

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Geologia

GEOL7048: Tópicos Especiais em Geologia Exploratória II

Métodos semiquantitativos

Saulo P. Oliveira

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná



Aula 20

- Regressão linear
- Regressão polinomial
- Regressão linear

Regressão linear

Se buscamos uma reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} f(x_1) &= y_1 \\ f(x_2) &= y_2 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_m) &= y_m \end{cases}$$

Regressão linear

Se buscamos uma reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \\ \vdots \\ ax_m + b = y_m \end{cases}$$

Regressão linear

Se buscamos uma reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} ax_1 + b \\ ax_2 + b \\ \vdots \\ ax_m + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Regressão linear

Se buscamos uma reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} a(x_1) + b(1) \\ a(x_2) + b(1) \\ \vdots \\ a(x_m) + b(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Regressão linear

Se buscamos uma reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Regressão linear

Se buscamos uma reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Exercício: crie uma função `reglin.m` que, dados dois vetores `xo` e `yo`, encontre os coeficientes a, b acima, e faça o gráfico da reta correspondente junto com os pontos `xo` e `yo`.

Regressão linear

Se buscamos uma reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Exercício: crie uma função `reglin.m` que, dados dois vetores `xo` e `yo`, encontre os coeficientes a, b acima, e faça o gráfico da reta correspondente junto com os pontos `xo` e `yo`.

Sugestão para teste: `xo=linspace(-5,5,100); yo = 2*xo+1;`
`yo=yo.*(1+0.1*randn(1,100));`

Regressão polinomial



Em vez de uma reta, podemos procurar um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m).$$

Regressão polinomial



Em vez de uma reta, podemos procurar um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m).$$

Neste caso,

$$\begin{cases} f(x_1) &= y_1 \\ f(x_2) &= y_2 \\ \vdots &\vdots \\ f(x_m) &= y_m \end{cases}$$

Regressão polinomial



Em vez de uma reta, podemos procurar um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m).$$

Neste caso,

$$\begin{cases} a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 & = & y_1 \\ a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 & = & y_2 \\ & \vdots & \\ a_n x_m^n + a_{n-1} x_m^{n-1} + \dots + a_2 x_m^2 + a_1 x_m + a_0 & = & y_m \end{cases}$$

Em vez de uma reta, podemos procurar um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m).$$

Neste caso,

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ & & \vdots & & & \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \dots & x_m^2 & x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Em vez de uma reta, podemos procurar um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m).$$

Neste caso,

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ & & \vdots & & & \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \dots & x_m^2 & x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Regressão polinomial



No matlab/octave: `polyfit` e `polyval`

Regressão polinomial



No matlab/octave: `polyfit` e `polyval`

Exemplo:

```
>> xo=linspace(-5,5,100);  
>> yo = 3*xo.^2 + 2*xo+1;  
>> yo=yo.*(1+0.1*randn(1,100));  
>> P = polyfit(xo,yo,3)  
>> plot(xo,yo,'o',xo,polyval(P,xo))
```


Regressão linear 2D



Se buscamos um plano

$$z = f(x, y) = ax + by + c$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) &= z_1 \\ f(x_2, y_2) &= z_2 \\ \vdots &\vdots \\ f(x_m, y_m) &= z_m \end{cases}$$

Regressão linear 2D



Se buscamos um plano

$$z = f(x, y) = ax + by + c$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = z_1 \\ ax_2 + by_2 + c = z_2 \\ \vdots \\ ax_m + by_m + c = z_m \end{cases}$$

Regressão linear 2D



Se buscamos um **plano**

$$z = f(x, y) = ax + by + c$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & & \\ x_m & y_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

Exemplo:

```
>> [xo,yo]=meshgrid(linspace(-5,5,50));  
>> zo = 2*xo + 3*yo + 2;  
>> zo = zo.*(1+0.1*randn(50));  
>> A = [xo(:),yo(:),0*yo(:)+1];  
>> b = zo(:);  
>> x = A\b  
>> plot3(xo(:),yo(:),zo(:),'o')  
>> hold on  
>> mesh(xo,yo,x(1)*xo + x(2)*yo + x(3))  
>> hold off
```

Regressão polinomial 2D

Em geral, podemos buscar uma superfície

$$z = f(x, y) = a_{n,0}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1}y + \dots + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) &= z_1 \\ f(x_2, y_2) &= z_2 \\ \vdots &\vdots \\ f(x_m, y_m) &= z_m \end{cases}$$

Regressão polinomial 2D

Em geral, podemos buscar uma superfície

$$z = f(x, y) = a_{n,0}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1}y^1 + \dots + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} a_{n,0}x_1^n + a_{n,n-1}x_1^{n-1}y_1^1 + \dots + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}y_1 + a_{0,0} & = & z_2 \\ a_{n,0}x_2^n + a_{n,n-1}x_2^{n-1}y_2^1 + \dots + a_{1,0}x_2 + a_{0,1}y_2 + a_{0,0} & = & z_1 \\ & \vdots & \\ a_{n,0}x_m^n + a_{n,n-1}x_m^{n-1}y_m^1 + \dots + a_{1,0}x_m + a_{0,1}y_m + a_{0,0} & = & z_m \end{cases}$$

Regressão polinomial 2D

Em geral, podemos buscar uma superfície

$$z = f(x, y) = a_{n,0}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1}y^1 + \dots + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}$$

que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m),$$

chegamos ao sistema sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1}y_1^1 & \dots & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1}y_2^1 & \dots & x_2 & y_2 & 1 \\ & & \vdots & & & \\ x_m^n & x_m^{n-1}y_m^1 & \dots & x_m & y_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,n-1} \\ \vdots \\ a_{0,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$