CM302 - Cálculo em várias variáveis reais
Lista de Exercícios 1

1. Encontre o domínio e avalie as funções a seguir com os valores dados:
   (a) $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2, \quad f(5, 0), f(5, -2), f(a, b), f(a, a)$
   (b) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}, \quad g(-3, 0), g(4, 1), g(a, b), g(a, 2a)$
   (c) $g(x, y, z) = x/(y - z), \quad g(2, 3, 4), g(7, 46, 44), g(1, 1, 1)$
   (d) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}, \quad f(2, -1, 6), f(1, 1, 2), f(1, 1, 0)$

2. (Revisão) Calcule $\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y}$ e o produto escalar $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ nos seguintes casos:
   (a) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. (Revisão) Sejam $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ x \end{bmatrix}$. Encontre o valores de x tais que os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ (a) sejam ortogonais e (b) sejam colineares. Desenhe ambos os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ nos dois casos.

4. Encontre a equação do plano com vetor normal $\boldsymbol{a}$ que passa pelo ponto P nos seguintes casos:
   (a) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Encontre o vetor normal e um ponto pertencente aos planos dados pelas seguintes equações:
   (a) $x + y + z + 1 = 0$ (b) $z + 1 = 0$ (c) $x - z + 2y = 0$

6. Faça o gráfico das seguintes funções do primeiro grau:
   (a) $f(x, y) = x + y + 1$ (b) $f(x, y) = y/2 + 2$ (c) $f(x, y) = y - x$
   No item (b), obtenha e desenhe também o vetor normal ao plano

Respostas:

1. (a) $D(f) = \mathbb{R}^2$. Valores: 25; 51; $a^2 - 3ab - b^2$; $-3a^2$

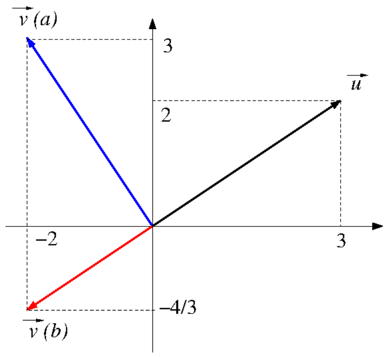
   (b) $D(g) = \mathbb{R}^2$. Valores: 3; $\sqrt{18}$; $\sqrt{a^2 + 2b^2}$; $3|a|$

   (c) $D(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq y\}$. Valores: -2; 7/2; $g(1, 1, 1)$ não existe

   (d) $D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2\}$. Valores: e; 1; $f(1, 1, 0)$ não é um número real

2. (a) $\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 4$; (b) $\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 9$; (c) $\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 8$;

3. (a) x = -4/3, (b) $x = 3$



4. (a) $-x + 2y + 4z - 1 = 0$ (b) $2x + y + 3z = 0$ (c) $2x - 2 = 0$

5. (a) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   OBS: há outras escolhas possíveis para o ponto P.

6. No item (b), o vetor normal (em azul) é $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.