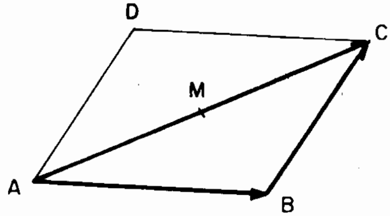
4. Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Resolução

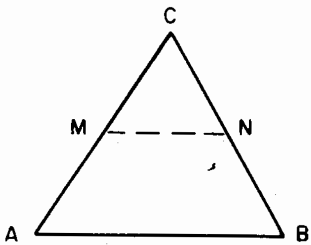
Considere o paralelogramo ABCD, de diagonais AC e DB. Seja M o ponto médio de AC. Vamos provar que M é também ponto médio de BD. Ora, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD}$. Logo, M é ponto médio de BD.



5. Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida deste lado.

Resolução

Seja o triângulo ABC, e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente.



A afirmação feita equivale à seguinte relação: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (por quê?) a qual passaremos a provar.

Podemos escrever

$$2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$$
$$2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB}$$

Somando membro a membro, resulta $2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$$\therefore\ 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Observação

você só poderá "identificar os coeficientes" (algo semelhante ao Princípio de Identidade de Polinômios) quando os vetores envolvidos forem LI.

Exemplo: se $\vec{u} = 2\vec{v} + \vec{w}$, tem-se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0\,\vec{u} + 3\,\vec{v} + 2\,\vec{w}$.

3. Prove que se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, então $(\vec{u} + \vec{v},\ \vec{u} - \vec{v})$ também é LI.

Resolução

Sejam α e β escalares tais que

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \qquad (\alpha)$$

Devemos demonstrar que α e β são obrigatoriamente nulos.

Aplicando as propriedades da adição e da multiplicação por escalar, obtemos de (α) $\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{u} - \beta\vec{v} = \vec{0}$, donde $(\alpha + \beta)\vec{u} + (\alpha - \beta)\vec{v} = \vec{0}$. Mas, por hipótese, $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI; logo, a igualdade acima só é possível se $\alpha + \beta = 0$ e $\alpha - \beta = 0$.

Como a única solução do sistema

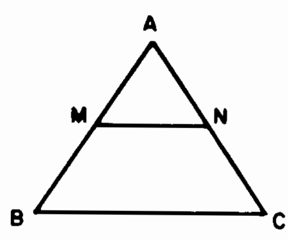
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

é $\alpha = \beta = 0$, provamos o que queríamos.

Atenção.

Seria péssima estratégia tentar resolver este exercício partindo de uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ igualada a $\vec{0}$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. O motivo é que, como $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, isso acarreta $\alpha = \beta = 0$, e não se conclui absolutamente nada a respeito da dependência ou independência linear dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, o que era o nosso propósito. Assim, quando se quer provar a independência linear de uma seqüência de vetores, deve-se partir de uma combinação linear dos vetores *dessa seqüência*, igual a $\vec{0}$.

4. Na figura, ABC é um triângulo e M é o ponto médio de AB. Sabendo que MN é paralelo a BC, prove que N é o ponto médio de AC.



Resolução

Vamos transpor o problema para a linguagem vetorial.

Se ABC é um triângulo, temos (por exemplo) que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \text{ é LI} \qquad (\alpha)$$

Sendo M o ponto médio de AB, concluímos que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \qquad (\beta)$$

A hipótese de ser MN paralelo a BC se traduz por

$$\overrightarrow{MN} = \alpha\,\overrightarrow{BC} \qquad (\gamma)$$

Finalmente, como N pertence ao lado AC, podemos afirmar que

$$\overrightarrow{AN} = \beta\,\overrightarrow{AC} \qquad (\delta)$$

Agora, nosso objetivo é provar que $\beta = \frac{1}{2}$

De $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM}$ segue por (β) e (γ):

$$\overrightarrow{AN} = \alpha\,\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (\epsilon)$$

Por outro lado, por (δ),

$$\overrightarrow{AN} = \beta\,\overrightarrow{AC} = \beta(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}) = \beta\,\overrightarrow{BC} + \beta\,\overrightarrow{AB} \qquad (\lambda)$$

Comparando (ϵ) e (λ), obtemos:

$$\alpha\,\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \beta\,\overrightarrow{BC} + \beta\,\overrightarrow{AB}$$

Agora, por (α) e pelo primeiro exercício, concluímos que $\alpha = \beta$ e $\frac{1}{2} = \beta$, como queríamos. Observe que fica também provado que o comprimento de MN é igual à metade do comprimento de BC.