ERHA 7039
Princípios da Modelagem e Controle da Qualidade da Água Superficial

REGINA TIEMY KISHI

http://www.ufpr.br/~rtkishi.dhs/ERHA7039

11 – Modelagem em Rios

1. Caracterização dos rios

Hidrogeometria

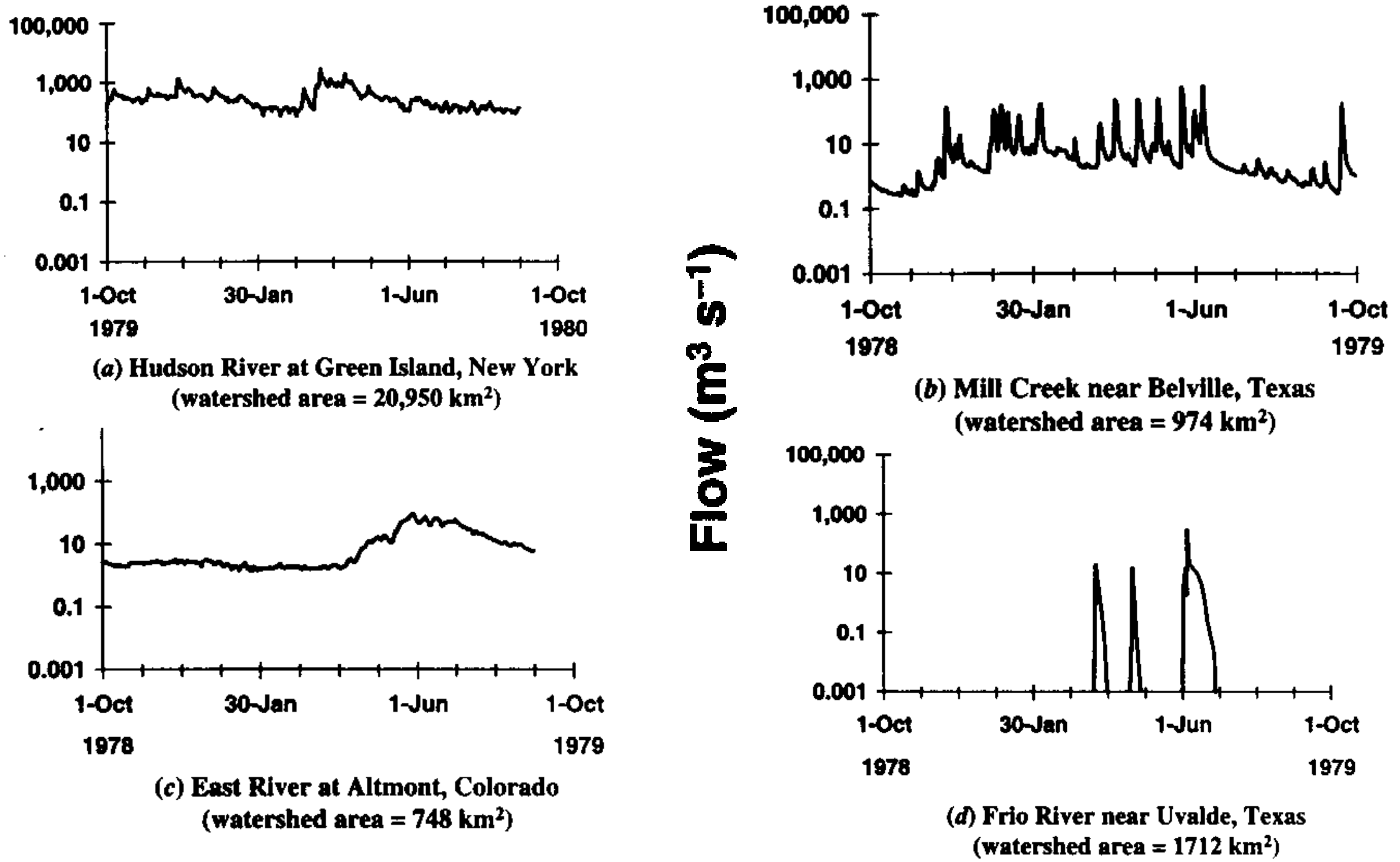
- Parâmetros hidráulicos:

  Vazão
  Velocidade
  Dispersão

- Parâmetros geométricos:

  Profundidade
  Largura
  Declividade

Distribuição temporal da vazão



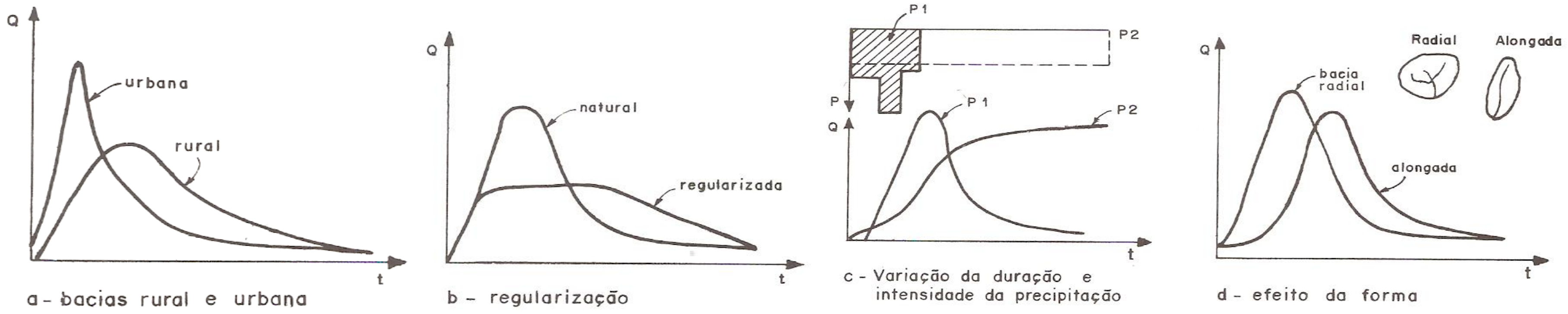
Distribuição temporal da vazão (2)

- Q x t:

  Influência da distribuição da chuva (e degelo da neve)

- Modificações dos hidrogramas:

  Represamento (picos de Q serão amortecidos)
  Urbanização e canalização (Ex.: maior área impermeável $\Rightarrow$ maior escoamento superficial concentrado)
  Uso da água (Ex.: irrigação: maior consumo na fase de crescimento da planta)



Do ponto de vista da qualidade da água

Estudo de cargas pontuais:
caso crítico quando ocorrem pequenas vazões

Vazão de referência?

- Q mínima
- $Q_{10,7}$
- $Q_{95\%}$ → Paraná
- $Q_{80\%}$

Vazão mínima $Q_{10,7}$

$Q_{10,7}$

Vazão mínima de 7 dias com tempo de retorno de 10 anos.

• Menor vazão que ocorreu em 7 dias consecutivos no período considerado

• ordenar a vazão em ordem crescente

• a probabilidade cumulativa de ocorrência é dada por: $$p = \frac{m}{N+1}$$

• o tempo de retorno é dado por: $$T = \frac{1}{p}$$

m: rank
N: total de amostras

Escoamento permanente uniforme

Vazão constante no tempo e no espaço

Equação da continuidade: $Q = U A$

Coeficientes de descarga:

Velocidade: $U = aQ^b$

Profundidade: $H = \alpha Q^\beta$

Largura: $L = cQ^f$

TABLE 14.2
Average values and ranges of exponents in hydrogeometric correlations

Correlation	Exponent	Value	Range
Velocity-flow	b	0.45	0.3–0.7
Depth-flow	β	0.4	0.1–0.6
Width-flow	f	0.15	0.05–0.25

A, b, α, β, c, f : Constantes empíricas.

Escoamento permanente uniforme (2)

Equação de Manning:

Velocidade:

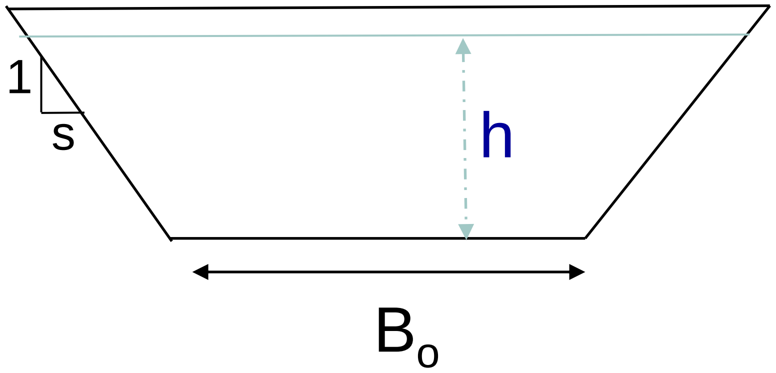
$$U = \frac{c_0}{n} R_H{}^{2/3} S^{1/2}$$

Vazão:

$$Q = \frac{c_0}{n} A R_H{}^{2/3} S^{1/2}$$

c_0: constante (=1 para unidades métricas e =1,486 para as inglesas)
n: coeficiente de rugosidade de Manning
R: raio hidráulico (m)   R=A/P
P: perímetro molhado (m)
S: declividade do canal (m/m)

Aplicação de Manning - canal trapezoidal:



- largura do fundo B_0
- declividade lateral s

$$\boxed{A = (B_0 + sh)h}$$

$$\boxed{P = B_0 + 2h\sqrt{s^2 + 1}}$$

$$\boxed{R_H = \frac{A}{P_m} = \frac{(B_0 + sh)h}{B_0 + 2h\sqrt{s^2 + 1}}}$$

Substituindo na eq. $Q = \frac{c_0}{n} A R_H{}^{2/3} S^{1/2}$

$$Q = \frac{1}{n}\left[\frac{[(B_0 + sh)h]^{5/3}}{\left(B_0 + 2h\sqrt{s^2 + 1}\right)^{2/3}}\right] S^{1/2}$$

Sistema métrico: C_0=1

Transporte de Poluente

Substância não-conservativa

Análise uni-dimensional

Vazão em regime permanente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \underbrace{-U\frac{\partial C}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{D_L\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}_{(2)} \underbrace{\pm \sum R}_{(3)}$$

Transporte hidrodinâmico:

(1) Advecção

(2) Difusão

(3) Mecanismos de reação

Vazão em regime não permanente:

$$\frac{\partial (AC)}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial (QC)}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(D_L A\frac{\partial C}{\partial x}\right)}_{(2)} \underbrace{\pm \sum R}_{(3)}$$

t : tempo
x : distância na direção longitudinal
A(x) : área da seção transversal em x
C(x,t) : concentração em x no tempo t
Q(x,t) : vazão em x no tempo t
R(C,x,t) : reações em x no tempo t

Métodos numéricos

Métodos numéricos

Resolver as equações computacionalmente.
(Equações que não tem solução geral, só é possível usando computadores)

Componentes:

- Modelo Matemático
- Método de Discretização
- Coordenadas
- Malha Numérica
- Aproximações Finitas
- Método de Solução
- Critério de Convergência

Propriedades:

- Consistência
- Estabilidade
- Convergência
- Conservação
- Limitação
- Factibilidade
- Precisão

Componentes

Modelo Matemático
Definir as equações diferenciais ou integrodiferenciais e as condições iniciais e de contorno

Método de Discretização
Aproximação das equações por um sistema de equações algébricas em pontos discretos no espaço e tempo.
<u>Alguns métodos</u>:
- Método dos Volumes Finitos
- Método dos Elementos Finitos
- Método das Diferenças Finitas
- Espectrais

Coordenadas
As equações podem ser escritas em diferentes formas, dependendo do sistema de coordenadas:
- Cartesianas,
- Cilíndricas,
- Esféricas,
- Curvilíneas,
- Ortogonais,
- Curvilíneas não Ortogonais;
- Fixas ou Móveis

Malha Numérica
A posição discreta na qual as variáveis serão calculadas são definidas como malha numérica (representação geométrica do domínio).
- Malha estruturada
- Estruturada em blocos
- Não estruturada

Aproximações Finitas
Selecionar as aproximações que serão utilizadas no processo de discretização:
- Diferenças Finitas: aproximações para as derivadas;
- Volumes Finitos: aproximações para as integrais de volume e de superfície;
- Elementos Finitos: funções e funções peso.

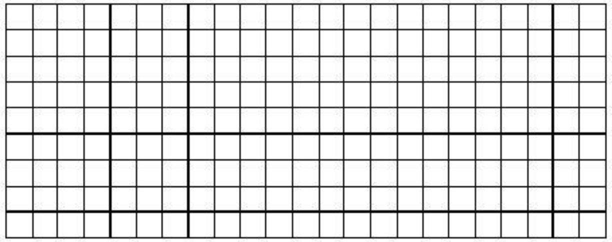
Método de Solução
Depende do problema:
- Elíptico;
- Parabólico;
- Hiperbólico;
- Misto.

Técnicas iterativas.

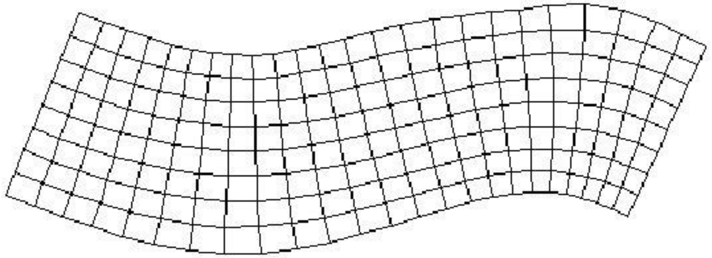
Critério de Convergência
Quando existem métodos iterativos para solução do problema é necessário definir um critério de convergência.
Este critério deve ser escolhido de tal forma que se obtenha eficiência e precisão

Tipos de malha numérica

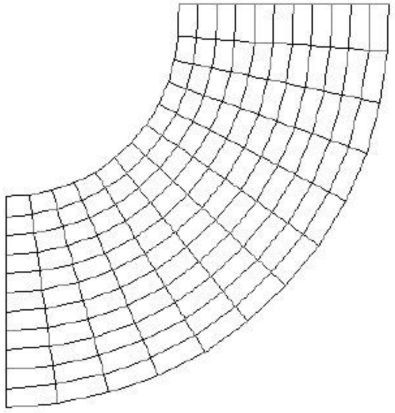
Fonte: Terabe, Ota e Friedrich (2004)



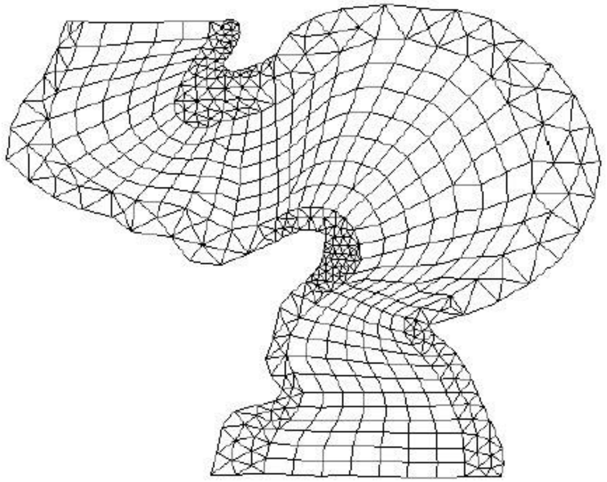
Ortogonal ou retilínea



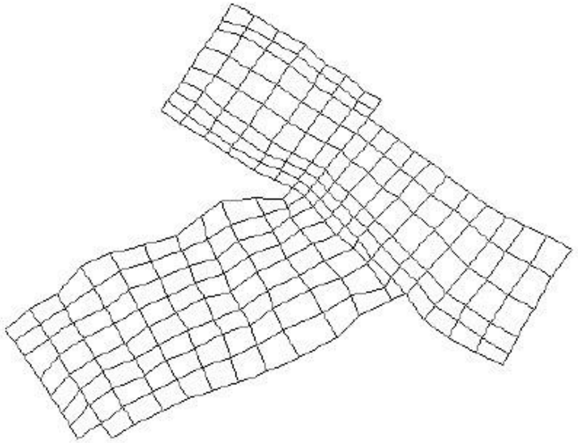
Não Ortogonal ou curvilínea



Estruturada

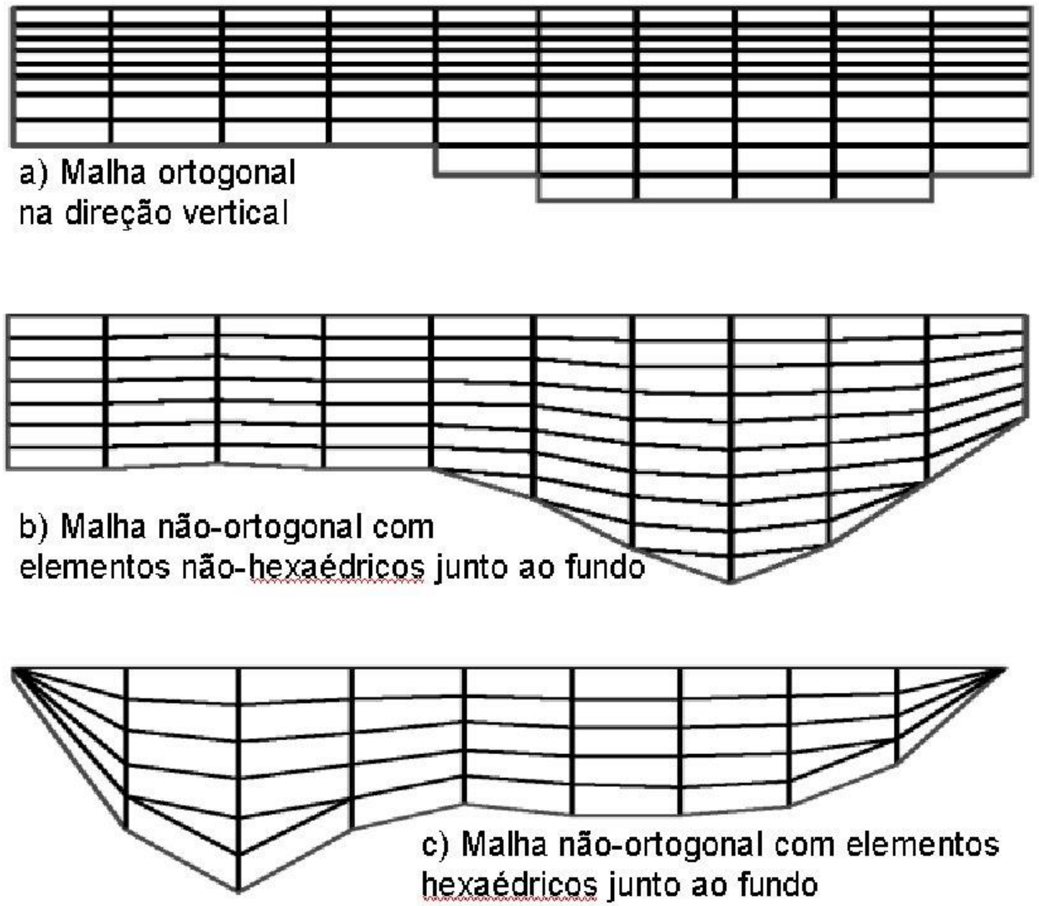


Não Estruturada



Multi-bloco

Malha – direção vertical



Fonte: Terabe, Ota e Friedrich (2004)

Propriedades

Consistência
A solução encontrada deve convergir para a solução das equações, quando a distância entre os pontos da malha tenderem para zero.
Erro de truncamento:
dx^n, dt^n

Estabilidade
Um método é dito estável quando ele não amplifica os erros que aparecem durante o processo de simulação numérica.
Erros: arredondamento, truncamento.
Método de Von Neumann: utilizado para verificar a estabilidade de um método.

Convergência
Um método é dito convergente quando a solução das equações discretizadas tendem para a solução exata quando a distância entre os pontos da malha tendem para zero.
Lax Equivalence Theorem:
Consistência + Estabilidade = Convergência

Conservação
Simulação numérica de equações de conservação, estas equações devem ser respeitadas local e globalmente.
Ex.: entrada e saída de fluido em dutos simulação de escoamento sobre perfis aerodinâmicos etc...

Limitação
As soluções numéricas devem estar dentro de certos limites físicos.
Ex.:Densidade, energia cinética da turbulência > 0; Concentração de substância > entre 0% e 100%
Distribuição de temperatura numa placa; etc

Factibilidade
Modelos de fenômenos que são difíceis de serem tratados diretamente (turbulência, combustão, escoamento multifásico), devem ser desenvolvidos para garantir soluções físicas realísticas.
Ex.: Escoamento sobre um cilindro.

Precisão
Soluções numéricas de escoamentos e transferência de calor são soluções aproximadas.
Além de erros que podem aparecer no desenvolvimento e implementação do código (BC) temos erros de:

- Modelagem : modelo numérico
- Discretização : sol. exata das eq. usadas e a sol. obtida
- Convergência : solução exata e solução iterativa

Um erro pode cancelar outro > malhas

Método de discretização

Método das diferenças finitas

- É o método mais antigo para solução de EDP;
- Introduzido por Euler no século 18;
- É o mais fácil de ser utilizado em geometrias simples*;
- Aproximações das derivadas são obtidas através da expansão em série de Taylor ou aproximação polinomial;
- Desvantagem: conservação, restrição a geometrias simples* .
- * fronteiras imersas

Método dos volumes finitos

- Utiliza a forma integral das equações;
- O domínio é dividido em volumes de controle contíguos e as equações de conservação são aplicadas a cada um deles;
- As integrais de superfície e de volume são aproximadas por formulas de quadratura;
- Pode acomodar qualquer tipo de malha, é conservativo, fácil de programar;
- Difícil de se obter alta ordem pois possuem dois níveis de aproximação: interpolação e integração.

Método de discretização

Método dos elementos finitos

- É parecido com o método dos volumes finitos, com a diferença que as equações são multiplicadas por uma função peso antes de serem integradas em todo o domínio;
- O domínio é dividido em elementos discretos que podem ser quadriláteros ou triângulos;
- Geometrias complicadas, malhas são facilmente refinadas;
- Método dos painéis: Michael George Maunsell