CM098 - Análise Numérica III
Lista de Exercícios 3

1. Seja $T = 1$ e $x(t)$ a solução $x(t_N) = x(1)$ do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = -50x(t) \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ou seja, $x(t) = e^{-50t}$. Encontre as fórmulas para a aproximação $X_N \approx x(1)$ correspondente a N passos dos métodos de Euler explícito e Euler implícito, considerando uma malha uniforme. Compare estes valores com $x(1) = e^{-50}$ para $N = 10, 20, 50, 100$.

2. Considere o método trapezoidal $X_{n+1} = X_n + h[f(t_{n+1}, X_{n+1}) + f(t_n, X_n)]/2$.

   (a) Mostre que se $f(t, x) = \lambda x$, então $X_{n+1} = [(1 + h\lambda/2)/(1 - h\lambda/2)]X_n$;

   (b) Indique a região de estabilidade absoluta do método;

   (c) Mostre que o método é estável.

3. Determine se os seguintes métodos são convergentes:

   (a) $X_{n+1} - X_{n-1} = 2hf_n$

   (b) $X_{n+1} = X_n + h(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})/24$

   (c) $X_{n+1} = X_{n-1} + h(f_{n+1} - 3f_n + 4f_{n-1})$

   (d) $X_{n+1} - 3X_n + 2X_{n-1} = h(f_{n+1} + f_n)$

4. Mostre que qualquer método de passo múltiplo na forma

$$X_{n+1} - X_n = h(b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + \ldots + b_k f_{n+1-k}), \qquad \sum_{j=0}^{k} b_j = 1,$$

é convergente.