_o(t - t_o) - u_o(t + t_o)]$$

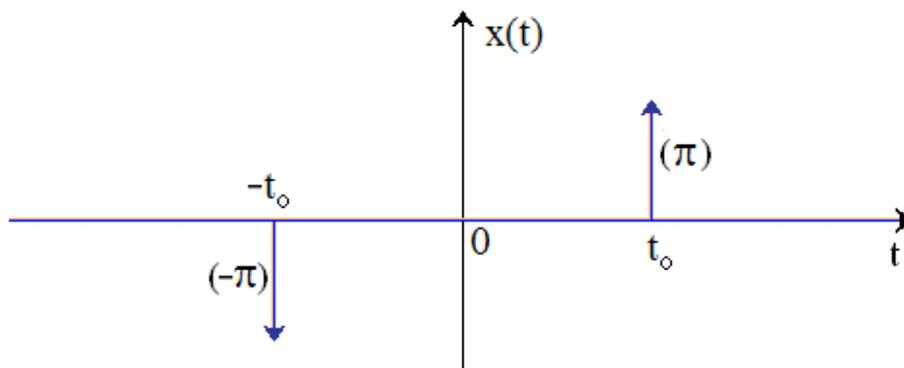


Fig. 20 – Sinal $x(t)$, soma de impulsos transladados.

□

■ Exemplo 3.8:

O sinal $x(t)$ da figura 21 é a soma de infinitos sinais impulsos transladados e facilmente verifica-se que pode ser escrito na forma:

$$x(t) = u_o(t) - u_o(t - 1) + u_o(t - 2) - u_o(t - 3) + \dots$$

ou seja,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot u_o(t - k)$$

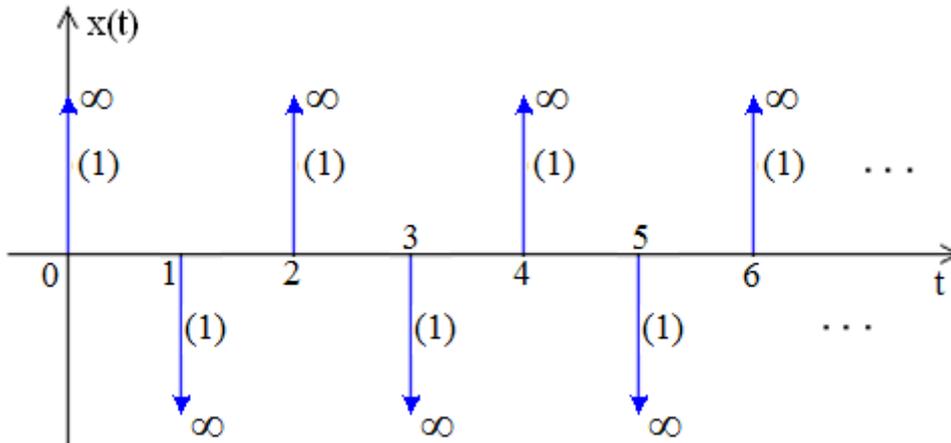


Fig. 21 – Sinal $x(t)$, soma de impulsos transladados.

□

■ **Exemplo 3.9:**

Os sinais $x(t)$, $y(t)$ e $v(t)$ que aparecem na figura 22 são degraus transladados que podem ser escritos em termos de sinais singulares do tipo degrau que foram transladados.

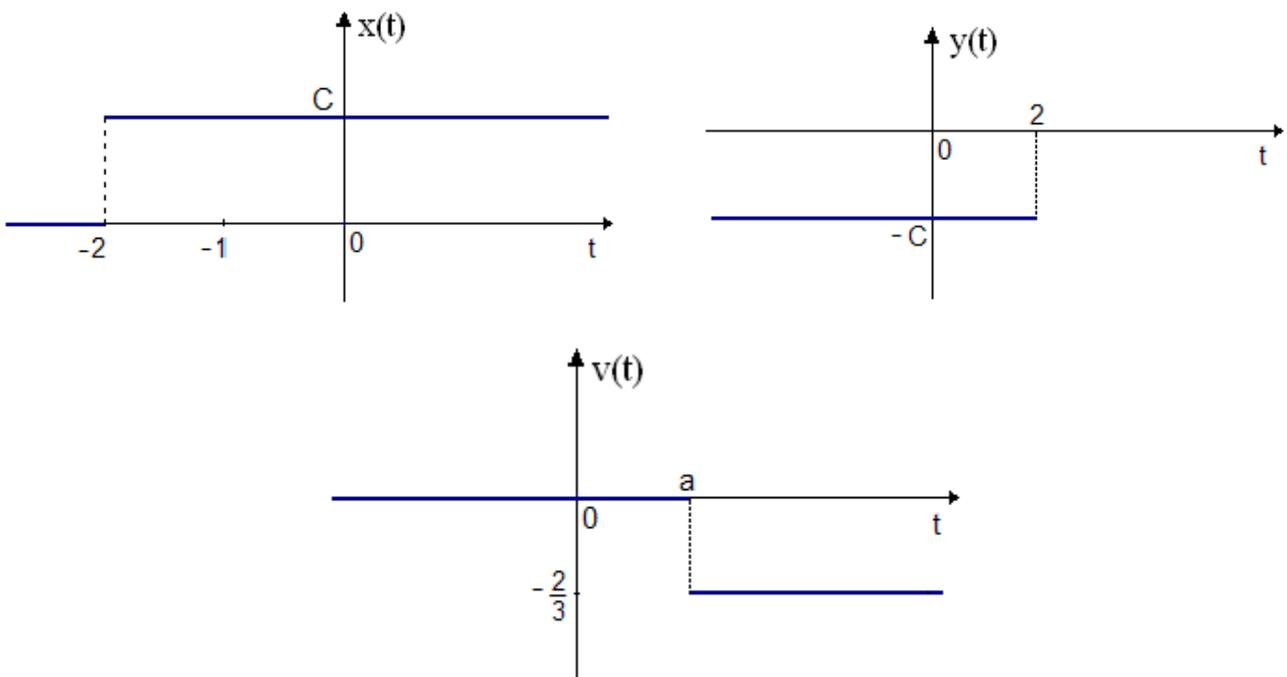


Fig. 22 – Os sinais $x(t)$, $y(t)$ e $v(t)$, degraus transladados.

Facilmente observa-se que as expressões de $x(t)$, $y(t)$ e $v(t)$ são:

$$x(t) = C \cdot u_1(t + 2)$$

$$y(t) = -C \cdot u_1(2 - t)$$

$$v(t) = -\frac{2}{3} u_1(t - a)$$

□

■ Exemplo 3.10:

Aqui vemos dois sinais que podem ser escritos analiticamente em termos dos sinais singulares do tipo degrau e rampa. Em alguns casos os sinais têm várias expressões diferentes. Facilmente observa-se que as expressões de $x(t)$ e $y(t)$ da figura 23 são:

$$x(t) = u_1(t) - u_2(t - 1) + u_2(t - 2)$$

$$y(t) = u_2(t) - u_2(t - 1) - u_1(t - 3)$$

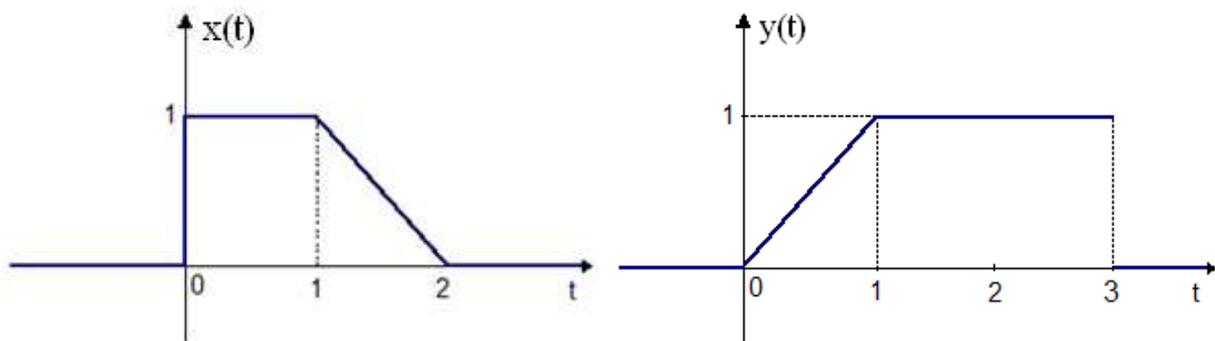


Fig. 23 – Os sinais $x(t)$ e $y(t)$ podem ser expressos por degraus e rampas.

□

■ Exemplo 3.11:

Os sinais das figuras 24 e 24 são constituídos de pulsos ou também chamados, “*ondas quadradas*” e facilmente verifica-se que eles podem ser expressos exclusivamente em termos de degraus. Pode-se expressar $x(t)$ como:

$$x(t) = u_1(t) - u_1(t - 1) + u_1(t - 2) - u_1(t - 3)$$

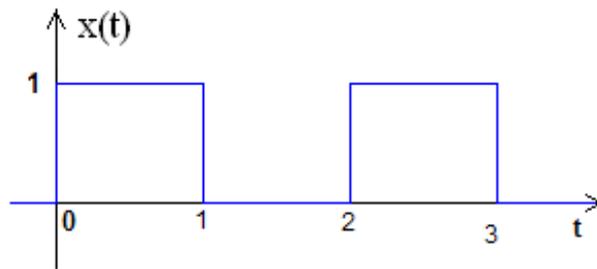


Fig. 24 – O sinal $x(t)$ constituído de 2 pulsos.

e $y(t)$ como:

$$y(t) = u_1(t) - 2 \cdot u_1(t - 1) + 2 \cdot u_1(t - 2) - 2 \cdot u_1(t - 3) + \dots =$$

$$= u_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot (-1)^k \cdot u_1(t - k)$$

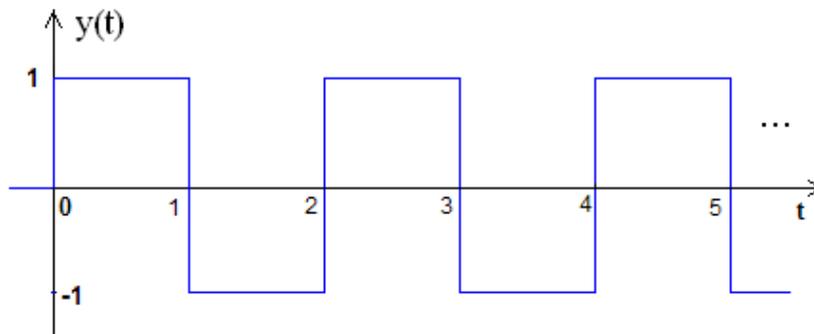


Fig. 25 – O sinal $y(t)$ constituído de infinitos pulsos, “onda quadrada”.

□

■ **Exemplo 3.12:**

Os dois sinais que aparecem nas figuras 26 e 27 podem ser escritos exclusivamente em termos de rampas. Facilmente verifica-se que as expressões de $x(t)$ da figura 25 é dada por:

$$x(t) = u_2(t - 1) - 2u_2(t - 2) + u_2(t - 3)$$

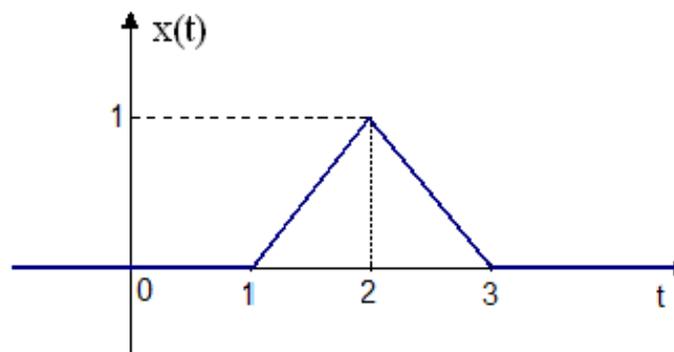


Fig. 26 – O sinal $x(t)$ pode ser expresso apenas por rampas.

enquanto que a expressão de $y(t)$ da figura 26 é dada por

$$\begin{aligned}
 y(t) &= u_2(t-1) - 2 \cdot u_2(t-2) + 2 \cdot u_2(t-4) - 2 \cdot u_2(t-6) + 2 \cdot u_2(t-8) - \dots \\
 &= u_2(t-1) + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} 2 \cdot (-1)^{(k/2)} \cdot u_2(t-k) \\
 &= u_2(t-1) + \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} 2 \cdot (-1)^{(k)} \cdot u_2(t-2k)
 \end{aligned}$$

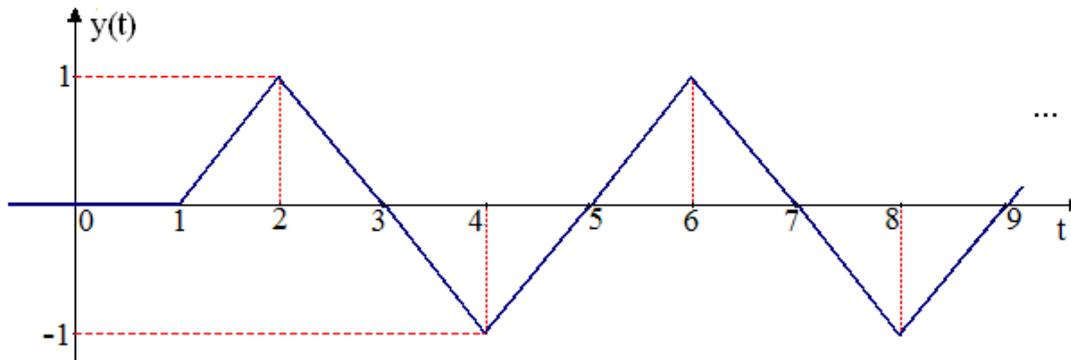


Fig. 27 – O sinal $y(t)$ pode ser expresso por uma sequência infinita de rampas. □

■ **Exemplo 3.13:**

Considere o sinal $x(t)$ da figura 26 (Exemplo 3.12), que repetimos abaixo na figura 28 e o impulso transladado de a , $u_0(t-a)$, ilustrado na figura 29.

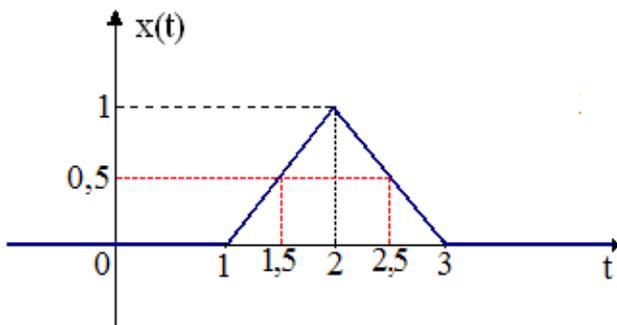


Fig. 28 – O sinal $x(t)$ do Exemplo 3.12.

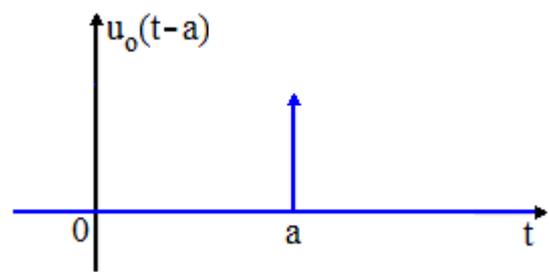


Fig. 29 – O sinal impulso transladado.

Usando a eq. (3.13) temos abaixo alguns exemplos do uso da integral de convolução para $a = 1,5$, $a = 2$ e $a = 2,5$:

$$\int_1^3 x(t) \cdot u_0(t-1,5) dt = x(1,5) = 0,5$$

$$\int_1^3 x(t) \cdot u_0(t-2) dt = x(2) = 1$$

$$\int_1^3 x(t) \cdot u_0(t-2,5) dt = x(2,5) = 0,5$$

$$\int_1^2 x(t) \cdot u_0(t-2,5) dt = 0$$