CM300 - Introdução ao Cálculo
Lista de Exercícios 10

1. Encontre a função $g(x)$ que representa a inclinação da reta que liga os pontos $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$ nos casos a seguir. Em seguida, simplifique $g(x)$ usando fatoração e use o resultado para determinar a inclinação da tangente à função $f(x)$ no ponto de abcissa x_0. Faça um gráfico com $f(x)$ e a tangente em x_0.

   (a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$ (b) $f(x) = x^2$, $x_0 = -2$ (c) $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 0$

   (d) $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$

2. Calcule os cinco primeiros termos (começando de $n = 0$, se possível), o milésimo termo, e indique o limite das seguintes sequências:

   (a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (b) $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ (c) $a_n = \dfrac{2n+1}{3n}$ (d) $a_n = \dfrac{1}{n+1} - n$

3. Usando as propriedades dos limites, mostre que o limite da sequência $a_n = \dfrac{2n+1}{3n}$ é igual a $\dfrac{2}{3}$.

4. Use as propriedades dos limites para calcular o limite L da sequência

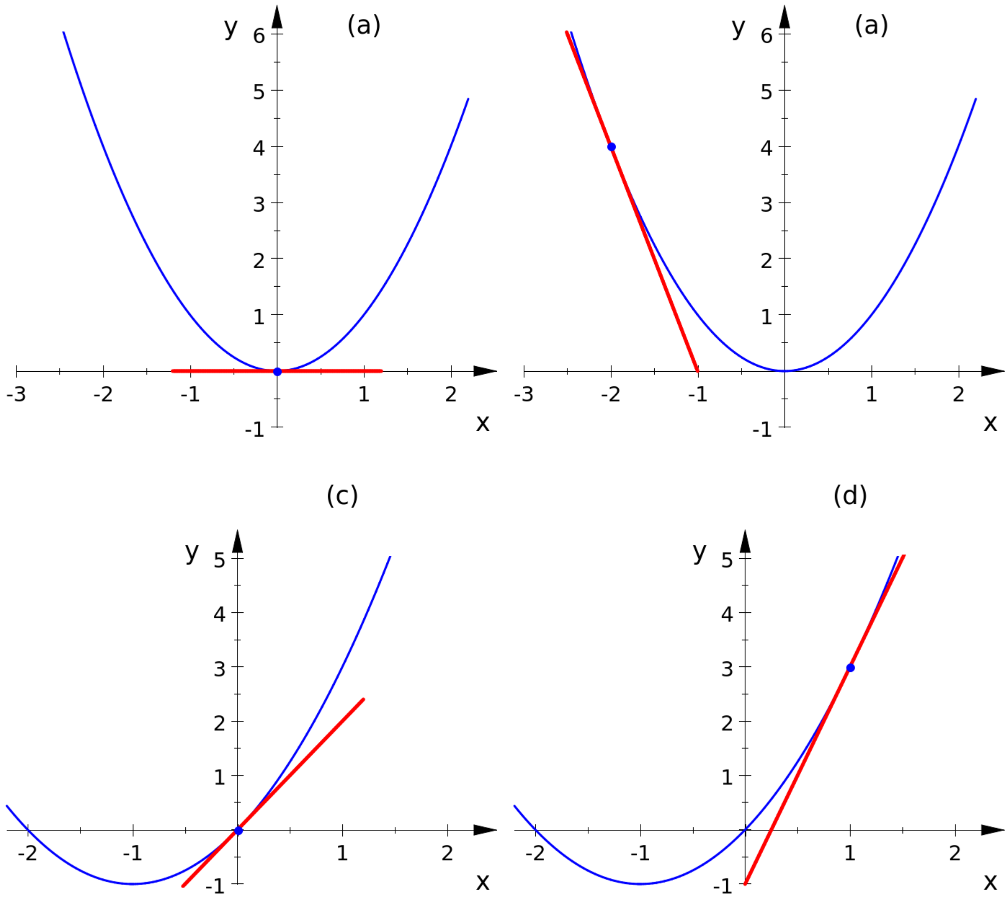
$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} + \frac{1}{a_n} \qquad (a_0 = 1),$$

   sabendo que $L > 0$.

Respostas:

1. (a) $g(x) = \dfrac{x^2}{x}$, $\tan(\theta) = 0$ (b) $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$, $\tan(\theta) = -4$

   (c) $g(x) = \dfrac{x^2+2x}{x}$, $\tan(\theta) = 2$ (d) $g(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$, $\tan(\theta) = 4$



2. (a) $\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}\right\}$, $a_{1000} = \dfrac{1000}{1001} = 0.999000999000\ldots$, $a_n \to 1$.

   (b) $\left\{2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{6}{5}\right\}$, $a_{1000} = \dfrac{1002}{1001} = 1.000999000999\ldots$, $a_n \to 1$.

   (c) $\left\{1, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{9}{12}, \dfrac{11}{15}\right\}$, $a_{1000} = \dfrac{2001}{3000} = 0,667$, $a_n \to 0,666666\ldots$.

   (d) $\left\{1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{3}, -\dfrac{11}{4}, -\dfrac{19}{5}\right\}$, $a_{1000} = -\dfrac{1000999}{1001} = -999.999000999000999\ldots$, $a_n \to -\infty$.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n} + \frac{1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(0) = \frac{2}{3}$

   (note que 2/3=0,666666...).

4. $L = \sqrt{3}$