

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Geologia

GEOL7048: Tópicos Especiais em Geologia Exploratória II

Métodos semiquantitativos

Saulo P. Oliveira

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná



Aula 8

- Derivada 1D
- Aproximação por diferenças finitas

Derivada - motivação



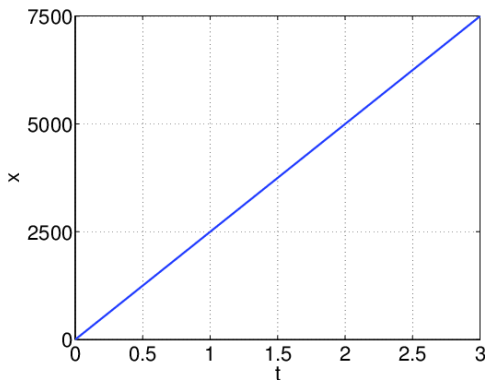
Motivação: velocidade em deslocamentos não uniformes

Derivada - motivação



Motivação: velocidade em deslocamentos não uniformes

MU (mov. unif.): deslocamento proporcional ao tempo de percurso



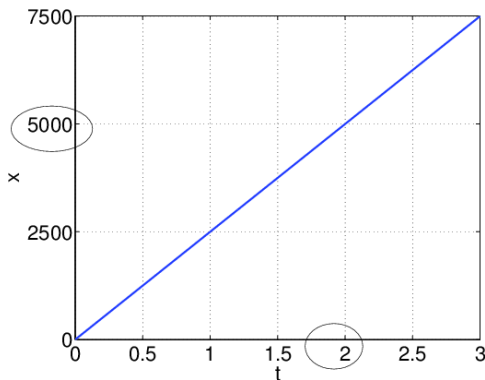
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Derivada - motivação



Motivação: velocidade em deslocamentos não uniformes

MU (mov. unif.): deslocamento proporcional ao tempo de percurso



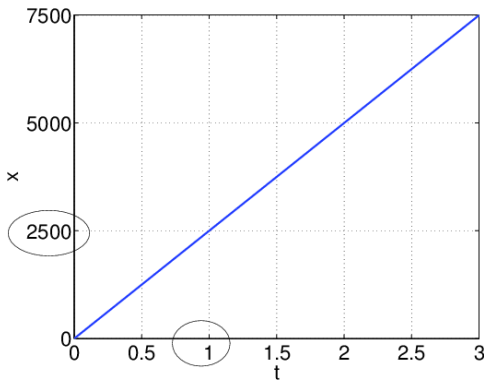
$$v = \frac{5000 - 0}{2 - 0} = 2500\text{m/s}$$

Derivada - motivação



Motivação: velocidade em deslocamentos não uniformes

MU (mov. unif.): deslocamento proporcional ao tempo de percurso



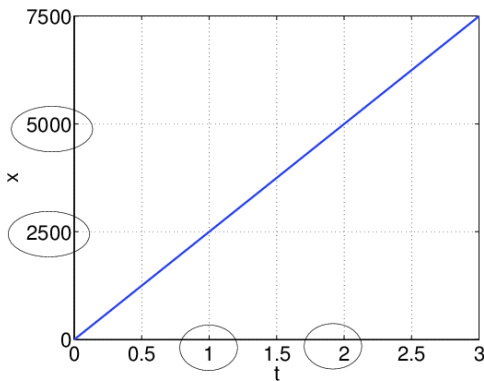
$$v = \frac{2500 - 0}{1 - 0} = 2500 \text{ m/s}$$

Derivada - motivação



Motivação: velocidade em deslocamentos não uniformes

MU (mov. unif.): deslocamento proporcional ao tempo de percurso

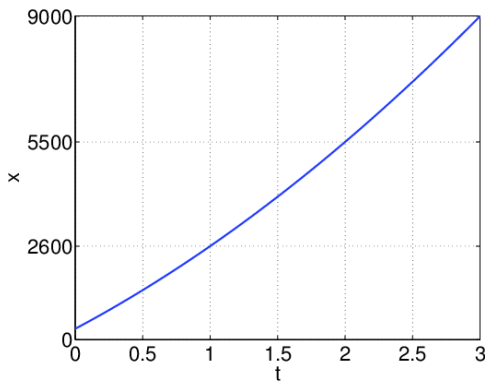


$$v = \frac{5000 - 2500}{2 - 1} = 2500\text{m/s}$$

Derivada - motivação



Caso intermediário: movimento uniformemente variado

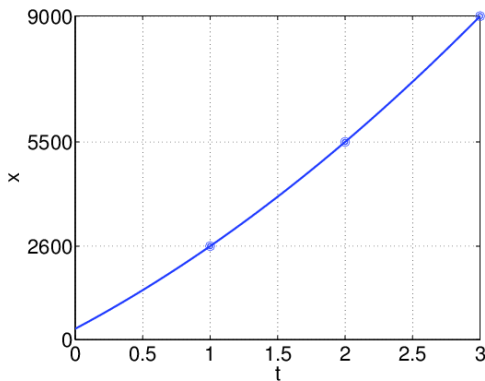


$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

Derivada - motivação



Caso intermediário: movimento uniformemente variado



$$x(t) = 300 + 2000t + 300t^2$$

$$x_0 = 300\text{m}$$

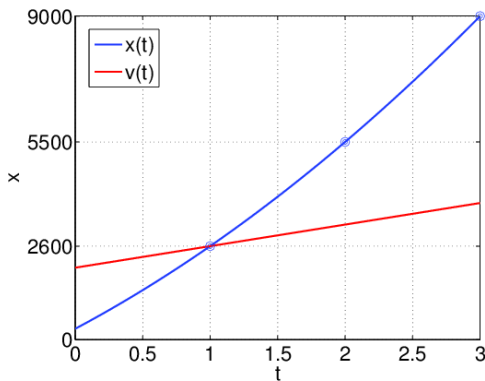
$$v_0 = 2000\text{m/s}$$

$$a = 600\text{m/s}^2$$

Derivada - motivação



Caso intermediário: movimento uniformemente variado



$$x(t) = 300 + 2000t + 300t^2$$

$$x_0 = 300\text{m}$$

$$v_0 = 2000\text{m/s}$$

$$a = 600\text{m/s}^2$$

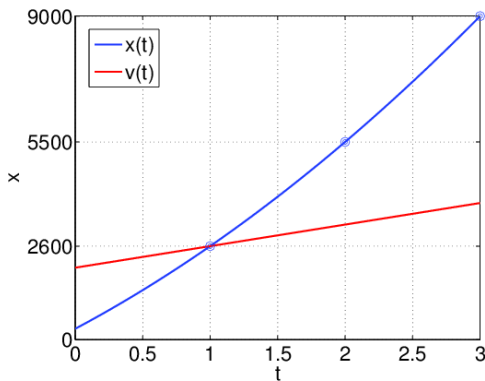
$$v(t) = v_0 + at$$

$$= 2000 + 600t$$

Derivada - motivação



Caso intermediário: movimento uniformemente variado



$$v(t) = 2000 + 600t$$

$$t = 0\text{s:}$$

$$v(0) = v_0 = 2000\text{m/s}$$

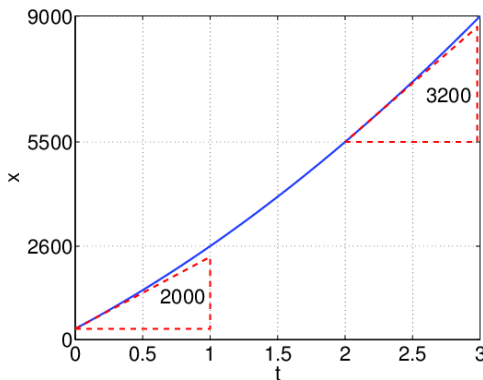
$$t = 2\text{s:}$$

$$v(2) = v_0 + 600(2) = 3200\text{m/s}$$

Derivada - motivação



Caso intermediário: movimento uniformemente variado



$$v(t) = 2000 + 600t$$

$$t = 0\text{s:}$$

$$v(0) = v_0 = 2000\text{m/s}$$

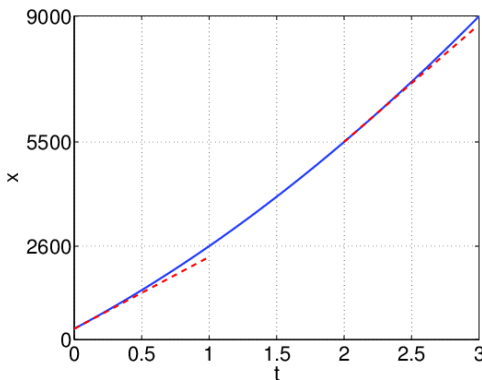
$$t = 2\text{s:}$$

$$v(2) = v_0 + 600(2) = 3200\text{m/s}$$

Derivada - motivação



Caso intermediário: movimento uniformemente variado



$$v(t) = 2000 + 600t$$

$$t = 0\text{s:}$$

$$v(0) = v_0 = 2000\text{m/s}$$

$$t = 2\text{s:}$$

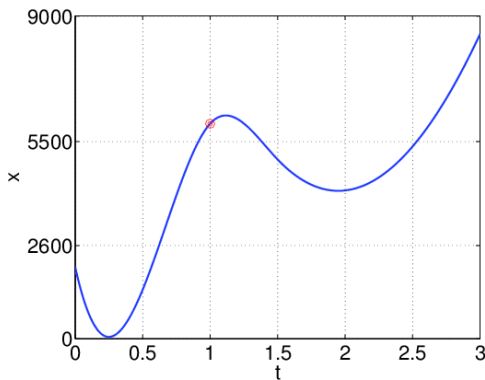
$$v(2) = v_0 + 600(2) = 3200\text{m/s}$$

Velocidade instantânea = inclinação da tangente

Derivada - motivação



Como encontrar $v(1)$ no caso abaixo ?

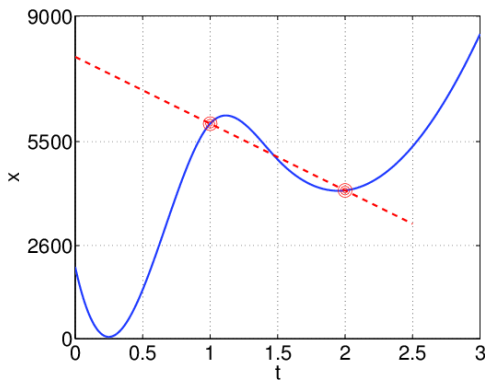


Aproximação com a
inclinação da secante:

Derivada - motivação



Como encontrar $v(1)$ no caso abaixo ?



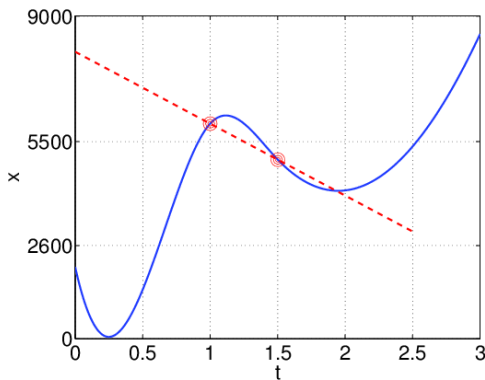
Aproximação com a inclinação da secante:

$$v(1) \approx \frac{4137 - 6000}{2 - 1} = -1863 \text{ m/s}$$

Derivada - motivação



Como encontrar $v(1)$ no caso abaixo ?



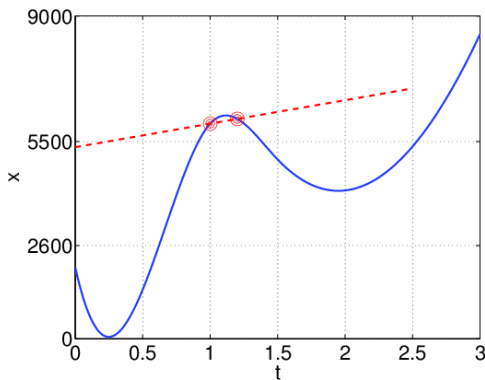
Aproximação com a inclinação da secante:

$$v(1) \approx \frac{4994 - 6000}{1.5 - 1} = -2006 \text{ m/s}$$

Derivada - motivação



Como encontrar $v(1)$ no caso abaixo ?



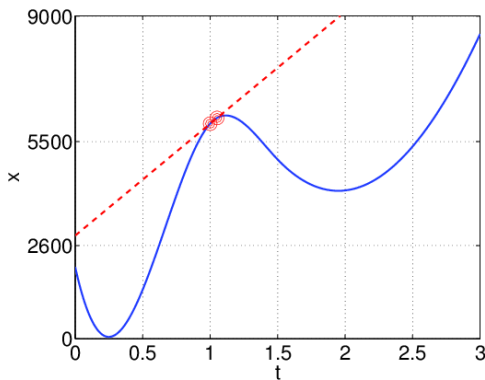
Aproximação com a inclinação da secante:

$$v(1) \approx \frac{6132 - 6000}{1.2 - 1} = 655.3 \text{ m/s}$$

Derivada - motivação



Como encontrar $v(1)$ no caso abaixo ?



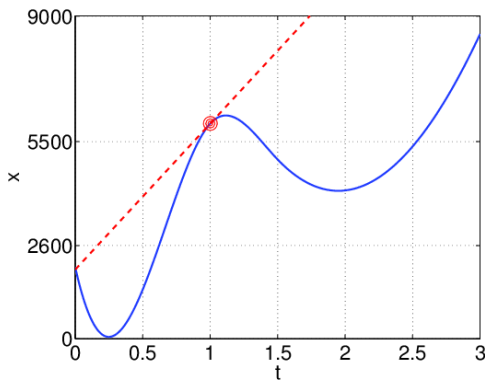
Aproximação com a inclinação da secante:

$$v(1) \approx \frac{6159 - 2600}{1 - 0} = 3559 \text{ m/s}$$

Derivada - motivação



Como encontrar $v(1)$ no caso abaixo ?



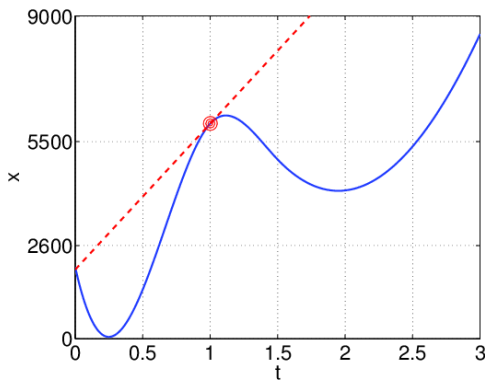
Aproximação com a inclinação da secante:

$$v(1) \approx \frac{6012 - 6000}{1.003 - 1} = 4071 \text{ m/s}$$

Derivada - motivação



Como encontrar $v(1)$ no caso abaixo ?



Aproximação com a inclinação da secante:

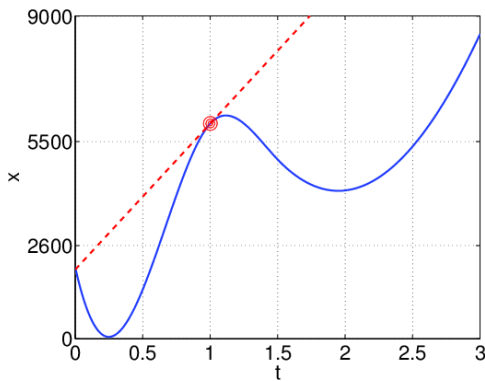
$$v(1) \approx \frac{6012 - 6000}{1.003 - 1} = 4071 \text{ m/s}$$

t	1.001	1.0001	1.00001	1.000001	1.0000001
$\frac{x(t)-x(1)}{t-1}$	4112.68	4131.27	4133.17	4133.31	4133.33

Derivada - motivação



Como encontrar $v(1)$ no caso abaixo ?



Aproximação com a inclinação da secante:

$$v(1) \approx \frac{6012 - 6000}{1.003 - 1} = 4071 \text{ m/s}$$

Valor exato:

$$v(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t) - y(1)}{t - 1}$$

$$v(1) = 4133.33 \text{ m/s}$$

t	1.001	1.0001	1.00001	1.000001	1.0000001
$\frac{x(t) - x(1)}{t - 1}$	4112.68	4131.27	4133.17	4133.31	4133.33

Derivada

Em geral, dada uma função $f(x)$ qualquer,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivada

Em geral, dada uma função $f(x)$ qualquer,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se $f = f(x, y, z)$, podemos ter derivadas com respeito a qualquer uma das coordenadas, por exemplo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0}$$

Em geral, a inclinação da reta secante nos dá

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

Em geral, a inclinação da reta secante nos dá

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Em geral, a inclinação da reta secante nos dá

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se no lugar de Δx , usarmos $-\Delta x$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$$

Em geral, a inclinação da reta secante nos dá

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se no lugar de Δx , usarmos $-\Delta x$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

Em geral, a inclinação da reta secante nos dá

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se no lugar de Δx , usarmos $-\Delta x$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

Podemos também considerar a média entre as duas aproximações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Em geral, a inclinação da reta secante nos dá

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se no lugar de Δx , usarmos $-\Delta x$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

Podemos também considerar a média entre as duas aproximações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Estas são **aproximações de diferenças finitas** da derivada.

Derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0), \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0), \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Usemos a última fórmula proposta, com $\frac{\Delta x}{2}$ em vez de Δx :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \approx \frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{2(\frac{\Delta x}{2})}$$

Derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0), \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Usemos a última fórmula proposta, com $\frac{\Delta x}{2}$ em vez de Δx :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \approx \frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0), \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Usemos a última fórmula proposta, com $\frac{\Delta x}{2}$ em vez de Δx :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \approx \frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Usemos a mesma fórmula para aproximar $g(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$ e $g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})$:

$$g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \approx \frac{f(x_0 + \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}) - f(x_0 + \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0), \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Usemos a última fórmula proposta, com $\frac{\Delta x}{2}$ em vez de Δx :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \approx \frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Usemos a mesma fórmula para aproximar $g(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$ e $g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})$:

$$g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0), \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Usemos a última fórmula proposta, com $\frac{\Delta x}{2}$ em vez de Δx :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \approx \frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Usemos a mesma fórmula para aproximar $g(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$ e $g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})$:

$$g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad g(x_0 - \frac{\Delta x}{2}) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

Derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0), \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Usemos a última fórmula proposta, com $\frac{\Delta x}{2}$ em vez de Δx :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \approx \frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Usemos a mesma fórmula para aproximar $g(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$ e $g(x_0 - \frac{\Delta x}{2})$:

$$g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad g(x_0 - \frac{\Delta x}{2}) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

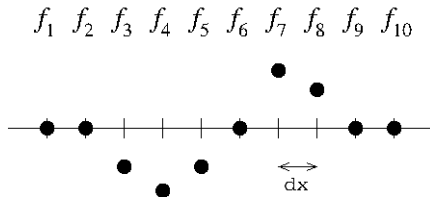
Substituindo estas aproximações, obtemos a fórmula

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Aproximação em um grid



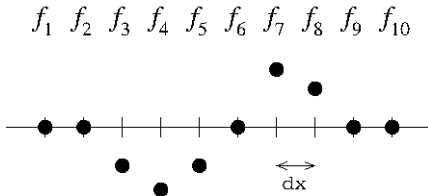
Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



Aproximação em um grid



Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



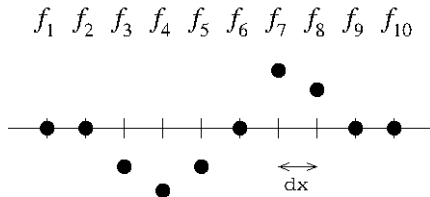
Aproximação progressiva da primeira derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \approx \frac{f(x_i + dx) - f(x_i)}{dx}$$

Aproximação em um grid



Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



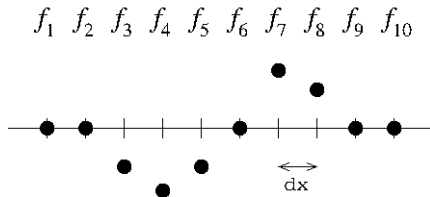
Aproximação progressiva da primeira derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{dx}$$

Aproximação em um grid



Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



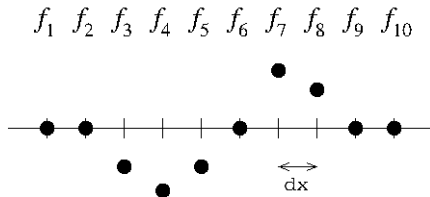
Aproximação progressiva da primeira derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{dx}$$

Aproximação em um grid



Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



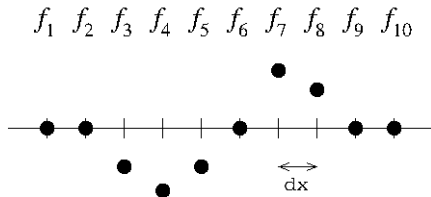
Aproximação progressiva da primeira derivada:

$$df_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{dx}$$

Aproximação em um grid



Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



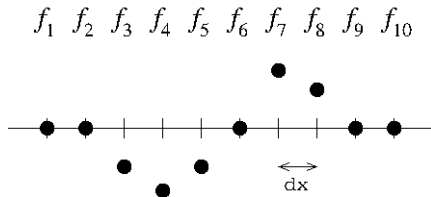
Aproximação progressiva da primeira derivada:

$$df_1 = \frac{f_2 - f_1}{dx}, \quad df_2 = \frac{f_3 - f_2}{dx}, \dots, \quad df_9 = \frac{f_{10} - f_9}{dx}$$

Aproximação em um grid



Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



Aproximação progressiva da primeira derivada:

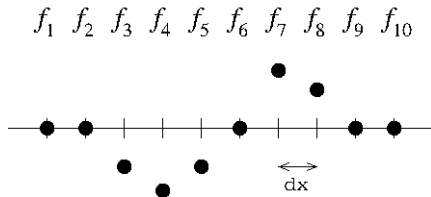
$$df_1 = \frac{f_2 - f_1}{dx}, \quad df_2 = \frac{f_3 - f_2}{dx}, \dots, \quad df_9 = \frac{f_{10} - f_9}{dx}$$

$$[df_1, df_2, \dots, df_9] = \frac{[f_2 - f_1, f_3 - f_2, \dots, f_{10} - f_9]}{dx}$$

Aproximação em um grid



Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



Aproximação progressiva da primeira derivada:

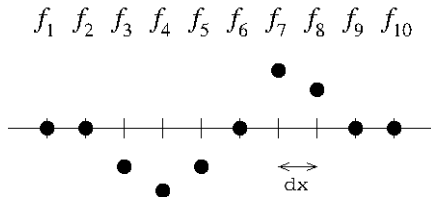
$$df_1 = \frac{f_2 - f_1}{dx}, \quad df_2 = \frac{f_3 - f_2}{dx}, \dots, \quad df_9 = \frac{f_{10} - f_9}{dx}$$

$$[df_1, df_2, \dots, df_9] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

Aproximação em um grid



Seja f o vetor correspondente a uma função amostrada em um grid com espaçamento dx :



Aproximação progressiva da primeira derivada:

$$df_1 = \frac{f_2 - f_1}{dx}, \quad df_2 = \frac{f_3 - f_2}{dx}, \dots, \quad df_9 = \frac{f_{10} - f_9}{dx}$$

$$[df_1, df_2, \dots, df_9] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_{10})$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - dx)}{dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$df_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$df_2 = \frac{f_2 - f_1}{dx}, \quad df_3 = \frac{f_3 - f_2}{dx}, \dots, \quad df_{10} = \frac{f_{10} - f_9}{dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2 - f_1, f_3 - f_2, \dots, f_{10} - f_9]}{dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \approx \frac{f(x_i + dx) - f(x_i - dx)}{2dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$df_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$df_2 = \frac{f_3 - f_1}{2dx}, \quad df_3 = \frac{f_4 - f_2}{2dx}, \dots, \quad df_9 = \frac{f_{10} - f_8}{2dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_9] = \frac{[f_3 - f_1, f_4 - f_2, \dots, f_{10} - f_8]}{2dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_9] = \frac{[f_3, f_4, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_8]}{2dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_9] = \frac{[f_3, f_4, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_8]}{2dx}$$

$$df = (f(3:end) - f(1:end-2)) / (2 * dx) \quad (\text{sem } df_1 \text{ e } df_{10})$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$
$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_9] = \frac{[f_3, f_4, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_8]}{2dx}$$
$$df = (f(3:end) - f(1:end-2)) / (2 * dx) \quad (\text{sem } df_1 \text{ e } df_{10})$$

Aproximação da segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{f(x_i + dx) - 2f(x_i) + f(x_i - dx)}{dx^2}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$
$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_9] = \frac{[f_3, f_4, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_8]}{2dx}$$
$$df = (f(3:end) - f(1:end-2)) / (2 * dx) \quad (\text{sem } df_1 \text{ e } df_{10})$$

Aproximação da segunda derivada:

$$d2f_i = \frac{f_{i+1} + f_i + f_{i-1}}{dx^2}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$

$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_9] = \frac{[f_3, f_4, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_8]}{2dx}$$

$$df = (f(3:end) - f(1:end-2)) / (2 * dx) \quad (\text{sem } df_1 \text{ e } df_{10})$$

Aproximação da segunda derivada:

$$d2f_2 = \frac{f_3 - 2f_2 + f_1}{dx * dx}, \quad d2f_3 = \frac{f_4 - 2f_3 + f_2}{dx * dx}, \dots, \quad d2f_9 = \frac{f_{10} - 2f_9 + f_8}{dx * dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$
$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_9] = \frac{[f_3, f_4, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_8]}{2dx}$$
$$df = (f(3:end) - f(1:end-2)) / (2 * dx) \quad (\text{sem } df_1 \text{ e } df_{10})$$

Aproximação da segunda derivada:

$$[d2f_2, d2f_3, \dots, d2f_9] = \frac{[f_3 - 2f_2 + f_1, f_4 - 2f_3 + f_2, \dots, f_{10} - 2f_9 + f_8]}{dx * dx}$$

Aproximação em um grid



Aproximação regressiva da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_{10}] = \frac{[f_2, f_3, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_9]}{dx}$$
$$df = (f(2:end) - f(1:end-1)) / dx \quad (\text{sem } df_1)$$

Aproximação centrada da primeira derivada:

$$[df_2, df_3, \dots, df_9] = \frac{[f_3, f_4, \dots, f_{10}] - [f_1, f_2, \dots, f_8]}{2dx}$$
$$df = (f(3:end) - f(1:end-2)) / (2 * dx) \quad (\text{sem } df_1 \text{ e } df_{10})$$

Aproximação da segunda derivada:

$$[d2f_2, d2f_3, \dots, d2f_9] = \frac{[f_3 - 2f_2 + f_1, f_4 - 2f_3 + f_2, \dots, f_{10} - 2f_9 + f_8]}{dx * dx}$$
$$d2f = (f(3:end) - 2 * f(2:end-1) + f(1:end-2)) / (dx * dx) \quad (\text{idem})$$