01. Equação geral do plano que contém o ponto A = (3, 0, 1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$.

Resp.: $2x - y + 3z - 9 = 0$

02. Achar a equação do plano que passa pelos pontos P = (1, 2, 3) e Q = (1, 2, 0) e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$.

Resp.: $y - 2 = 0$

03. Obter a equação do plano que contém os pontos A = (3, 0, 1), B = (2, 1, 1) e C = (3, 2, 2).

Resp.: $x + y - 2z - 1 = 0$

Exemplo:

Determinar os pontos de interseção do plano α: $4x + 3y - z - 12 = 0$ com os eixos coordenados.

a) Interseção com o eixo x.

Fazendo nulos y e z na equação de α:
$4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A = (3, 0, 0)$

b) Interseção com o eixo y.

Fazendo $x = z = 0$:
$3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B = (0, 4, 0)$

c) Interseção com o eixo z.

Fazendo $x = y = 0$:
$-z - 12 = 0 \Rightarrow z = -12 \Rightarrow C = (0, 0, -12)$

Exemplo:

Equação do plano que passa pelo ponto A = (1, 3, 5) e seja ortogonal ao vetor $\vec{n} = (2, 4, 6)$.

Solução:

a) Equação do plano

$\alpha: 2x + 4y + 6z + d = 0$

b) $A = (1, 3, 5) \in \alpha$

$2(1) + 4(3) + 6(5) + d = 0 \Rightarrow d = -44$

c) Resposta: $\alpha: 2x + 4y + 6z - 44 = 0$

Exercícios

01. Equação geral do plano que contém o ponto $P_o = (0, 1, 3)$ e seja ortogonal ao vetor $\vec{n} = (3, 2, 5)$.

Resp.: $3x + 2y + 5z - 17 = 0$

02. Determine um vetor unitário perpendicular ao plano $\sqrt{2}x + y - z + 5 = 0$.

Resp.: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ou o seu oposto.

6. CASOS PARTICULARES DA EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

A nulidade de um ou mais coeficientes na equação geral do plano, fará com que este ocupe um posicionamento particular em relação aos eixos coordenados.

Na equação $ax + by + cz + d = 0$, se:

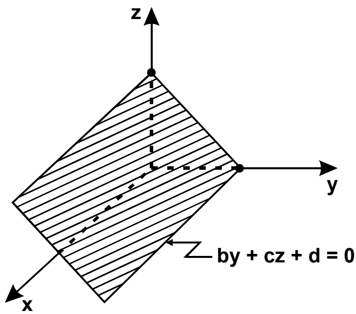
1.º caso:

$\mathbf{d = 0} \Rightarrow ax + by + cz = 0$ (com $a . b . c \neq 0$)
O plano contém a origem.

Justificativa:
O ponto $O = (0, 0, 0)$ verifica a equação $ax + by + cz = 0$.
Se o termo independente for nulo, o plano conterá a origem.

2.º Caso:

a) $\mathbf{a = 0} \Rightarrow by + cz + d = 0$ (com $b . c . d \neq 0$)
O plano é paralelo ao eixo x.



Justificativa:
O vetor normal ao plano $by + cz + d = 0$ é $\vec{n} = (0, b, c)$ que é perpendicular ao eixo x. Logo, o plano é paralelo ao eixo x.

Analogamente, se:

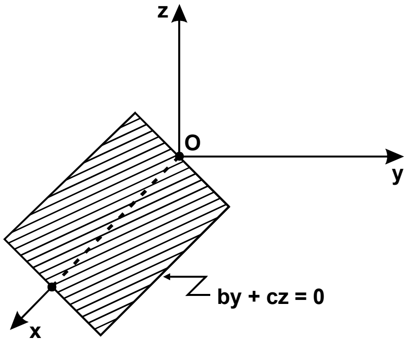
a) $\mathbf{b = 0} \Rightarrow ax + cz + d = 0$ (com $a . c . d \neq 0$)
O plano é paralelo ao eixo y.

c) $\mathbf{c = 0} \Rightarrow ax + by + d = 0$ (com $a . b . d \neq 0$)
O plano é paralelo ao eixo z.

EM RESUMO: O plano é sempre paralelo ao eixo da coordenada ausente.

3.º Caso:

a) $\mathbf{a = d = 0} \Rightarrow by + cz = 0$ (com $b \cdot c \neq 0$)
O plano conterá o eixo x.



Justificativa:
O plano by + cz = 0 além de conter a origem (pois d = 0) é paralelo ao eixo x, pois tem como vetor normal o $\vec{n} = (0, b, c)$.

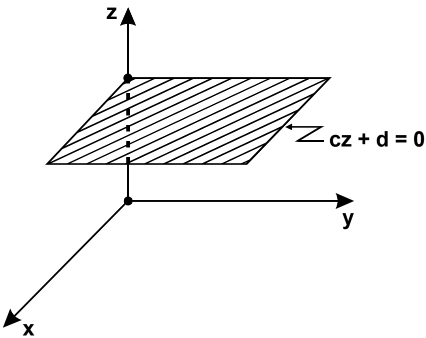
Analogamente, se:

b) $\mathbf{b = d = 0} \Rightarrow ax + cz = 0$ (com $a \cdot c \neq 0$)
O plano conterá o eixo y.

c) $\mathbf{c = d = 0} \Rightarrow ax + by = 0$ (com $a \cdot b \neq 0$)
O plano conterá o eixo z.

4.º Caso:

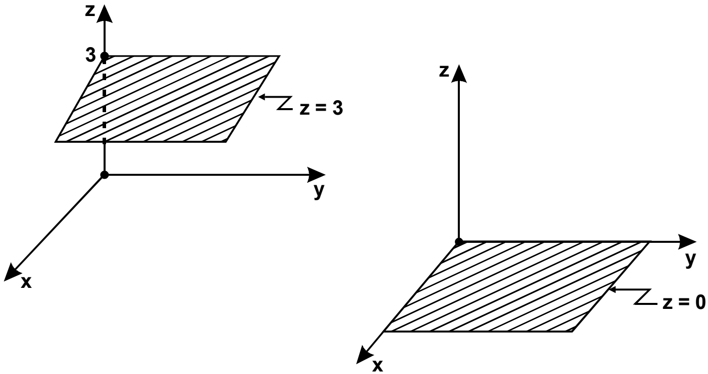
a) $\mathbf{a = b = 0} \Rightarrow cz + d = 0$ (com $c \cdot d \neq 0$)
O plano é paralelo ao plano xy.



Justificativa:
O plano cz + d = 0 tem como vetor normal o $\vec{n} = (0, 0, c)$ que é paralelo ao eixo z. Isto posto, o plano intercepta o eixo z e é paralelo ao plano xy.

OBSERVAÇÃO:

Se $cz + d = 0 \Rightarrow z = \frac{-d}{c} \Rightarrow z = k$ (que representa um plano paralelo ao plano xy e intercepta o eixo z no ponto k). Em particular, z = 0 é a equação do plano coordenado xy. Assim:



b) $\mathbf{b = c = 0} \Rightarrow ax + d = 0$ (com $a \,.\, d \neq 0$)
O plano é paralelo ao plano yz.

OBSERVAÇÃO:

Se $ax + d = 0 \Rightarrow x = \frac{-d}{a} \Rightarrow x = k$. Em particular, x = 0 é a equação do plano coordenado yz.

c) $\mathbf{a = c = 0} \Rightarrow by + d = 0$ (com $b \,.\, d \neq 0$)
O plano é paralelo ao plano xz.

OBSERVAÇÃO:

Se $by + d = 0 \Rightarrow y = \frac{-d}{b} \Rightarrow y = k$. Em particular, y = 0 representa o plano coordenado xz.

EM RESUMO:

Se dois dos coeficientes das variáveis forem nulos, a equação representa um plano paralelo ao plano das variáveis que não figuram na equação.

Exemplo:

Indicar o posicionamento de cada plano em relação ao sistema cartesiano:

a) $3x + y - 4z = 0 \Rightarrow$ plano que passa pela origem.

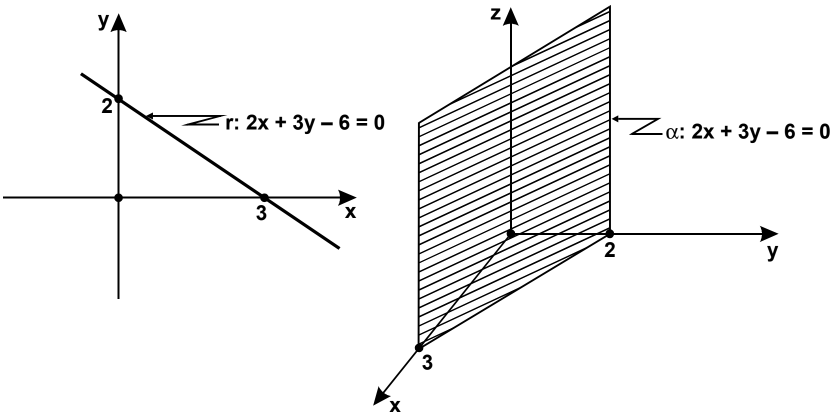
b) $2x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow$ plano paralelo ao eixo y.

c) $4x + 3y = 0 \Rightarrow$ plano que contém o eixo z.

d) $x - 4z = 0 \Rightarrow$ plano que contém o eixo y.

e) $x - 3 = 0 \Rightarrow$ plano paralelo ao plano yz.

N.B.: No E^2 a equação $2x + 3y - 6 = 0$ representa uma reta. Entretanto, no E^3 tal equação representa um plano paralelo ao eixo z.



Exercícios

01. Dado o plano $\alpha: 2x + 3y + z - 3 = 0$, pergunta-se se os pontos $A = (1, 1, -2)$ e $B = (2, 0, 1)$ pertencem a α.

Resp.: $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$.

02. Obter a equação do plano que passa por P = (1, 2, 1) e Q = (3, 1, -1) e seja paralelo ao eixo y.

Resp.: $x + z - 2 = 0$

03. Calcular a equação do plano passante por P = (1, 3, 3) e paralelo ao plano xy.

Resp.: $z - 3 = 0$

04. Plano que contém o eixo x e o ponto A = (1, 3, 3).

Resp.: $y - z = 0$

05. Equação cartesiana do plano que passa pelos pontos A = (0, 1, 2) e B = (1, 3, 0) e seja paralelo ao eixo x.

Resp.: $y + z - 3 = 0$

06. Achar m para que o ponto A = (m, 1, 2) pertença ao plano $x + 2y - z + 5 = 0$.

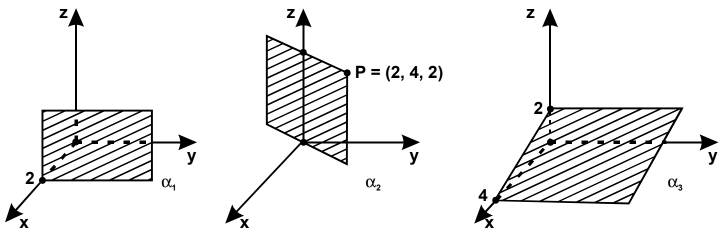
Resp.: $m = -5$

07. Nas figuras abaixo, determine as equações dos planos, sabendo-se que:

a) α_1 é paralelo ao plano yz;

b) α_2 passa por P e contém o eixo z;

c) α_3 é paralelo ao eixo y.



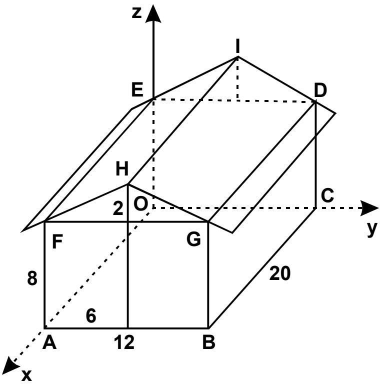
Resp.: a) $\alpha_1: x - 2 = 0$; b) $\alpha_2: 2x - y = 0$; c) $\alpha_3: x + 2z - 4 = 0$

08. Achar a equação do plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$.

Resp.: $2x - y + 3z = 0$

Série B

09. (VISSOTO LEITE) A figura abaixo representa um galpão. Os números representam as dimensões do galpão. Determine:



a) equações dos planos que contêm os telhados e as paredes;

Resp.:

a) (EIFH) $y - 3z + 24 = 0$
(IHDG) $y + 3z - 36 = 0$
(ABFG) $x - 20 = 0$
(BCDG) $y - 12 = 0$
(OEAF) $y = 0$
(OEDC) $x = 0$

01. Calcular a e b para que os planos $2x + 3y + 3 = 0$ e $(a - 2)x + 6y + (b - 1)z + 5 = 0$ sejam paralelos.

Resp.: $a = 6$ e $b = 1$

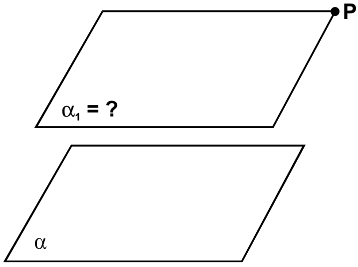
02. Determinar k para que os planos $2x + 3z - 1 = 0$ e $3x + y + kz + 2 = 0$ sejam ortogonais.

Resp. : $k = -2$

03. Equação do plano que contenha $P = (0, 1, 2)$ e seja paralelo a $\alpha: 2x + 3y - z + 5 = 0$.

Resp.: $2x + 3y - z - 1 = 0$

SUGESTÃO:



1) α_1 é paralelo a α:
$\alpha_1: 2x + 3y - z + d = 0$

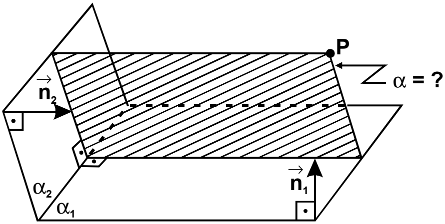
2) $P \in \alpha_1$:
$2(0) + 3(1) - (2) + d = 0$
$d = -1$

04. Equação do plano que passa pelo ponto $A = (3, 5, 0)$ e é:
a) paralelo ao plano $\alpha: 2x + y - 3z + 1 = 0$;
b) ortogonal aos planos $\alpha_1: x + y + 2z - 2 = 0$; e $\alpha_2: x - y + z - 3 = 0$

Resp.: a) $2x + y - 3z - 11 = 0$
b) $3x + y - 2z - 14 = 0$

05. Obter o plano que contém P = (0, 1, 2) e é ortogonal aos planos $\alpha_1: x + y - z + 5 = 0$ e $\alpha_2: 2x + 2y + z + 1 = 0$.

Resp.: $x - y + 1 = 0$

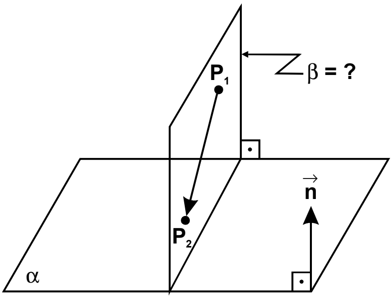


Observe na figura que, queremos um plano que passe pelo ponto P = (0, 1, 2) e tenha a direção dos vetores $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$ e $\vec{n}_2 = (2, 2, 1)$.

06. Obter a equação do plano que passa pelos pontos $P_1 = (1, 3, 0)$ e $P_2 = (2, 0, 1)$ e é ortogonal ao plano $\alpha: x + y - z + 3 = 0$.

Resp.: $x + y + 2z - 4 = 0$

SUGESTÃO:



Depreende-se da figura que queremos um plano β que passa pelo ponto P_1, e tem a direção dos vetores $(P_2 - P_1)$ e $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

07. Equação geral do plano que passa pelos pontos A = (2, 0, 5) e B = (0, 1, 0) e é perpendicular ao plano $\alpha: x + 3y - z - 7 = 0$.

Resp.: $2x - y - z + 1 = 0$

01. Obter a equação do plano que contém a reta:

$$r : \begin{cases} \alpha_1 : x + y - z + 3 = 0 \\ \alpha_2 : x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$ e seja paralelo ao eixo das abscissas.

Resp.: $2y - 3z - 2 = 0$

02. Pede-se a equação do plano que passa pela origem e que contém a reta

$$r: \begin{cases} x + y - z - 8 = 0 \\ 2x + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Resp.: $5x + y + z = 0$

03. Calcular a equação do plano que contém a reta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano $\pi: x + 2z - 3 = 0$.

Resp.: $2x - y - z + 6 = 0$

04. Determinar a equação do plano que passa pela reta de interseção dos planos $x - 3y - z + 3 = 0$ e $3x + y - 2z + 2 = 0$ e é perpendicular ao plano yz.

Resp.: $10y + z - 7 = 0$

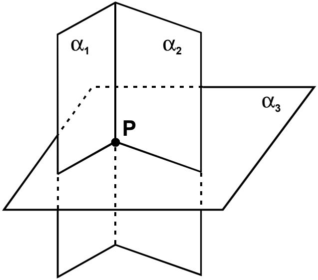
05. Equação do plano determinado pelo ponto $A = (0, 1, 1)$ e pela reta

$$r: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Resp.: $3x + y + 4z - 5 = 0$

07. Os planos $\alpha_1: 6x - 5y + 2z - 8 = 0$, $\alpha_2: x - 2y - 2z + 1 = 0$ e $\alpha_3: 6x + 2y - 5z - 1 = 0$ se interceptam em um único ponto P. Determine-o.

Resp.: $P = (1, 0, 1)$



SUGESTÃO:

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 6x - 5y + 2z - 8 = 0 \\ x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ 6x + 2y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO:
Três (ou mais) planos que se interceptam segundo um ponto P formam uma **estrela de planos.** O ponto P é o centro da estrela.

02. Determinar o valor de "k" para que seja de 60º o ângulo entre os planos $\alpha_1: kx + 2y + 2z + 1 = 0$ e $\alpha_2: x - y + z + 3 = 0$.

Resp.: $k \pm 2\sqrt{6}$

04. Calcular o ângulo entre o plano coordenado yz e o plano $x + y + z - 3 = 0$.

Resp.: $\theta = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) Equações simétricas da reta

Isolando-se o parâmetro t em cada uma das equações paramétricas e igualando as expressões, obtém-se:

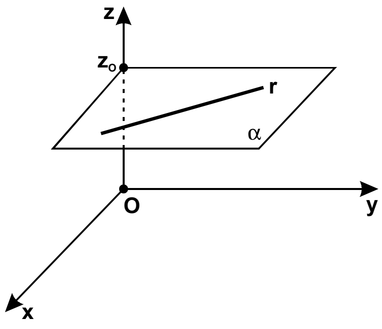
$$\frac{x - x_o}{\ell} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n} \quad (= t)$$

que são denominadas **equações simétricas** da reta r.

Casos particulares das equações simétricas:

CONVENÇÃO: A nulidade de um denominador implica na nulidade do correspondente numerador.

I) Um dos denominadores é nulo.
Se, por exemplo, $n = 0 \Rightarrow z - z_o = 0 \Rightarrow z = z_o$.



Neste caso a reta é paralela ao plano cartesiano xy, pois o seu vetor diretor $\vec{r} = (\ell, m, 0)$ é paralelo a tal plano. Por conseguinte:

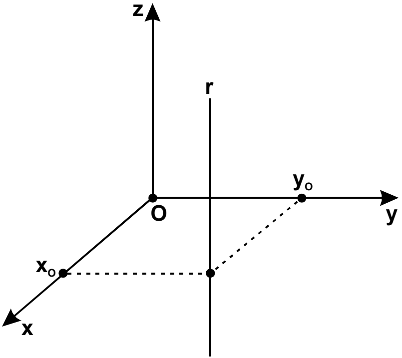
$$r: \frac{x - x_o}{\ell} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{0}$$

ou

$$r: \begin{cases} z = z_o \\ \dfrac{x - x_o}{\ell} = \dfrac{y - y_o}{m} \end{cases} \qquad (\text{onde } \ell \,.\, m \neq 0)$$

II) Dois denominadores são concomitantemente nulos.

Se, por exemplo, $\ell = m = 0$ e $n \neq 0$ se infere que a reta é paralela ao eixo das cotas, uma vez que o seu vetor diretor é $\vec{r} = (0, 0, n)$.



Assim:

$$r: \frac{x - x_O}{0} = \frac{y - y_O}{0} = \frac{z - z_O}{n}$$

ou

$$r: \begin{cases} x = x_O \\ y = y_O \\ \dfrac{z - z_O}{n} = t \end{cases}$$

Achar as equações reduzidas da reta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{-2}$

(com variável independente x).

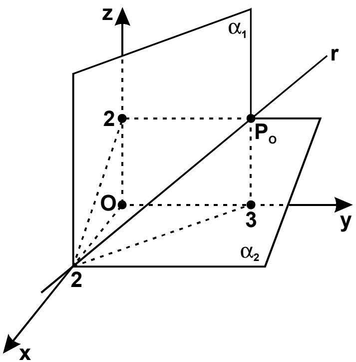
RESOLUÇÃO:

$$\text{a)}\ \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{-2} \Rightarrow r: \begin{cases} \frac{y-3}{-3} = \frac{x}{2} & (1) \\ \frac{z-2}{-2} = \frac{x}{2} & (2) \end{cases}$$

b) Isolando-se y em (1) e z em(2):

$$r: \begin{cases} y = \frac{-3x}{2} + 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \qquad \text{(Resposta)}$$

A reta r representada por suas equações reduzidas é fruto da interseção dos planos $\alpha_1 : y = \frac{-3x}{2} + 3$ e $\alpha_2 : z = -x + 2$.



Observe que os planos α_1 e α_2 são paralelos aos eixos z e y respectivamente.

A reta r "fura" o plano yz no ponto $P_o = (0, 3, 2)$ e tem como vetor diretor o $\vec{v} = \left(1, -\frac{3}{2}, -1\right)$.

01. Achar as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A = (1, 3, 0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (3, 4, -1)$.

Resp.: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{-1}$

02. Obter as equações simétricas da reta individualizada pelos pontos $A = (1, 3, 2)$ e $B = (5, 2, 2)$.

Resp.: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{0}$

03. A reta r passa pelo ponto $P = (1, 2, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Determinar as equações reduzidas de r (com variável independente x).

Resp.: $y = \dfrac{x+5}{3}$; $z = \dfrac{-x+1}{3}$

04. Estabelecer as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos $P = (0, -4, -5)$ e $Q = (1, -2, -2)$.

Resp.: $y = 2x - 4$; $z = 3x - 5$

05. São dadas as equações paramétricas de

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -5t \end{cases}$$

Obter as equações simétricas de r.

Resp.: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{-5}$

06. Verificar se os pontos $P=(4,2,0)$ e $Q=(1,0,-1)$ pertencem à reta $r: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Resp.: $P \in r$ e $Q \in r$

07. Determinar o ponto da reta $r: \begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=4-t \end{cases}$ que tenha ordenada 5.

Pede-se também o vetor diretor de r.

Resp.: $P=(7,5,0)$ e $\vec{r}=(1,1,-1)$

08. O ponto $A=(0,x,y)$ pertence à reta determinada pelos pontos $P=(1,2,0)$ e $Q=(2,3,1)$. Achar A.

Resp.: $A=(0,1,-1)$

09. Complete:

a) A reta $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ é paralela ao plano:

____

b) A reta $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{0}$ é paralela ao eixo:

____

d) A reta $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}, z=2$ é paralela ao plano:

____

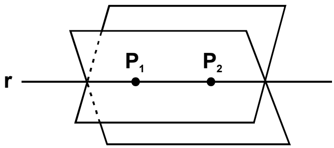
d) A reta $r: \begin{cases} x=2 \\ y=2+3t \\ z=-3 \end{cases}$ é paralela ao eixo: ____________________

Resp.: a) yz; b) x; c) xy; d) y

10. Dada a reta r como interseção de dois planos, obter a sua equação simétrica. Dada $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$

Resp.: $r: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1}$

SUGESTÃO:



Obtenha dois pontos P_1 e P_2 de r:

1) fazendo por exemplo y = 0 em r, resulta o sistema:

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow P_1 = (2, 0, 0)$$

2) fazendo por exemplo y = 1 em r, resulta o sistema:

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow P_2 = (0, 1, 1)$$

3) $r: \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

N.B.: Cumpre destacar que para subtraendo de cada membro do numerador da resposta $\left(r: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1} \right)$ adotou-se o ponto $P_1 = (2, 0, 0)$. No entanto, poder-se-ia adotar o ponto $P_2 = (0, 1, 1)$ $\left(r: \dfrac{x-0}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1} \right)$ ou qualquer outro ponto da reta r.

11. Pede-se a equação simétrica de $s: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x + y - 5z + 3 = 0 \end{cases}$

Resp.: $s: \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

12. Equação do plano que contém a reta r e o ponto A. Dados $A = (1, 0, 2)$ e $r: x - 1 = y + 3 = z$.

Resp.: $x + 2y - 3z + 5 = 0$

13. Obter a equação do plano determinado pelo ponto $A = (0, 1, 1)$ e pela reta $r: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

Resp.: $3x + y + 4z - 5 = 0$

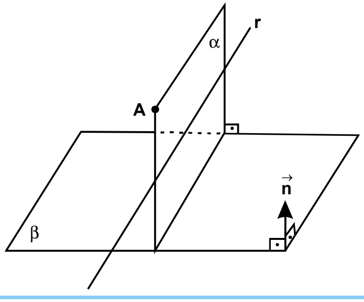
14. Achar a equação do plano α e que concomitantemente:

a) passe pelo ponto $A = (0, 1, 2)$;

b) seja paralelo à $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 1}{0} = \dfrac{z + 1}{1}$

c) seja perpendicular ao plano $\beta: 2x + y - z + 2 = 0$.

Resp.: $x - 4y - 2z + 8 = 0$



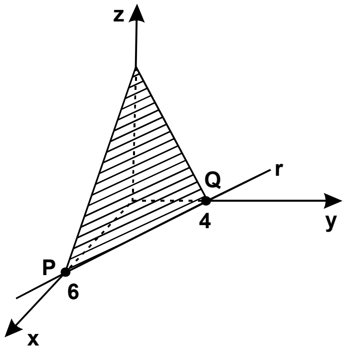
A figura mostra que o plano α contém o ponto $A = (0, 1, 2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{r} = (2, 0, 1)$ e $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

17. A reta r passa pelo ponto A = (1, - 2, - 3) e forma com os eixos x, y e z respectivamente ângulos de 60º, 90º e 30º.

Resp.: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+3}{\sqrt{3}}$

18. Achar a reta r obtida pela interseção do plano α: 2x + 3y + 4z - 12 = 0 com o plano xy.

Resp.: $\dfrac{x-6}{-6} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{0}$



SUGESTÃO:

1) Equação segmentária de α:
$\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = 1$

2) Cálculo dos pontos P e Q:
P = (6, 0, 0) e Q = (0, 4, 0)

3) Obter a reta PQ.

19. Equação do plano que contém o ponto A = (2, 1, 3) e é paralelo às retas:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 3 \end{cases}$$

Resp.: 3x - y - 5z + 10 = 0

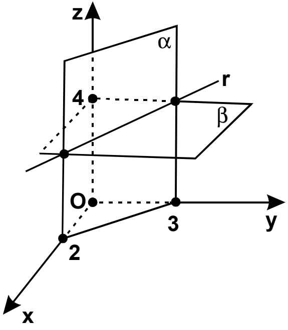
20. Num cubo são conhecidos 4 de seus vértices: $P_1 = (2, 2, 0)$, $P_2 = (2, 4, 0)$, $P_3 = (0, 4, 0)$ e $P_4 = (2, 2, 2)$. Determine os pontos onde a reta $r: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ "fura" o cubo.

Resp.: P = (1, 2, 2) e P' = (1, 4, 1)

21. Achar o ponto P em que a reta $r:\begin{cases}2x+y+z-3=0\\ x+y-2z-1=0\end{cases}$ intercepta o plano coordenado xy.

Resp.: $P=(2,-1,0)$

22. Dada a figura abaixo, onde o plano α é paralelo ao eixo z e o plano β é paralelo ao plano xy. A reta r é a interseção de α e β. Pede-se:



a) equações simétricas de r;

b) equação do feixe de planos por r.

Resp.: a) $r:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{0}$

b) $3x+2y-6+\lambda(z-4)=0$

ou $z-4+\lambda(3x+2y-6)=0$

01. Equação da reta que passa por $P = (1, 2, 0)$ e é paralela à reta $r: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-1}{2}$.

Resp.: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{2}$

02. Provar que as retas

$$r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ 3x-3y+6z+1=0 \end{cases}$$ são paralelas.

03. Determinar as equações simétricas da reta r sabendo-se que passa pelo ponto $P = (3, 5, 2)$ e é concomitantemente ortogonal ao eixo x e à reta $s: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Resp.: $x = 3,\ \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z-2}{2}$

SUGESTÃO:

1) A reta r tem a forma: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-5}{m} = \dfrac{z-2}{n}$

2) Imponha a condição de ortogonalidade entre r e s.

04. Calcular k para que as retas r e s sejam ortogonais.

Dadas: $r: \begin{cases} y = kx + 2 \\ z = -3x \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Resp.: $k = -3$

01. Achar o ponto de interseção da reta r com o plano α. Dados:

$$r: \frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{e} \quad \alpha: 3x - 5y + z - 1 = 0$$

Resp.: $P = (12, 3, -20)$

02. Encontrar as coordenadas do ponto de interseção de α: $2x + 3y + 4z - 1 = 0$ com a reta determinada pelos pontos $P_1 = (1, 0, 2)$ e $P_2 = (3, 4, 1)$.

Resp.: $P = \left(-\frac{1}{2}, -3, \frac{11}{4}\right)$

03. As retas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1}$ e $s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ se interceptam num ponto P. Achar as coordenadas de P.

Resp.: $P = (1, 1, -2)$

04. Calcular o ponto de interseção das retas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3} \quad \text{e} \quad s: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}.$$

Resp.: $P = (1, -1, 2)$

05. Achar o ponto de interseção de r_1 e r_2. Dadas:

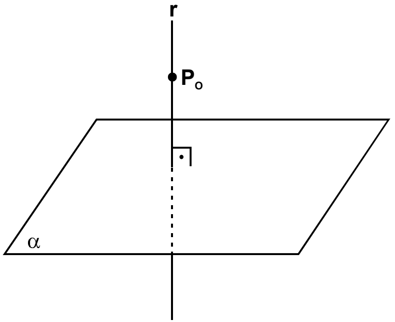
$$r_1 \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \begin{cases} y + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Resp.: $P = (-1, -1, 1)$

Exemplos:

01. Achar as equações da reta por $P_o = (3, 5, 0)$ e ortogonal ao plano $2x + 4y - z + 1 = 0$.

RESOLUÇÃO:



a) Equação da reta por $P_o = (3, 5, 0)$

$$r: \frac{x-3}{\ell} = \frac{y-5}{m} = \frac{z-0}{n}$$

b) Em face da condição de ortogonalidade de reta e plano:

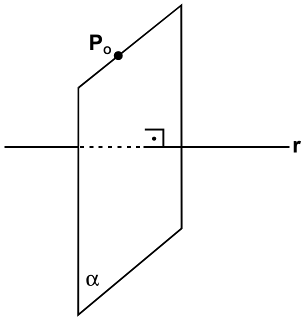
$\ell = a = 2$, $m = b = 4$ e $n = c = -1$

c) Resposta: $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z}{-1}$

02. Obter a equação do plano por $P_o = (3, 5, 0)$ e ortogonal à reta

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{4}$$

RESOLUÇÃO:



a) Pela condição de ortogonalidade de reta e plano sabemos que $a = \ell = 1$, $b = m = 2$ e $c = n = 4$. Então:

$\alpha: 1x + 2y + 4z + d = 0$

b) Mas $P_o = (3, 5, 0) \in \alpha$

$1(3) + 2(5) + 4(0) + d = 0$

$d = -13$

c) Resposta:

$\alpha: x + 2y + 4z - 13 = 0$

Exercícios

01. Verificar se a reta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{1}$ é paralela ao plano $\alpha: 2x - 2z + 3 = 0$.

Resp.: A reta é paralela ao plano.

02. Obter a equação da reta que passa por $P = (3, 0, 1)$ e é ortogonal ao plano $\alpha: 3x + 4y + 2 = 0$.

Resp.: $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{0}$

10. Provar que a reta r está contida no plano α.

Dados: $r: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ e $\alpha: 4x - 2y + 5z - 5 = 0$

12. Achar a equação do plano que passa pela reta

$r: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ e é paralelo à reta $s: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{7}$.

Resp.: $3x + 2y - z + 4 = 0$

01. Achar o ângulo entre as retas

$$r: \frac{x-1}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0} \quad e \quad s: \frac{x+3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

Resp.: $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

02. Pede-se o ângulo entre $\alpha: -x + y + 3 = 0$ e $r: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{1}$

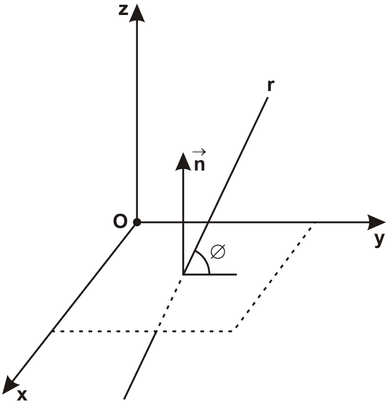
Resp.: $\varnothing = \frac{\pi}{3}$ rad.

03. Achar o ângulo que a reta $r: \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$ forma com o eixo das cotas.

Resp.: $\text{arc} \ \cos \frac{2}{3}$

05. Calcule o ângulo agudo que a reta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{6}$ forma com o plano xy.

Resp.: $\varnothing = \text{arc sen } \dfrac{6}{7} \cong 59^{\circ}$



SUGESTÃO:

$$\text{sen } \varnothing = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{|\vec{n}||\vec{r}|}$$

onde $\vec{n} = (0, 0, 1)$ e

$\vec{r} = (3, 2, 6)$