CM098 - Análise Numérica III
Lista de Exercícios 5

1. Escreva o sistema linear $Ax = b$ correspondente ao método da colocação para o problema

$$\begin{cases} 2x''(t) + 4x(t) = t^2, \quad t \in]0,3[\\ x(0) = x(3) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

considerando o espaço gerado pelas funções $\phi_1(t) = \text{sen}(\pi t)$ e $\phi_2(t) = t\,\text{sen}(\pi t)$, e os pontos de colocação $t_1 = 1/2$ e $t_2 = 3/2$.

2. Encontre a função polinomial de grau 1 por partes $\tilde{f}(t)$ que interpola $f(t) = \text{sen}(\pi t)$ nos pontos $t_0 = 0$, $t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 3/2$ e $t_4 = 2$. Faça um esboço dos gráficos de $\tilde{f}(t)$ e $f(t)$ em uma única figura.

3. Encontre a função spline cúbica natural

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t), \ t \in [-1,0] \\ s_2(t), \ t \in [0,1] \end{cases}$$

que interpola a função $f(t) = \cos(\pi t/2)$ nos pontos $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, e $t_2 = 1$.

4. Seja $B(t)$ a spline natural associada aos pontos $t_i = i - 2$ $(0 \leq i \leq 4)$ do intervalo $[-2,2]$ tal que $B(t_i) = f_i$, com $f_0 = f_4 = 0$, $f_1 = f_3 = 1/6$ e $f_2 = 4/6$. Sabendo que $z_i = B''(t_i)$ são dados por $z_0 = z_4 = 0$, $z_1 = z_3 = 1$ e $z_2 = -2$, e que

$$B(t)\,|_{[t_{i-1},t_i]} = z_{i-1}\frac{(t_i - t)^3}{6h} + z_i\frac{(t - t_{i-1})^3}{6h} + \left(f_{i-1} - \frac{z_{i-1}h}{6}\right)\frac{t_i - t}{h} + \left(f_i - \frac{z_i h}{6}\right)\frac{t - t_{i-1}}{h},$$

verifique que $B(t)\,|_{[t_2,t_3]} = 1 - t - (-t^3 + 2(1-t)^3)/6$.

5. Seja $B_j(t) = B(t - j + 2)\,|_{[0,N]}$, em que $B(t)$ é dada pelo exercício anterior, e $f(t)$ dada pela combinação linear

$$f(t) = a_{N+1}B_{N+1}(t) + a_{N+2}B_{N+2}(t) + a_{N+3}B_{N+3}(t).$$

   (a) Faça um esboço do gráfico de $B_{N+1}(t)$, $B_{N+2}(t)$ e $B_{N+3}(t)$;
   (b) Mostre que, se $f(t) \equiv 0$, então $a_{N+2} = 0$.