Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Geologia

GEOL7048: Tópicos Especiais em Geologia Exploratória II

Métodos semiquantitativos

Saulo P. Oliveira

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná

Aula 12

- Integral (teoria e aproximação)
- Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Derivada vertical

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial z}$, precisaremos da Transformada de Fourier

$$\hat{f}(\kappa) = \mathcal{T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Derivada vertical

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, precisaremos da Transformada de Fourier

$$\hat{f}(\kappa) = \mathcal{T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

O número $\hat{f}(\kappa)$ pode ser interpretado como o componente do sinal $f(x)$ na frequência (ou número de onda) κ

Derivada vertical

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, precisaremos da Transformada de Fourier

$$\hat{f}(\kappa) = \mathcal{T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

O número $\hat{f}(\kappa)$ pode ser interpretado como o componente do sinal $f(x)$ na frequência (ou número de onda) κ

Transformada inversa

$$f(x) = \mathcal{T}^{-1}(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) e^{i2\pi\kappa x} d\kappa$$

Derivada vertical

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, precisaremos da Transformada de Fourier

$$\hat{f}(\kappa) = \mathcal{T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

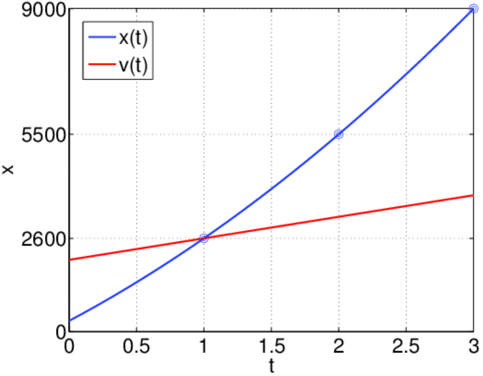
O número $\hat{f}(\kappa)$ pode ser interpretado como o componente do sinal $f(x)$ na frequência (ou número de onda) κ

Transformada inversa

$$f(x) = \mathcal{T}^{-1}(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) e^{i2\pi\kappa x} d\kappa$$

Propriedade: Se $g = \frac{df}{dx}$, então $\hat{g} = i2\pi\kappa\hat{f}$.

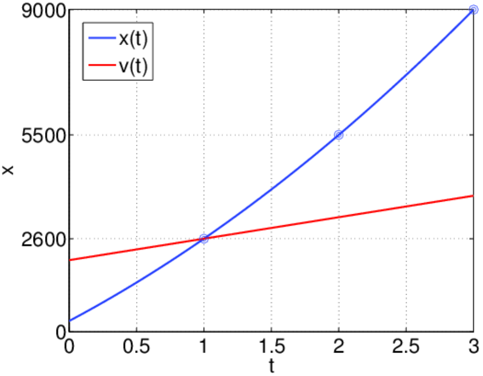
Agora, queremos calcular o deslocamento a partir da velocidade



$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_0 + at \\
x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2
\end{aligned}
$$

Integral - motivação

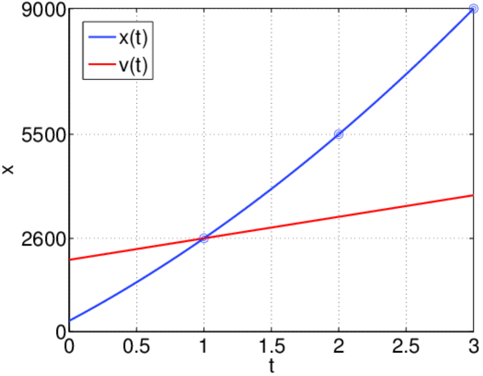
Agora, queremos calcular o deslocamento a partir da velocidade



$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ x(t) &= x_0 + \frac{t}{2}(2v_0 + at) \end{aligned}$$

Integral - motivação

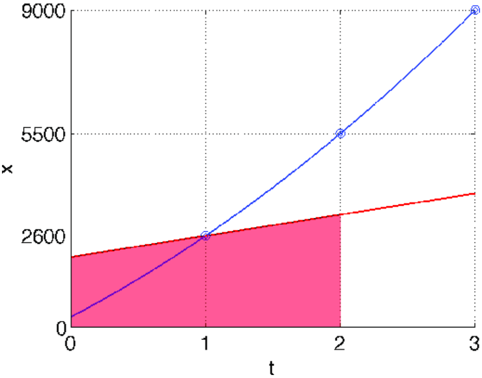
Agora, queremos calcular o deslocamento a partir da velocidade



$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_0 + at \\
x(t) &= x_0 + \frac{t}{2}\left(v_0 + v_0 + at\right)
\end{aligned}
$$

Integral - motivação

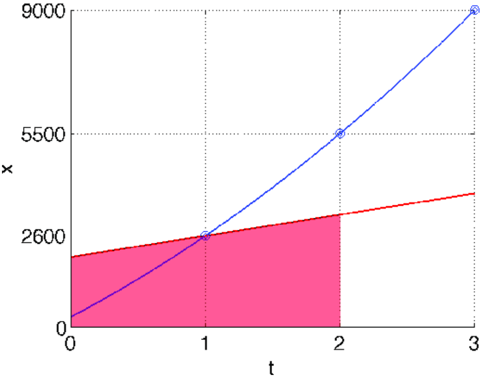
Agora, queremos calcular o deslocamento a partir da velocidade



$$v(t) = v_0 + at$$
$$x(t) = x_0 + \frac{t}{2}\left(v(0) + v(t)\right)$$

Integral - motivação

Agora, queremos calcular o deslocamento a partir da velocidade

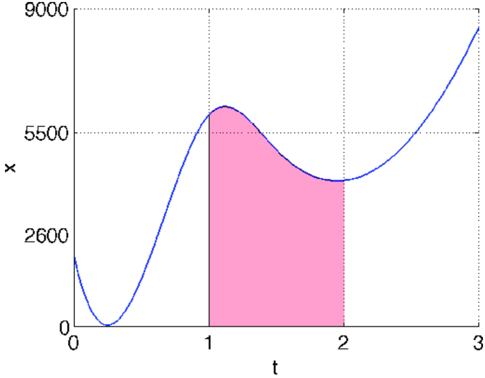


$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_0 + at \\
x(t) &= x(0) + Area_v(0, t)
\end{aligned}
$$

Integral - motivação

Em geral,

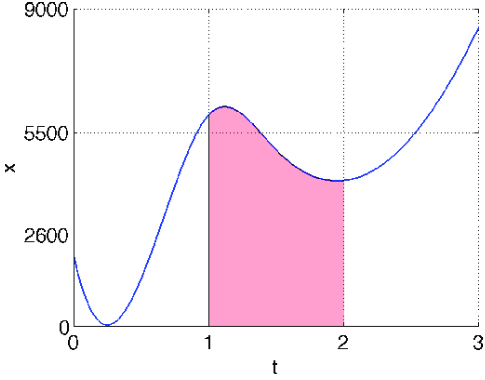
$$x(t) = x(t_0) + Area_v(t_0, t)$$



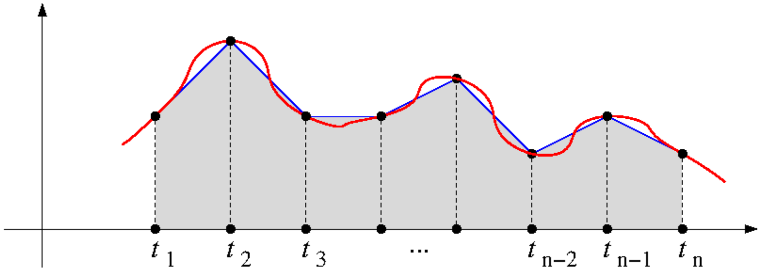
Integral - motivação

Em geral,

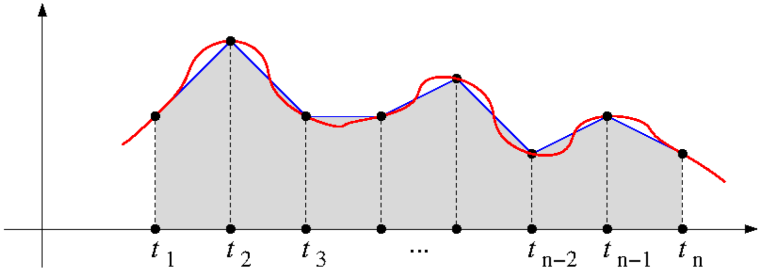
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds$$



Regra do Trapézio



Regra do Trapézio

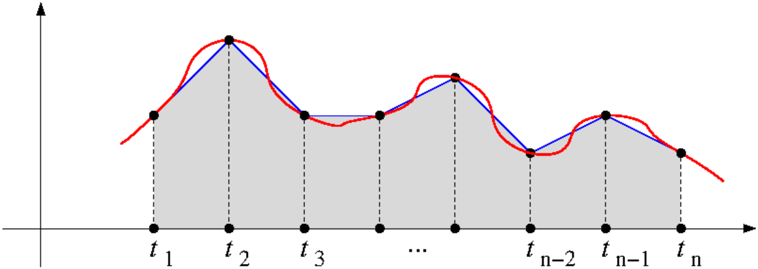


Dados $t_1 = a$, $t_n = b$ e $t_{i+1} - t_i = \Delta t$,

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{t_2 - t_1}{2}\left(f(t_1) + f(t_2)\right) + \frac{t_3 - t_2}{2}\left(f(t_2) + f(t_3)\right) + \dots$$

$$+\frac{t_{n-1} - t_{n-2}}{2}\left(f(t_{n-2}) + f(t_{n-1})\right) + \frac{t_n - t_{n-1}}{2}\left(f(t_{n-1}) + f(t_n)\right)$$

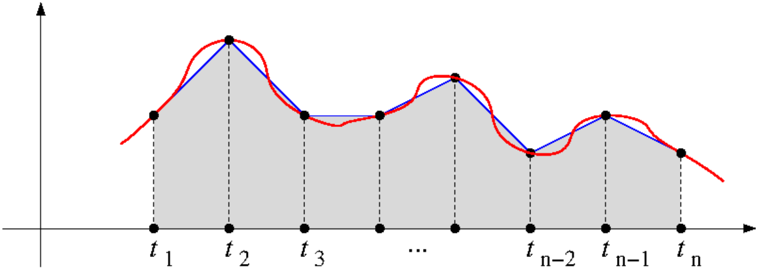
Regra do Trapézio



Dados $t_1 = a$, $t_n = b$ e $t_{i+1} - t_i = \Delta t$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt \quad &\approx \quad \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_1) + f(t_2)\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_2) + f(t_3)\right) + \dots \\ &+ \quad \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_{n-2}) + f(t_{n-1})\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_{n-1}) + f(t_n)\right)\end{aligned}$$

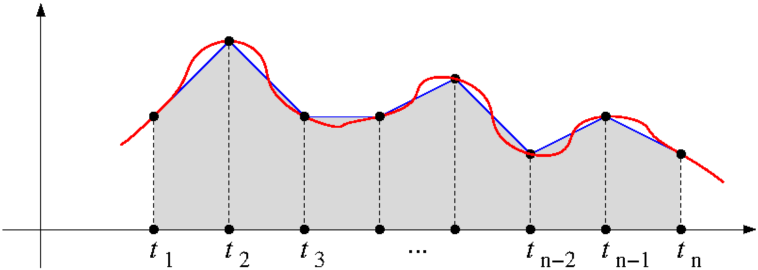
Regra do Trapézio



Dados $t_1 = a$, $t_n = b$ e $t_{i+1} - t_i = \Delta t$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt \quad &\approx \quad \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_1) + f(t_2)\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_2) + f(t_3)\right) + \ldots \\ &+ \quad \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_{n-2}) + f(t_{n-1})\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_{n-1}) + f(t_n)\right)\end{aligned}$$

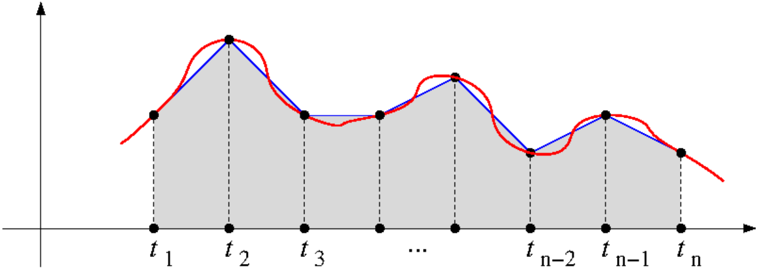
Regra do Trapézio



Dados $t_1 = a$, $t_n = b$ e $t_{i+1} - t_i = \Delta t$,

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \Delta t \left(\frac{f(t_1)}{2} + f(t_2) + \ldots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2} \right)$$

Regra do Trapézio

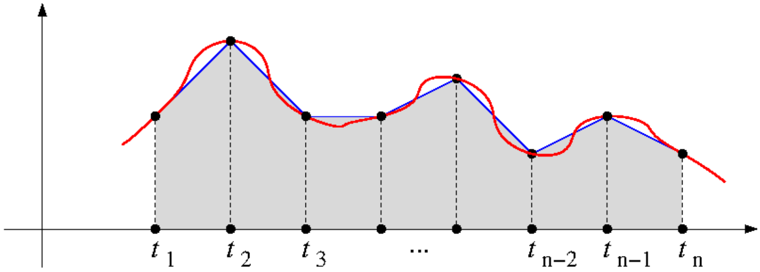


$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \Delta t \left(\frac{f(t_1)}{2} + f(t_2) + \ldots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2} \right)$$

No Matlab, se `f` é um vetor com amostragem `dt`, podemos considerar

```
intf = dt*sum([f(1)/2,f(2:end-1),f(end)/2])
```

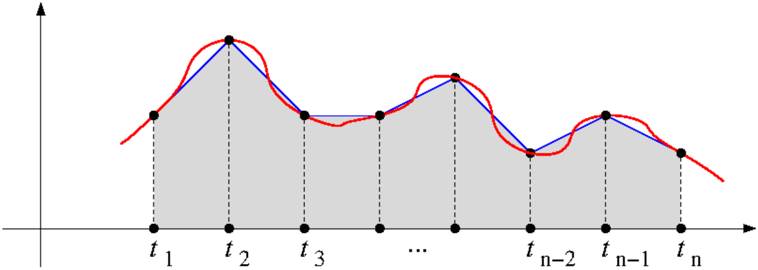
Regra do Trapézio



Se $f(a) = f(b)$, então

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \Delta t \left(\frac{f(t_1)}{2} + f(t_2) + \ldots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_1)}{2} \right)$$

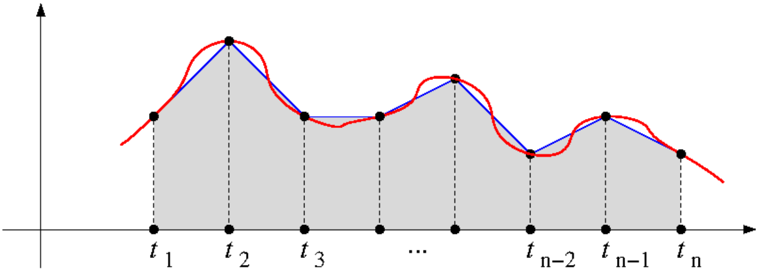
Regra do Trapézio



Se $f(a) = f(b)$, então

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \Delta t\,(f(t_1) + f(t_2) + \ldots + f(t_{n-1}))$$

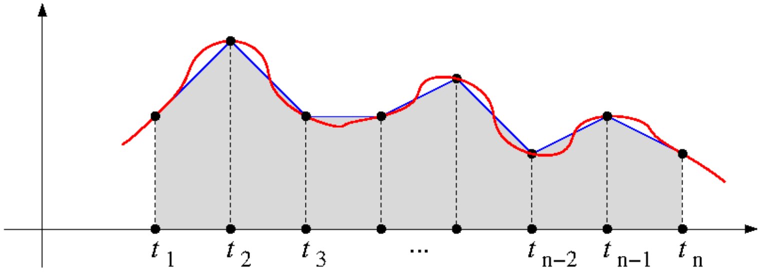
Regra do Trapézio



Se $f(a) = f(b)$, então

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \Delta t\,(f(t_1) + f(t_2) + \ldots + f(t_{n-1})) = \Delta t \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j)$$

Regra do Trapézio



Se $f(a) = f(b)$, então

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \Delta t\,(f(t_1) + f(t_2) + \ldots + f(t_{n-1})) = \Delta t \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j)$$

No Matlab, `intf = dt*sum(f(1:end-1))`.

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Assumindo que $f(x) = 0$ exceto se $0 < x < L$,

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{0}^{L} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Assumindo que $f(x) = 0$ exceto se $0 < x < L$,

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{0}^{L} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Em um grid $x_j = (j-1)\Delta x$, $j = 1, \ldots N+1$,

$$\hat{f}(\kappa) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi\kappa x_j}, \quad \Delta x = \frac{L}{N}$$

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Assumindo que $f(x) = 0$ exceto se $0 < x < L$,

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{0}^{L} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Em um grid $x_j = (j-1)\Delta x$, $j = 1, \ldots N+1$,

$$\hat{f}(\kappa) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi\kappa x_j}, \quad \Delta x = \frac{L}{N}$$

Grid na frequência: $\kappa_k = (k-1)/L$, $k = -N/2+1, \ldots, N/2$.

$$\hat{f}(\kappa_k) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi\kappa_k x_j}$$

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Assumindo que $f(x) = 0$ exceto se $0 < x < L$,

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{0}^{L} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Em um grid $x_j = (j-1)\Delta x$, $j = 1, \ldots N+1$,

$$\hat{f}(\kappa) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi\kappa x_j}, \quad \Delta x = \frac{L}{N}$$

Grid na frequência: $\kappa_k = (k-1)/L$, $k = -N/2+1, \ldots, N/2$.

$$\hat{f}(\kappa_k) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi \frac{k-1}{L} \frac{(j-1)L}{N}}$$

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Assumindo que $f(x) = 0$ exceto se $0 < x < L$,

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{0}^{L} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Em um grid $x_j = (j-1)\Delta x$, $j = 1, \dots N+1$,

$$\hat{f}(\kappa) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi\kappa x_j}, \quad \Delta x = \frac{L}{N}$$

Grid na frequência: $\kappa_k = (k-1)/L$, $k = -N/2+1, \dots, N/2$.

$$\hat{f}(\kappa_k) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i\frac{2\pi}{N}(k-1)(j-1)}$$

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Assumindo que $f(x) = 0$ exceto se $0 < x < L$,

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{0}^{L} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Em um grid $x_j = (j-1)\Delta x$, $j = 1, \ldots N+1$,

$$\hat{f}(\kappa) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi\kappa x_j}, \quad \Delta x = \frac{L}{N}$$

Grid na frequência: $\kappa_k = (k-1)/L$, $k = -N/2+1, \ldots, N/2$.

$$\hat{f}(\kappa_k) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i\frac{2\pi}{N}(k-1)(j-1)}$$

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Assumindo que $f(x) = 0$ exceto se $0 < x < L$,

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{0}^{L} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Em um grid $x_j = (j-1)\Delta x$, $j = 1, \ldots N + 1$,

$$\hat{f}(\kappa) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi\kappa x_j}, \quad \Delta x = \frac{L}{N}$$

Grid na frequência: $\kappa_k = (k-1)/L$, $k = -N/2+1, \ldots, N/2$.

$$\hat{f}(\kappa_k) \approx \Delta x FFT(f).$$

Transformada Rápida de Fourier

Vamos aproximar $\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$

Assumindo que $f(x) = 0$ exceto se $0 < x < L$,

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{0}^{L} f(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx$$

Em um grid $x_j = (j-1)\Delta x$, $j = 1, \dots N+1$,

$$\hat{f}(\kappa) \approx \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi\kappa x_j}, \quad \Delta x = \frac{L}{N}$$

Grid na frequência: $\kappa_k = (k-1)/L$, $k = -N/2+1, \dots, N/2$.

$$\hat{f}(\kappa_k) \approx \Delta x FFT(f).$$

OBS: no comando `fft`, $k = 0, \dots, N-1$. Para corrigir: `fftshift`