

Universidade Federal do Paraná  
Programa de Pós-Graduação em Geologia

# GEOL7048: Tópicos Especiais em Geologia Exploratória II

## Métodos semiquantitativos

Saulo P. Oliveira

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná



# Aula 21

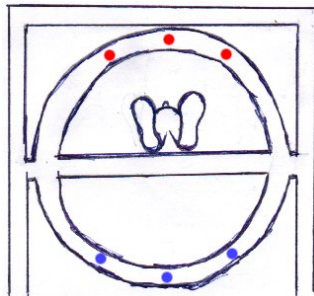
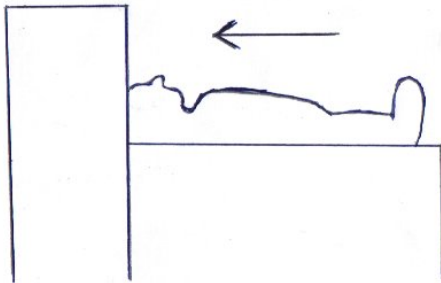
---

- Aplicação: tomografia sísmica
- SVD e regularização
- Exemplo
- Métodos de gradientes conjugados

# Motivação



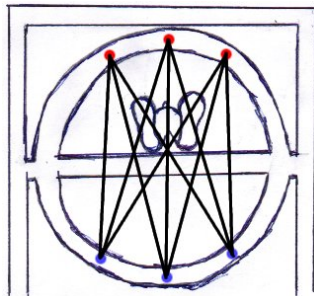
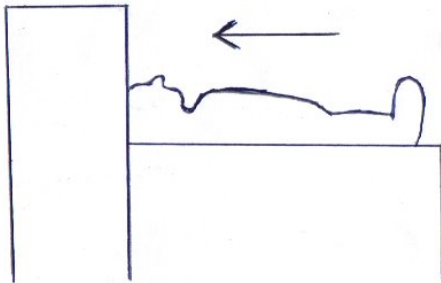
Tomografia em medicina:



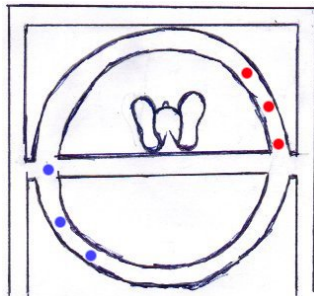
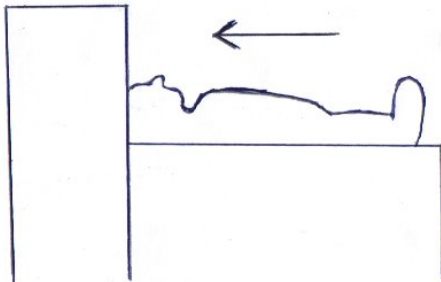
# Motivação



Tomografia em medicina:



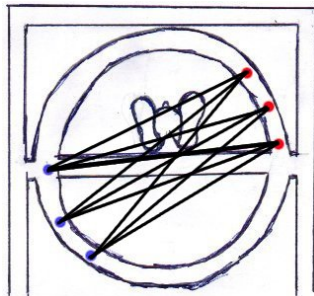
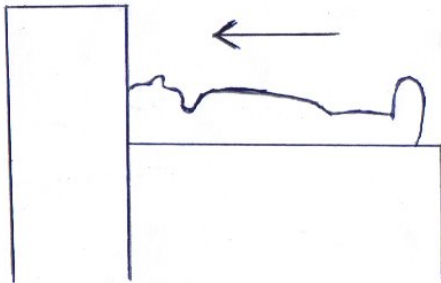
## Tomografia em medicina:



# Motivação



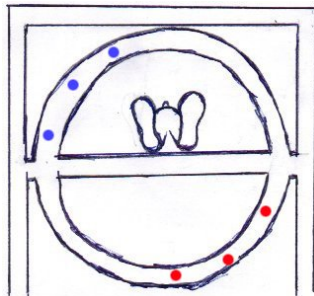
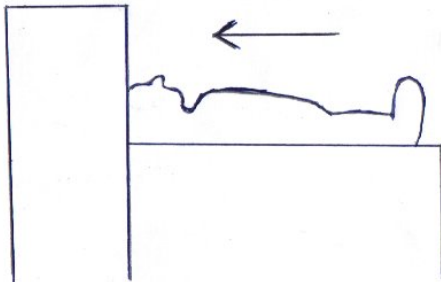
Tomografia em medicina:



# Motivação



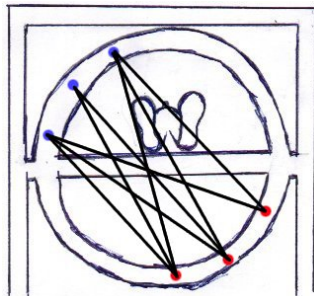
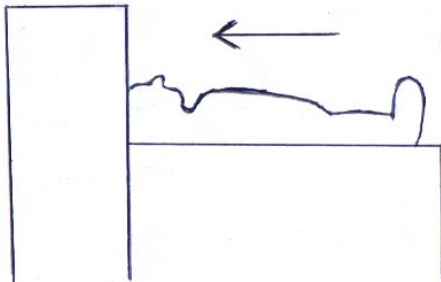
Tomografia em medicina:



# Motivação



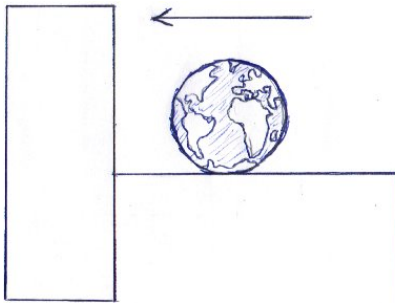
Tomografia em medicina:



# Motivação



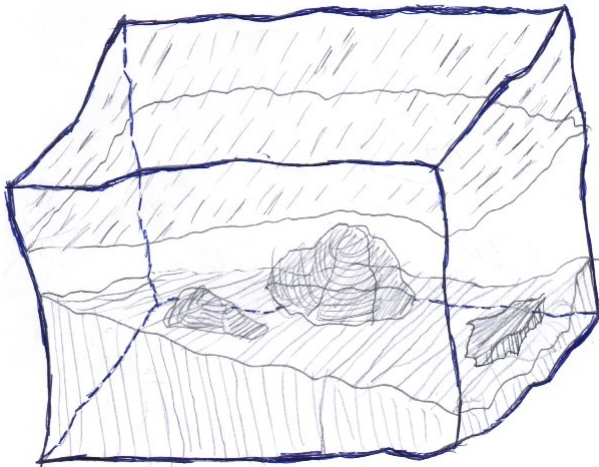
Gostariíamos de fazer o mesmo para visualizar o interior da Terra..



# Motivação



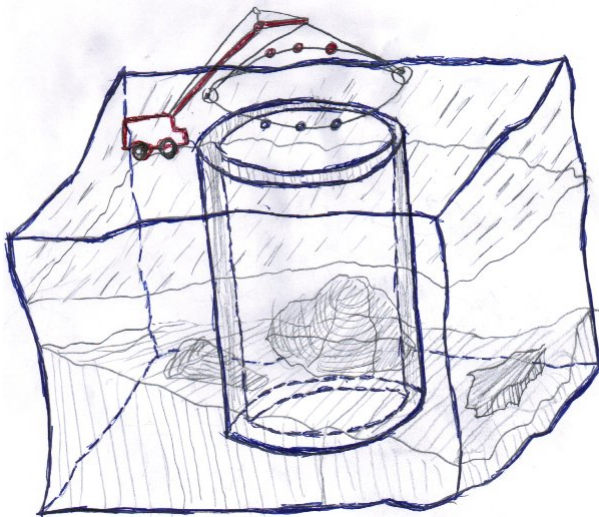
E se o tomógrafo entrasse na Terra ?



# Motivação



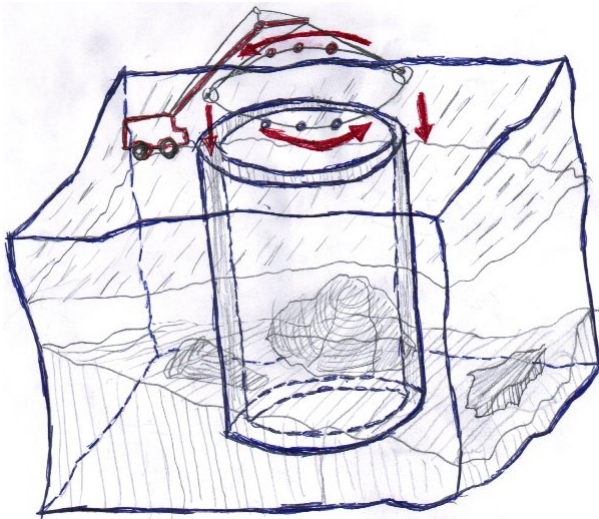
E se o tomógrafo entrasse na Terra ?



# Motivação



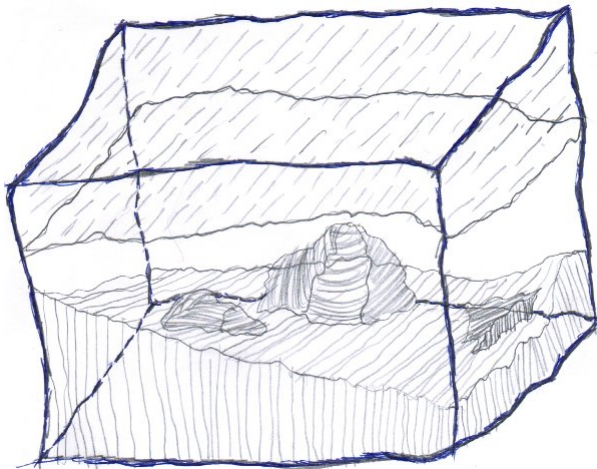
E se o tomógrafo entrasse na Terra ?



# Motivação



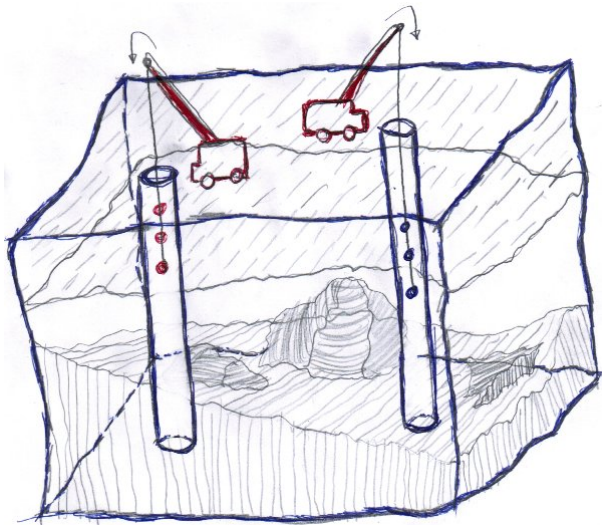
Uma situação mais próxima à realidade:



# Motivação



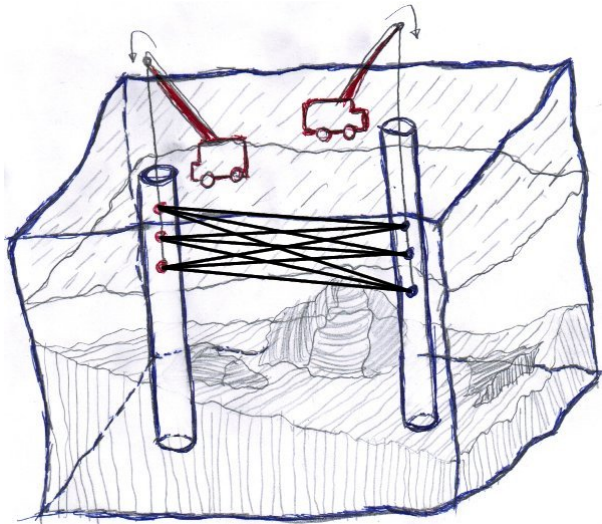
Uma situação mais próxima à realidade:



# Motivação



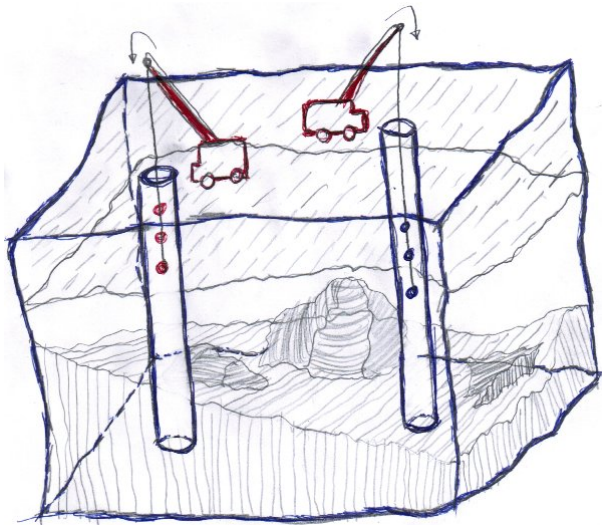
Uma situação mais próxima à realidade:



# Motivação



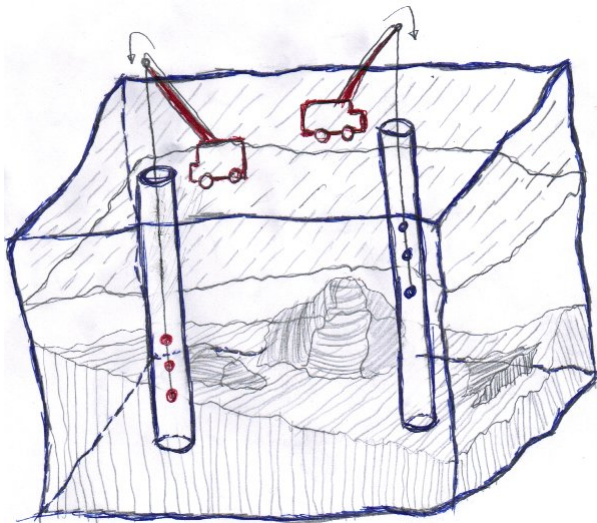
Uma situação mais próxima à realidade:



# Motivação



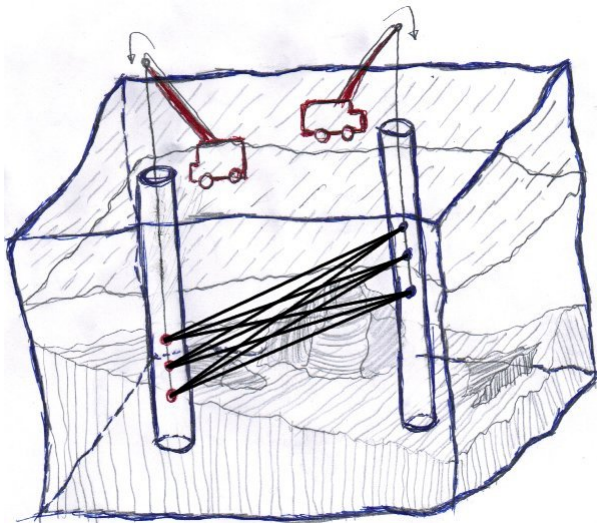
Uma situação mais próxima à realidade:



# Motivação



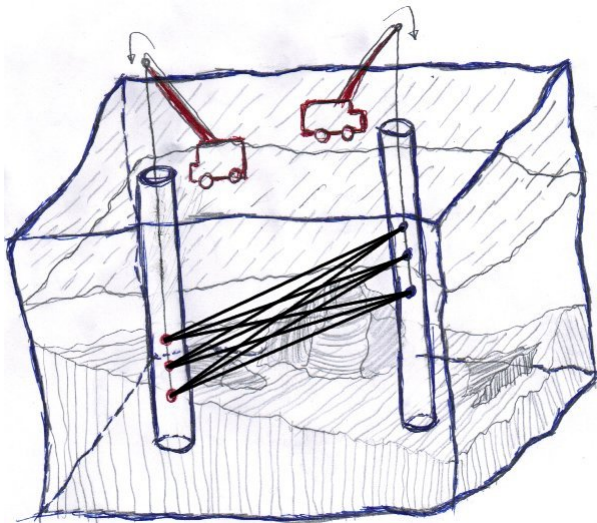
Uma situação mais próxima à realidade:



# Formulação do modelo



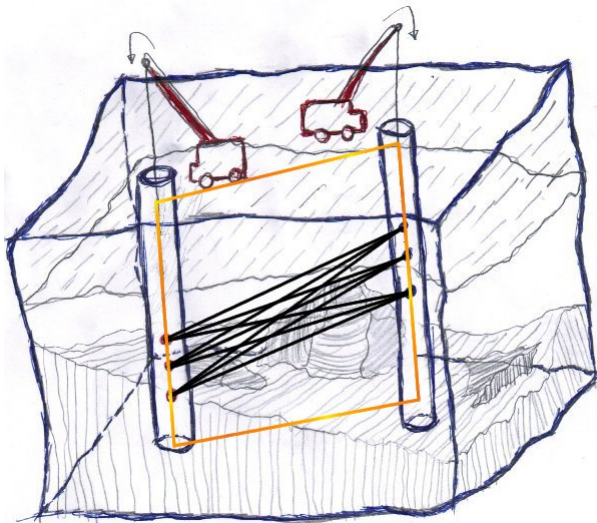
Vamos restringir o domínio:



# Formulação do modelo



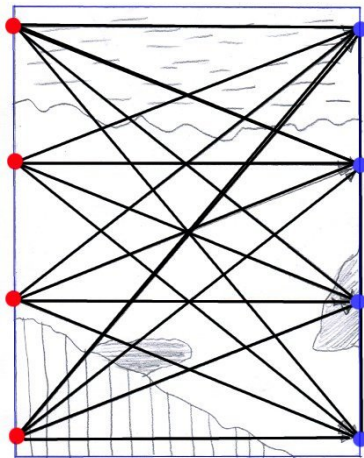
Vamos restringir o domínio:



# Formulação do modelo



Vamos restringir o domínio:



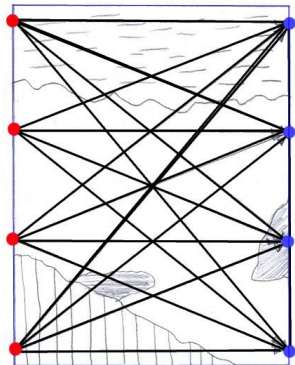
# Formulação do modelo



## Tomografia sísmica de tempo de trânsito:

- Em vez de raios X, as **fontes** geram ondas sísmicas;
- Obtemos dos **receptores** o instante de chegada das ondas;

**Simplificação:** percurso das ondas na forma de raios retos



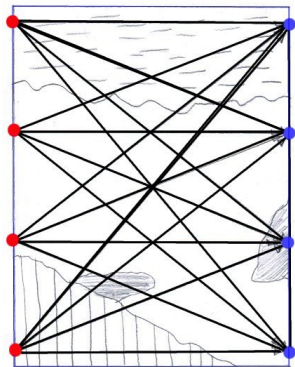
# Formulação do modelo



## Tomografia sísmica de tempo de trânsito:

- Em vez de raios X, as **fontes** geram ondas sísmicas;
- Obtemos dos **receptores** o instante de chegada das ondas;

**Simplificação:** percurso das ondas na forma de raios retos



## Tempos de trânsito:

Identificamos cada material no ponto  $(x, y)$  por meio da velocidade  $v(x, y)$  com que uma onda sísmica se propaga neste ponto.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

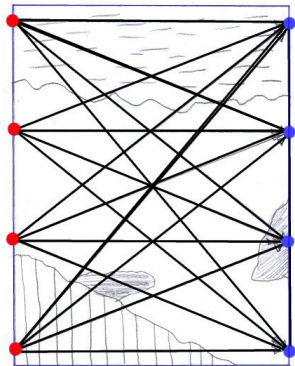
# Formulação do modelo



## Tomografia sísmica de tempo de trânsito:

- Em vez de raios X, as **fontes** geram ondas sísmicas;
- Obtemos dos **receptores** o instante de chegada das ondas;

**Simplificação:** percurso das ondas na forma de raios retos



## Tempos de trânsito:

Identificamos cada material no ponto  $(x, y)$  por meio da velocidade  $v(x, y)$  com que uma onda sísmica se propaga neste ponto.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

# Formulação do modelo



## Tomografia sísmica de tempo de trânsito:

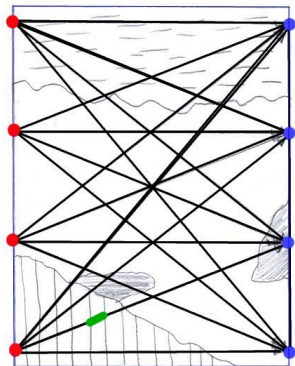
- Em vez de raios X, as **fontes** geram ondas sísmicas;
- Obtemos dos **receptores** o instante de chegada das ondas;

**Simplificação:** percurso das ondas na forma de raios retos

## Tempos de trânsito:

Identificamos cada material no ponto  $(x, y)$  por meio da velocidade  $v(x, y)$  com que uma onda sísmica se propaga neste ponto.

$$\Delta t_j = \frac{\Delta x_j}{v_j}$$



# Formulação do modelo



## Tomografia sísmica de tempo de trânsito:

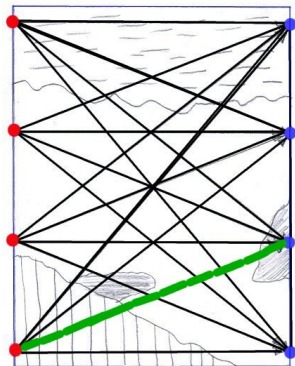
- Em vez de raios X, as **fontes** geram ondas sísmicas;
- Obtemos dos **receptores** o instante de chegada das ondas;

**Simplificação:** percurso das ondas na forma de raios retos

## Tempos de trânsito:

Identificamos cada material no ponto  $(x, y)$  por meio da velocidade  $v(x, y)$  com que uma onda sísmica se propaga neste ponto.

$$t_i = \sum_j \frac{\Delta x_j}{v_j}$$



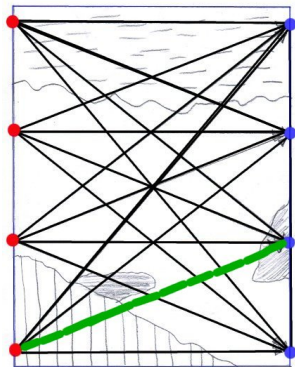
# Formulação do modelo



## Tomografia sísmica de tempo de trânsito:

- Em vez de raios X, as **fontes** geram ondas sísmicas;
- Obtemos dos **receptores** o instante de chegada das ondas;

**Simplificação:** percurso das ondas na forma de raios retos



## Tempos de trânsito:

Identificamos cada material no ponto  $(x, y)$  por meio da velocidade  $v(x, y)$  com que uma onda sísmica se propaga neste ponto.

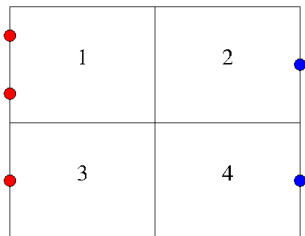
$$t_i = \sum_j \Delta x_j s_j, \quad s_j = \frac{1}{v_j} : \text{vagarosidade}$$

# Formulação do modelo



**Geometria:** Domínio retangular dividido em blocos

- $n = n_x \times n_y$  blocos retangulares;
- $m_f$  fontes e  $m_r$  receptores ( $m = m_f \times m_r$  raios retos;)

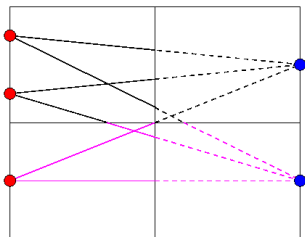


# Formulação do modelo



**Geometria:** Domínio retangular dividido em blocos

- $n = n_x \times n_y$  blocos retangulares;
- $m_f$  fontes e  $m_r$  receptores ( $m = m_f \times m_r$  raios retos;)



Sejam

- $s_j$  : vagarosidade do  $j$ -ésimo bloco;
- $t_i$  : tempo de trânsito do  $i$ -ésimo raio;
- $G_{ij}$  : distância que o  $i$ -ésimo raio transita no  $j$ -ésimo bloco.

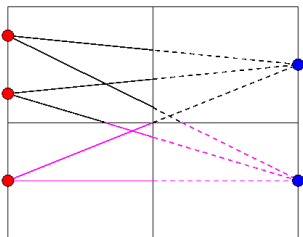
$$t_i = \sum_{j=1}^n \Delta x_j s_j$$

# Formulação do modelo



**Geometria:** Domínio retangular dividido em blocos

- $n = n_x \times n_y$  blocos retangulares;
- $m_f$  fontes e  $m_r$  receptores ( $m = m_f \times m_r$  raios retos;)



Sejam

- $s_j$  : vagarosidade do  $j$ -ésimo bloco;
- $t_i$  : tempo de trânsito do  $i$ -ésimo raio;
- $G_{ij}$  : distância que o  $i$ -ésimo raio transita no  $j$ -ésimo bloco.

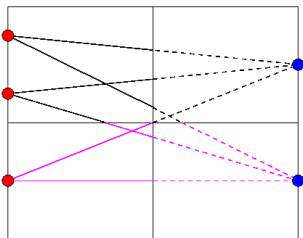
$$t_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} s_j$$

# Formulação do modelo



**Geometria:** Domínio retangular dividido em blocos

- $n = n_x \times n_y$  blocos retangulares;
- $m_f$  fontes e  $m_r$  receptores ( $m = m_f \times m_r$  raios retos;)



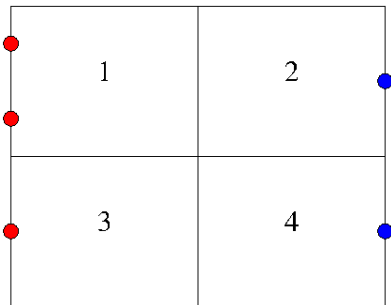
Sejam

- $s_j$  : vagarosidade do  $j$ -ésimo bloco;
- $t_i$  : tempo de trânsito do  $i$ -ésimo raio;
- $G_{ij}$  : distância que o  $i$ -ésimo raio transita no  $j$ -ésimo bloco.

$$t_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} s_j$$

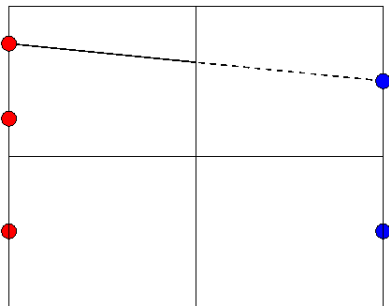
Nosso problema se reduz ao **sistema linear**  $Gs = t$

# Construção da matriz tomográfica



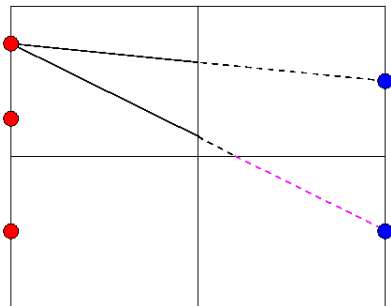
$$G = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

# Construção da matriz tomográfica



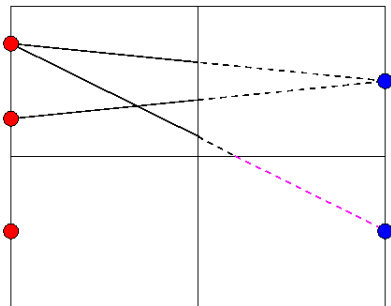
$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

# Construção da matriz tomográfica



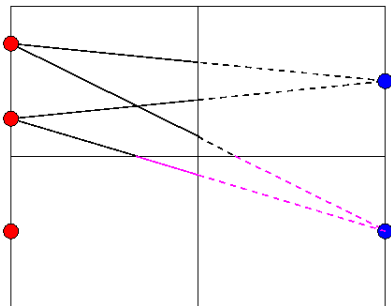
$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & g_{24} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

# Construção da matriz tomográfica



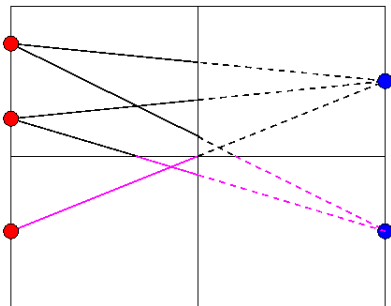
$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

# Construção da matriz tomográfica



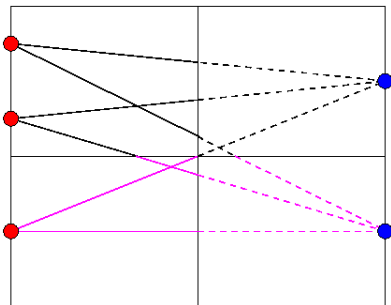
$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & 0 & 0 \\ g_{41} & 0 & g_{43} & g_{44} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

# Construção da matriz tomográfica



$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & 0 & 0 \\ g_{41} & 0 & g_{43} & g_{44} \\ 0 & g_{52} & g_{53} & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

# Construção da matriz tomográfica



$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & 0 & 0 \\ g_{41} & 0 & g_{43} & g_{44} \\ 0 & g_{52} & g_{53} & 0 \\ 0 & 0 & g_{63} & g_{64} \end{bmatrix}$$

# Sobre a matriz $G$



Em geral, a matriz tomográfica é **retangular**

# Sobre a matriz $G$



Em geral, a matriz tomográfica é **retangular**

Buscamos a solução de quadrados mínimos:

# Sobre a matriz $G$



Em geral, a matriz tomográfica é **retangular**

Buscamos a solução de quadrados mínimos:

$$s^* = \min_{s \in \mathbb{R}^n} \|Gs - t\|, \quad \|x\| = \sqrt{x^T x}$$

$$G^T G s^* = G^T t \quad (\text{equações normais})$$

# Sobre a matriz $G$



Em geral, a matriz tomográfica é **retangular**

Buscamos a solução de quadrados mínimos:

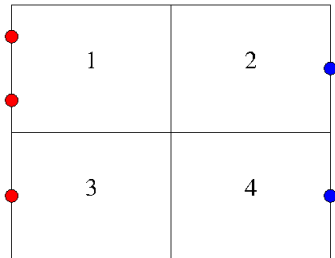
$$G^T G s^* = G^T t \quad (\text{equações normais})$$

Mesmo este sistema pode não ter solução..

# Sobre a matriz G



Outra divisão em blocos:



# Sobre a matriz G



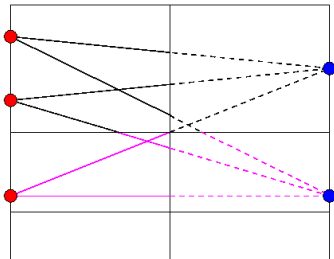
Outra divisão em blocos:

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |
| 5 | 6 |

# Sobre a matriz G



Outra divisão em blocos:

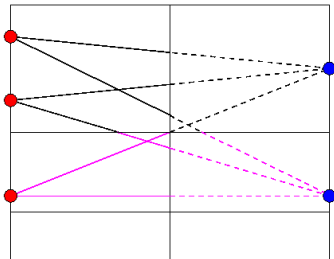


$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & g_{24} & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{41} & 0 & g_{43} & g_{44} & 0 & 0 \\ 0 & g_{52} & g_{53} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{63} & g_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Sobre a matriz G



Outra divisão em blocos:



$$G^T G = \begin{bmatrix} * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$G^T G s^* = G^T t$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$(US\bar{V}^T)^T(US\bar{V}^T)s^* = (US\bar{V}^T)^T t$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$VS\bar{U}^T US\bar{V}^T \mathbf{s}^* = VS\bar{U}^T \mathbf{t}$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$VS\bar{U}^T US\bar{V}^T s^* = VS\bar{U}^T t$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$VSIS\bar{V}^T \mathbf{s}^* = VS\bar{U}^T \mathbf{t}$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$VS^2\bar{V}^T \mathbf{s}^* = VS\bar{U}^T \mathbf{t}$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$\bar{V}^T V S^2 \bar{V}^T \mathbf{s}^* = \bar{V}^T V S \bar{U}^T \mathbf{t}$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$S^2 \bar{V}^T s^* = S \bar{U}^T t$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$S^2 \bar{V}^T \mathbf{s}^* = S \bar{U}^T \mathbf{t}$$

Se  $S$  for inversível (ou seja,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n > 0$ ),

$$\bar{V}^T \mathbf{s}^* = S^{-1} \bar{U}^T \mathbf{t}$$

# Decomposição em valores singulares

Decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $G = G_{m \times n}$ :

$$G = US\bar{V}^T, \quad \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = I, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

Vamos utilizar a SVD para resolver as equações normais:

$$S^2 \bar{V}^T \mathbf{s}^* = S \bar{U}^T \mathbf{t}$$

Se  $S$  for inversível (ou seja,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n > 0$ ),

$$\mathbf{s}^* = V S^{-1} \bar{U}^T \mathbf{t}$$

# Pseudo-inversa e SVD truncada

SVD:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & 1/\sigma_n \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ : valores singulares.

E se  $\sigma_r = 0$ , ou seja,  $\sigma_r = \sigma_{r+1} = \dots \sigma_n = 0$  ?

# Pseudo-inversa e SVD truncada

SVD:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & 1/\sigma_n \end{bmatrix},$$

E se  $\sigma_r = 0$ , ou seja,  $\sigma_r = \sigma_{r+1} = \dots \sigma_n = 0$  ?

Pseudo-inversa:

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1/\sigma_{r-1} & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Pseudo-inversa e SVD truncada

---

SVD:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right)$$

Pseudo-inversa:

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

# Pseudo-inversa e SVD truncada

---

SVD:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right)$$

Pseudo-inversa:

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

Dado  $\delta \approx 0$ , seja  $\tilde{r}$  tal que  $\sigma_{\tilde{r}-1} \geq \delta$  e  $\sigma_{\tilde{r}} < \delta$ .

# Pseudo-inversa e SVD truncada

---

SVD:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right)$$

Pseudo-inversa:

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

Dado  $\delta \approx 0$ , seja  $\tilde{r}$  tal que  $\sigma_{\tilde{r}-1} \geq \delta$  e  $\sigma_{\tilde{r}} < \delta$ .

Pseudo-inversa:  $\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}$ ,

# Pseudo-inversa e SVD truncada

SVD:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right)$$

Pseudo-inversa:

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

Dado  $\delta \approx 0$ , seja  $\tilde{r}$  tal que  $\sigma_{\tilde{r}-1} \geq \delta$  e  $\sigma_{\tilde{r}} < \delta$ .

Pseudo-inversa:  $\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}$ ,

$$\mathbf{S}^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}-1}}, \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}}}, \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}+1}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

# Pseudo-inversa e SVD truncada

SVD:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right)$$

Pseudo-inversa:

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

Dado  $\delta \approx 0$ , seja  $\tilde{r}$  tal que  $\sigma_{\tilde{r}-1} \geq \delta$  e  $\sigma_{\tilde{r}} < \delta$ .

Pseudo-inversa:  $\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}$ ,

$$\mathbf{S}^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}-1}}, \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}}}, \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}+1}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

SVD truncada:  $\mathbf{s}_\delta^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}_\delta^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}$ ,

$$\mathbf{S}_\delta^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}-1}}, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \right)$$

Regularização de Tikhonov: dado  $\lambda > 0$ ,

$$G_{\lambda}^T G_{\lambda} s_{\lambda}^* = G_{\lambda}^T t_{\lambda}, \quad G_{\lambda} = \begin{bmatrix} G \\ \lambda I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad t_{\lambda} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Regularização de Tikhonov: dado  $\lambda > 0$ ,

$$G_{\lambda}^T G_{\lambda} \mathbf{s}_{\lambda}^* = G_{\lambda}^T \mathbf{t}_{\lambda}, \quad G_{\lambda} = \begin{bmatrix} G \\ \lambda I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar que  $G_{\lambda} = U_{\lambda} S_{\lambda} \bar{V}_{\lambda}^T$ , com  $\bar{U}_{\lambda}^T U_{\lambda} = \bar{V}_{\lambda}^T V_{\lambda} = I$  e

$$S_{\lambda} = \text{diag} \left( \sqrt{\sigma_1^2 + \lambda^2}, \sqrt{\sigma_2^2 + \lambda^2}, \dots, \sqrt{\sigma_n^2 + \lambda^2} \right)$$

Regularização de Tikhonov: dado  $\lambda > 0$ ,

$$G_{\lambda}^T G_{\lambda} \mathbf{s}_{\lambda}^* = G_{\lambda}^T \mathbf{t}_{\lambda}, \quad G_{\lambda} = \begin{bmatrix} G \\ \lambda I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar que  $G_{\lambda} = U_{\lambda} S_{\lambda} \bar{V}_{\lambda}^T$ , com  $\bar{U}_{\lambda}^T U_{\lambda} = \bar{V}_{\lambda}^T V_{\lambda} = I$  e

$$S_{\lambda} = \text{diag} \left( \sqrt{\sigma_1^2 + \lambda^2}, \sqrt{\sigma_2^2 + \lambda^2}, \dots, \sqrt{\sigma_n^2 + \lambda^2} \right)$$

Garantimos assim que os valores singulares são positivos, logo

$$\mathbf{s}_{\lambda}^* = V_{\lambda} S_{\lambda}^{-1} \bar{U}_{\lambda}^T \mathbf{t}_{\lambda}$$

Regularização de Tikhonov: dado  $\lambda > 0$ ,

$$G_{\lambda}^T G_{\lambda} \mathbf{s}_{\lambda}^* = G_{\lambda}^T \mathbf{t}_{\lambda}, \quad G_{\lambda} = \begin{bmatrix} G \\ \lambda I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar que  $G_{\lambda} = U_{\lambda} S_{\lambda} \bar{V}_{\lambda}^T$ , com  $\bar{U}_{\lambda}^T U_{\lambda} = \bar{V}_{\lambda}^T V_{\lambda} = I$  e

$$S_{\lambda} = \text{diag} \left( \sqrt{\sigma_1^2 + \lambda^2}, \sqrt{\sigma_2^2 + \lambda^2}, \dots, \sqrt{\sigma_n^2 + \lambda^2} \right)$$

Garantimos assim que os valores singulares são positivos, logo

$$\mathbf{s}_{\lambda}^* = V_{\lambda} S_{\lambda}^{-1} \bar{U}_{\lambda}^T \mathbf{t}_{\lambda}$$

Pode-se mostrar que  $\mathbf{s}_{\lambda}^* = V D \bar{U}^T \mathbf{t}$ ,  $D = \text{diag} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \lambda^2}, \dots, \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \lambda^2} \right)$

# Resumo

---

## SVD:

$$\mathbf{s}^* = V S^{-1} \bar{U}^T \mathbf{t}, \quad S^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right)$$

**Pseudo-inversa:** se  $\sigma_i = 0$  para  $i \geq r$ ,

$$\mathbf{s}^+ = V S^+ \bar{U}^T \mathbf{t}, \quad S^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

**SVD truncada:** se  $\sigma_i < \delta$  para  $i \geq \tilde{r}$ ,

$$\mathbf{s}_\delta^+ = V S_\delta^+ \bar{U}^T \mathbf{t}, \quad S_\delta^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}-1}}, 0, \dots, 0 \right)$$

**Regularização de Tikhonov:**

$$\mathbf{s}_\lambda^* = V D \bar{U}^T \mathbf{t}, \quad D = \text{diag} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \lambda^2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2 + \lambda^2}, \dots, \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \lambda^2} \right)$$

# Resumo

---

## SVD:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \text{diag} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2} \right)$$

**Pseudo-inversa:** se  $\sigma_i = 0$  para  $i \geq r$ ,

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}^+ = \text{diag} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_{r-1}^2}, 0, \dots, 0 \right)$$

**SVD truncada:** se  $\sigma_i < \delta$  para  $i \geq \tilde{r}$ ,

$$\mathbf{s}_\delta^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}_\delta^+ \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{S}_\delta^+ = \text{diag} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{\sigma_{\tilde{r}-1}}{\sigma_{\tilde{r}-1}^2}, 0, \dots, 0 \right)$$

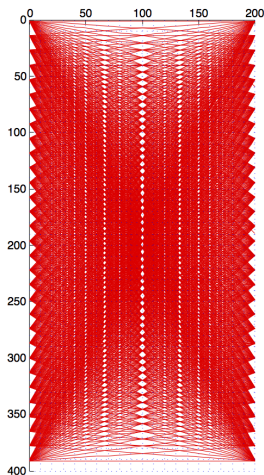
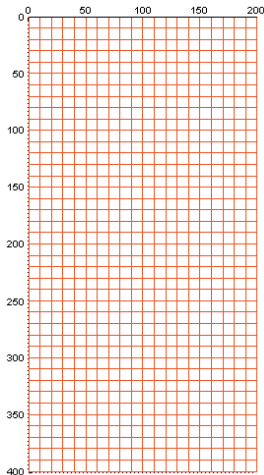
**Regularização de Tikhonov:**

$$\mathbf{s}_\lambda^* = \mathbf{V} \mathbf{D} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{t}, \quad \mathbf{D} = \text{diag} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \lambda^2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2 + \lambda^2}, \dots, \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \lambda^2} \right)$$

# Exemplo



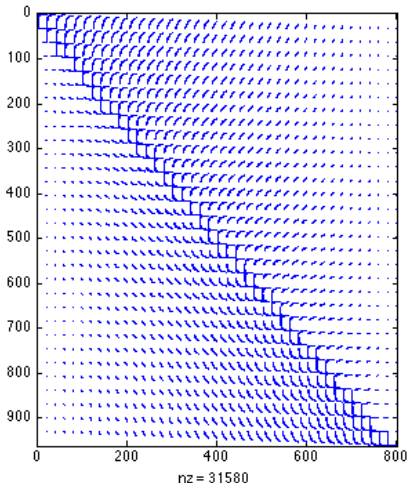
**Geometria:**  $40 \times 20$  blocos de tamanho  $10 \times 10$  ( $m^2$ )  
31 fontes e 31 receptores



# Exemplo



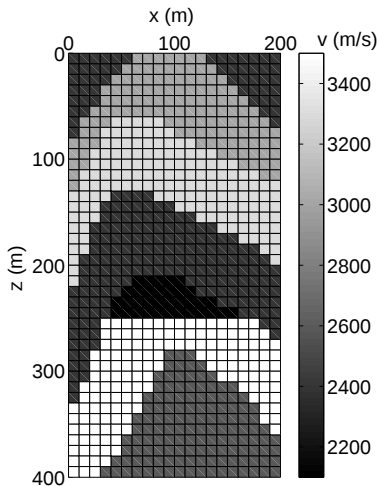
Esparsidade da matriz  $G$  ( $31580/720000 \approx 0.04$ )



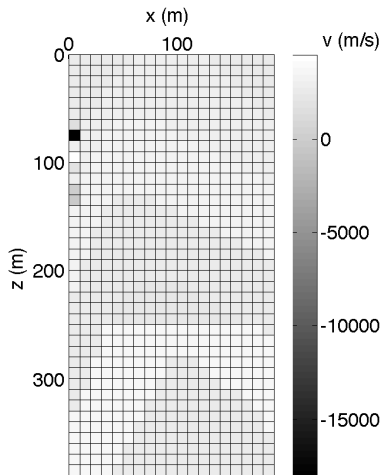
# Exemplo



Os tempos de trânsitos são obtidos do seguinte modelo:

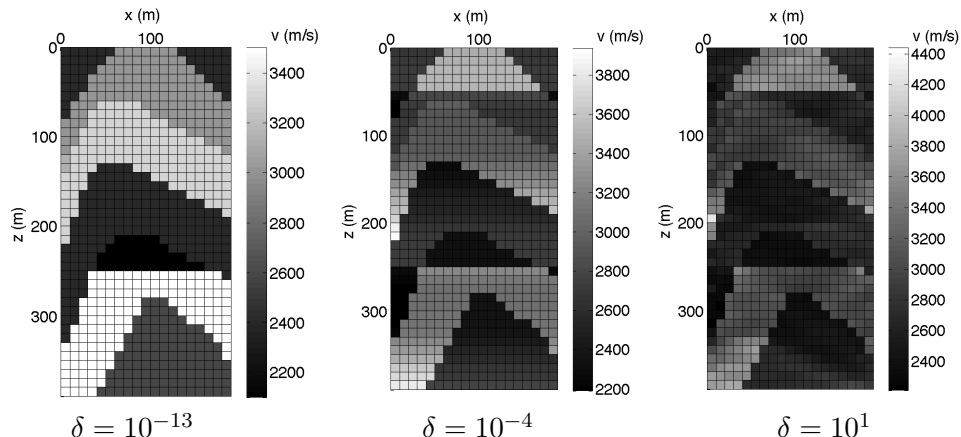


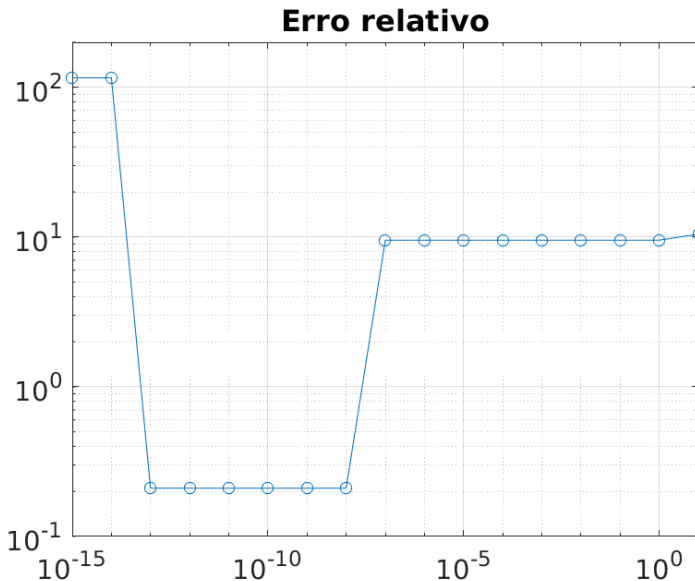
# Resultados / pseudo-inversa



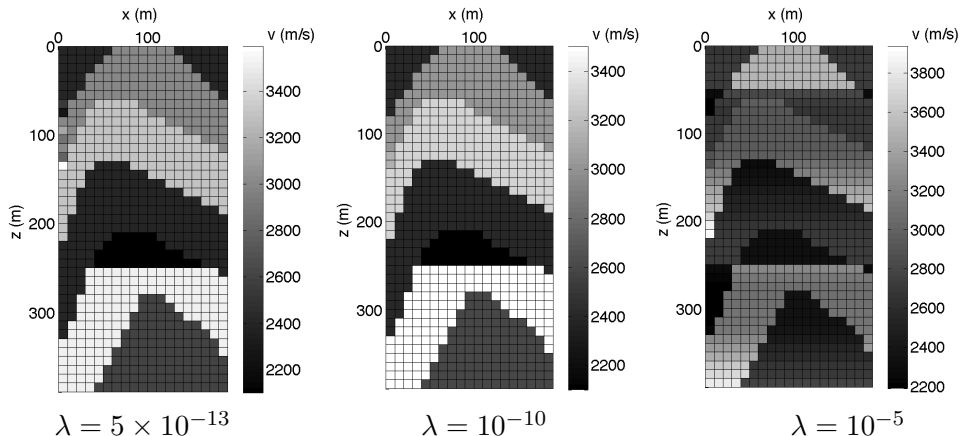
Erro relativo: 109.22%

# Resultados / SVD truncada

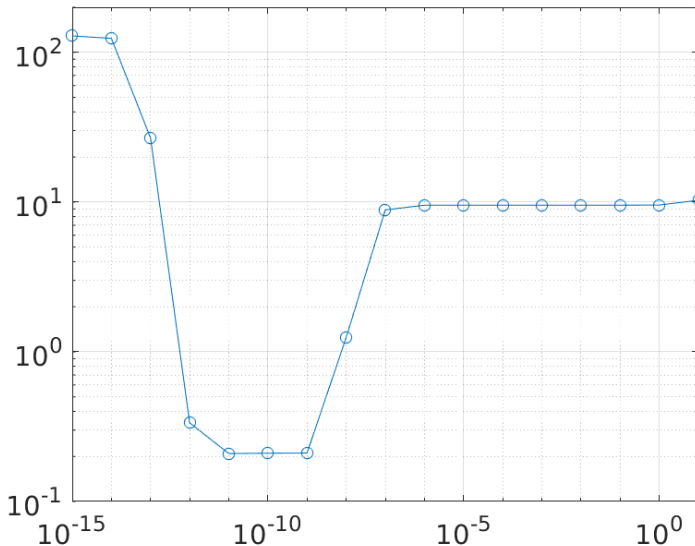




# Resultados / SVD regularizada



## Erro relativo



# Gradientes conjugados



Método de gradientes conjugados para o sistema linear  $Ax = b$

$$r_0 \leftarrow b - Ax_0;$$

$$p_0 \leftarrow r_0;$$

**Repita**

$$\alpha_k \leftarrow \frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k};$$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k;$$

$$r_{k+1} \leftarrow r_k - \alpha_k A p_k;$$

$$\beta_k \leftarrow \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k};$$

$$p_{k+1} \leftarrow r_{k+1} + \beta_k p_k;$$

**Até que**  $\|r_k\| = \|b - Ax_k\| \leq tol$

# Gradientes conjugados



Para o sistema  $A^T A x = A^T b$ , com  $A^T A$  inversível,

$$\mathbf{r}_0 \leftarrow \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0;$$

$$\mathbf{z}_0 \leftarrow A^T \mathbf{r}_0;$$

$$\mathbf{p}_0 \leftarrow \mathbf{z}_0;$$

**Repita**

$$\mathbf{w}_k \leftarrow A\mathbf{p}_k;$$

$$\alpha_k \leftarrow \frac{\mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k}{\mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k};$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k;$$

$$\mathbf{r}_{k+1} \leftarrow \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{w}_k;$$

$$\mathbf{z}_{k+1} \leftarrow A^T \mathbf{r}_{k+1}$$

$$\beta_k \leftarrow \frac{\mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1}}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k};$$

$$\mathbf{p}_{k+1} \leftarrow \mathbf{z}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k;$$

**Até que**  $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k\| \leq tol$

# Gradientes conjugados



Em particular, seja  $A = G_\lambda = [G; \lambda I]$  e  $b = t_\lambda$ :

$$r_0 \leftarrow t_\lambda - G_\lambda s_0;$$

$$z_0 \leftarrow G_\lambda^T r_0;$$

$$p_0 \leftarrow z_0;$$

**Repita**

$$w_k \leftarrow G_\lambda p_k;$$

$$\alpha_k \leftarrow \frac{z_k^T z_k}{w_k^T w_k};$$

$$s_{k+1} \leftarrow s_k + \alpha_k p_k;$$

$$r_{k+1} \leftarrow r_k - \alpha_k w_k;$$

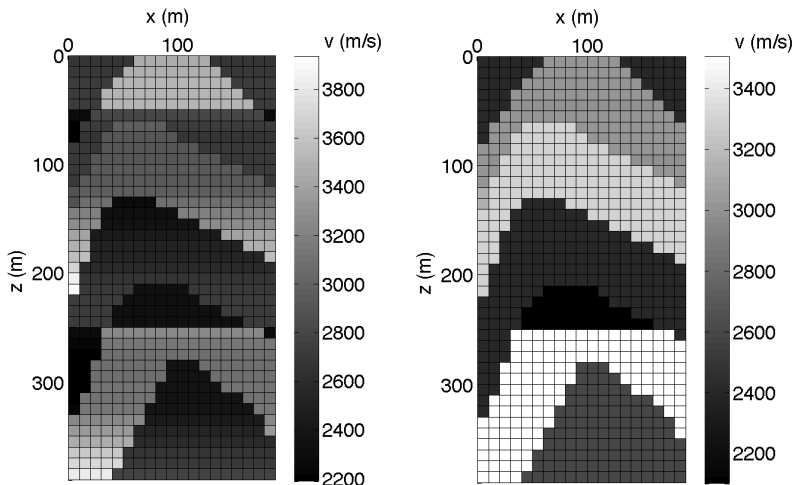
$$z_{k+1} \leftarrow G_\lambda^T r_{k+1}$$

$$\beta_k \leftarrow \frac{z_{k+1}^T z_{k+1}}{z_k^T z_k};$$

$$p_{k+1} \leftarrow z_{k+1} + \beta_k p_k;$$

**Até que**  $\|t_\lambda - G_\lambda s_k\| \leq tol$

# Resultados / Gradientes conjugados



Erro relativo ( $\lambda = 10^{-10}$ ): 9.54% (1666 iter) e 0.21% (32000 iter)