

1. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = -t x^2(t) \\ x(0) = 2 \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Verifique que $x(t) = 2/(1+t^2)$ é a solução exata do problema;
(b) Faça duas iterações do método de Euler explícito para aproximar $x(0.1)$

2. Mostre que o PVI

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x(t) + x^2(t) \cos(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução no intervalo $-1/3 \leq t \leq 1/3$.

3. Verifique que $x_1(t) = -t^2/4$ e $x_2(t) = 1 - t$ são soluções do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{t^2 + 4x(t)} - t \right) \\ x(2) = -1 \end{cases}$$

O que faltou no PVI acima para garantir a unicidade da solução?

4. Mostre que se $f(x) = \mathcal{O}(x^i)$, $g(x) = \mathcal{O}(x^{i+1})$, e $h(x) = f(x) + g(x)$, então $h(x) = \mathcal{O}(x^i)$.
5. Mostre que se $f(x) = \mathcal{O}(x^i)$ e $g(x) = xf(x)$, então $g(x) = \mathcal{O}(x^{i+1})$.
6. Dado o PVI (1) da Questão 1,

- (a) Encontre a fórmula para $X_{n+1} \approx x(t_{n+1})$ correspondente ao método da série de Taylor de segunda ordem e faça uma iteração deste método para aproximar $x(0.1)$.
(b) Repita o exercício com o método da série de Taylor de terceira ordem (grau 3)
(c) Classifique (do melhor ao pior) os resultados obtidos nos itens (a), (b) e do item (b) da Questão 1, levando-se em conta a solução exata.