

Métodos de Elementos Finitos para as Equações de Maxwell

Saulo Pomponet Oliveira

14 de julho de 2013

Resumo

Estas são notas de aula de apresentações realizadas em eventos do LNCC, UFBA, UFPR, UNICAMP e UFPA desde o início de 2012, com apoio do INCT de Geofísica do Petróleo. Primeiro será apresentada a teoria e implementação do método de elementos finitos com funções de base lineares por partes para a equação do potencial elétrico 2D. Este método é então estendido para a forma vetorial, de modo a contemplar as equações de Maxwell no regime harmônico. A versão vetorial deste método produz soluções espúrias em baixas frequências, mesmo se a malha for refinada. Isto motiva a introdução dos elementos finitos de arestas (*edge elements*), uma das alternativas para contornar este problema. Em seguida, será traçado um panorama da pesquisa na área de métodos numéricos para as equações de Maxwell.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Cálculo Vetorial 3D	3
1.2	Interpretação das Equações de Maxwell em Meios Homogêneos	4
2	Equação do Potencial Elétrico	4
2.1	Formulação Variacional	6
2.2	Método de Galerkin	7
2.3	Geração da Malha	10
2.4	Cálculos no Elemento de Referência	12
2.5	Algoritmo de Montagem	14
2.6	Experimentos Numéricos	15
3	Equações de Maxwell no regime harmônico	18
3.1	Formulação Variacional	19
3.2	Formulação Variacional no Plano	19
3.3	Métodos de Elementos Finitos Nodais	21
3.4	Métodos de Elementos Finitos de Aresta	25
4	Panorama da pesquisa na área	29
4.1	Modos Espúrios	29
4.2	Modelos Gerais	29
4.3	Métodos de Alta Ordem	30
4.4	Textos Preliminares	30
	Referências	34

1 Introdução

As equações de Maxwell servem como modelo para uma vasta gama de fenômenos eletromagnéticos, tais como comunicação sem fio, exames médicos não-invasivos, e o levantamento não-destrutivo do subsolo por meio de técnicas geofísicas como GPR e CSEM, entre outras. As equações de Maxwell são formadas pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} &= \mathbf{0} \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell}), \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \quad (\text{Lei de Faraday}), \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \quad (\text{Lei de Gauss}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{Lei de Gauss do magnetismo}),\end{aligned}\tag{1}$$

sendo que temos as seguintes variáveis:

- $\mathbf{E}$: campo elétrico;
- $\mathbf{H}$: campo magnético;
- $\mathbf{D}$: indução elétrica;
- $\mathbf{B}$: indução magnética;
- $\mathbf{J}$: densidade de corrente elétrica;
- ρ : densidade de carga elétrica.

Note que, exceto pela densidade de carga elétrica, todas as variáveis são campos vetoriais. A forma simbólica do operador nabla foi utilizada para representar os operadores rotacional e divergente, ou seja, $\nabla \times \mathbf{u}$ e $\nabla \cdot \mathbf{u}$ denotam $\text{rot } \mathbf{u}$ e $\text{div } \mathbf{u}$, respectivamente. A próxima seção faz uma breve revisão de cálculo vetorial.

As equações de Maxwell são complementadas por *equações constitutivas*, que levam em conta as características do meio sob estudo. Em particular, vamos assumir as seguintes relações constitutivas lineares:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}.$$

Os tensores de segunda ordem $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\mu}$ são denominados *tensor de permissividade elétrica* e *tensor de permeabilidade magnética*, respectivamente. Vamos considerar inicialmente o caso isotrópico, em que estes tensores são respectivamente dados na forma matricial por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \epsilon(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mu(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \mu(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(\mathbf{x}) \end{bmatrix}\tag{2}$$

Substituindo (2) as equações constitutivas em (1), eliminamos os campos de indução:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= \rho \\ \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) &= 0\end{aligned}\tag{3}$$

1.1 Cálculo Vetorial 3D

Vamos revisar algumas propriedades e operações elementares da álgebra e cálculo vetorial em três dimensões. O *produto vetorial* de dois vetores $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ é dado por

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1]^T = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$, e usualmente é representado como o determinante de uma “matriz” 3×3 :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Nesta mesma representação, o *produto misto* de $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} = [w_1, w_2, w_3]^T$ é dado por

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Os três operadores diferenciais básicos do cálculo vetorial são o *gradiente*, o *divergente*, e o *rotacional*, que são dados em coordenadas cartesianas por

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= [\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi]^T, \\ \text{div } \mathbf{v} &= \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3, \\ \text{curl } \mathbf{v} &= [\partial_y v_3 - \partial_z v_2, \partial_z v_1 - \partial_x v_3, \partial_x v_2 - \partial_y v_1]^T, \end{aligned} \quad (4)$$

sendo que ∂_x , ∂_y e ∂_z denotam as derivadas parciais com respeito a x , y e z , respectivamente. Considerando a representação vetorial simbólica $\nabla = [\partial_x, \partial_y, \partial_z]^T$ do operador nabla, podemos escrever os operadores (4) com o auxílio de operadores algébricos:

$$\text{grad } \phi = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \phi = \nabla \phi, \quad \text{div } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \text{curl } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

Esta notação permite usar as propriedades dos determinantes para verificar facilmente diversas propriedades; em particular,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla, \nabla, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \nabla \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \end{vmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Segue de (5) que

- Se $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$, então $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$
- Se $\mathbf{w} = \nabla \phi$, então $\nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$

Além disso, a recíproca vale para domínios simplesmente conexos (Bossavit, 1998), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} &\iff \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{w} = \nabla \phi &\iff \nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6)$$

Em geral, temos a *decomposição de Helmholtz* (Girault and Raviart, 1986; Monk, 2003) de um campo vetorial $\mathbf{w}$ em termos de um potencial vetorial $\mathbf{v}$ e um potencial escalar ϕ ,

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \phi, \quad (7)$$

em que o termo do potencial vetorial é solenoidal (de divergente nulo) enquanto o termo do potencial escalar é irrotacional.

1.2 Interpretação das Equações de Maxwell em Meios Homogêneos

Utilizando as propriedades apresentadas na seção anterior, veremos uma interpretação física das equações de Maxwell para meios isotrópicos e homogêneos, conforme [Guerreiro \(2004\)](#). O modelo de meios isotrópicos e homogêneos corresponde a ϵ e μ constantes em (2). Neste caso, a versão isotrópica (3) das equações de Maxwell se torna

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \mu \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}$$

Assumindo $\mu > 0$, temos $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, e segue de (6) que existe um potencial vetorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$. Assim,

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon.\end{aligned}\tag{8}$$

No regime estático, o campo elétrico e o campo magnético se desacoplam:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{J}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon.\end{aligned}$$

Como $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, temos de (6) que existe um potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{E} = \nabla \phi$. Entretanto, para a correta interpretação da função ϕ como potencial elétrico, vamos utilizar $\mathbf{E} = -\nabla \phi$. Assim,

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{J}, \\ -\Delta \phi &= \rho/\epsilon.\end{aligned}\tag{9}$$

Os sistemas (8) e (9) podem ser interpretados da seguinte forma: no regime estático (9), as fontes do campo elétrico $\mathbf{E}$ são cargas elétricas, e as fontes do campo magnético $\mathbf{H}$ são correntes elétricas. No regime de propagação de ondas, a oscilação de $\mathbf{E}$ gera uma fonte adicional em $\mathbf{H}$, e vice-versa.

2 Equação do Potencial Elétrico

Vamos derivar, a partir das equações de Maxwell, a equação do potencial elétrico segundo [Dey and Morrison \(1979\)](#); ?. Tomando a derivada temporal da terceira equação de (3), a lei de Gauss, obtemos

$$\nabla \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Vamos isolar $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ da primeira equação de (3) e substituir na equação acima:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Segue de (5) que

$$-\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (10)$$

A equação (10) é conhecida como equação de continuidade ou de conservação de carga. Vamos substituir em (3) a lei de Gauss pela equação de conservação de carga (10):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ -\nabla \cdot \mathbf{J} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) &= 0 \end{aligned}$$

Vamos agora expressar a equação de conservação de carga em termos da corrente elétrica (Ward and Hohmann, 1988):

$$I(t) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \, d\Omega.$$

Em particular, para uma fonte pontual $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_o(t)\delta_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{x})$ temos que $\partial\rho_o(t)/\partial t = -I(t)$. Assumindo que $\partial\rho(\mathbf{x}, t)/\partial t = -I_o\delta_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ e considerando um regime de baixas frequências (de modo que $\partial\mathbf{E}/\partial t, \partial\mathbf{H}/\partial t \approx \mathbf{0}$), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= f(\mathbf{x}) \\ \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) &= 0 \end{aligned}$$

Como na seção anterior, os campos elétrico e magnético se desacoplam. Daqui em diante, vamos considerar apenas as equações para o campo elétrico. Por outro lado, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ implica a existência de um potencial escalar ϕ (o *potencial elétrico*) tal que $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ (lembrando da convenção do sinal negativo). Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (11)$$

Vamos considerar uma equação constitutiva adicional, a lei de Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Substituindo a lei de Ohm na segunda linha de (11) e substituindo em seguida $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, obtemos a equação do potencial elétrico:

$$-\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Em contraste com as equações de Maxwell, que são equações vetoriais, a equação (12) é escalar, e será nosso ponto de partida para estudar a aproximação de problemas de valores de contorno pelo método de elementos finitos. O objetivo será, até o final desta seção, aproximar a solução do seguinte problema de valores de contorno envolvendo a equação do potencial elétrico:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2, \end{array} \right. \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega, \quad (13)$$

sendo Ω um conjunto aberto, limitado e simplesmente conexo do $\mathbb{R}^2$.

OBS: Recomenda-se cuidado na leitura dos artigos clássicos neste tema. A equação (10) é apresentada com um sinal oposto por Dey and Morrison (1979), enquanto em Snyder (1976) falta um sinal em um dos passos da dedução da equação (12).

2.1 Formulação Variacional

Para construir uma aproximação do PVC (13) método de elementos finitos, precisamos encontrar a formulação variacional deste problema. Vamos primeiro considerar o seguinte exemplo unidimensional:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Se f for uma função contínua, a solução do problema (14) pertencerá ao espaço

$$\tilde{V} = \{u \in C^2([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

Vamos multiplicar a primeira equação de (14) por $v \in \tilde{V}$ e integrar no intervalo $[0, 1]$:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Integrando por partes e levando-se em conta que $v(0) = v(1) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx &= \int_0^1 f(x)v(x) dx \\ \int_0^1 u'(x)v'(x) dx &= \int_0^1 f(x)v(x) dx \end{aligned}$$

De acordo com a equação acima, podemos tomar u e v em um espaço vetorial mais geral que $\tilde{V}$:

$$V = \left\{ v \in L^2([0, 1]) \mid \int_0^1 v(x)^2 + v'(x)^2 dx < \infty, v(0) = v(1) = 0 \right\},$$

sendo $L^2([0, 1])$ o espaço das funções de quadrado integrável (no sentido de Lebesgue) no intervalo $[0, 1]$. A formulação variacional do PVC (14) é dada por: encontrar $u \in V$ tal que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \forall v \in V.$$

Voltemos ao problema (13). Dado $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, vamos definir

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &= \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\Omega \right)^{1/2}, \\ |u|_1 &= \left(\int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) d\Omega \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\Omega \right)^{1/2}, \\ \|u\|_1 &= (\|u\|_0^2 + |u|_1^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Vamos considerar os seguintes espaços:

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|u\|_0 < \infty\}, \\ H^1(\Omega) &= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|u\|_1 < \infty\}. \end{aligned}$$

Seja $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_1} = 0\}$. Vamos seguir o mesmo procedimento do caso 1D, multiplicando a primeira equação de (13) por $v \in V$ e integrando em Ω :

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega \quad (15)$$

A operação análoga à integração por partes será efetuada por meio do *Teorema da divergência de Gauss*:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

Em particular, escolhendo $\mathbf{F} = \sigma \nabla \phi v$, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} v(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\Omega$$

Mudando o sinal da igualdade acima, e usando o fato que $v|_{\Gamma_1} = 0$, encontramos

$$- \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}) \, d\Omega = - \int_{\Gamma_2} v(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\Omega$$

Como $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0$, segue que

$$- \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (16)$$

Temos de (15) e (16) que

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\Omega$$

Definindo

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad \text{e} \quad F(v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\Omega,$$

chegamos à formulação variacional de (13): encontrar $\phi \in V$ tal que

$$a(\phi, v) = F(v) \quad \forall v \in V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_1} = 0\}. \quad (17)$$

Pode-se mostrar que $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear e $F(\cdot)$ é um funcional linear limitado. Além disso, $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva e limitada, ou seja, existem C_1 e C_2 tais que $a(u, u) \geq C_1 \|u\|_1^2$ e $a(u, v) \leq C_2 \|u\|_1 \|v\|_1$.

2.2 Método de Galerkin

Vamos agora discretizar a formulação variacional de (17). Dados $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, linearmente independentes, vamos definir o seguinte subespaço vetorial de V :

$$V_h = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \{u \in V \mid u(\mathbf{x}) = u_1 v_1(\mathbf{x}) + \dots + u_n v_n(\mathbf{x})\}.$$

O *Método de Galerkin* consiste em encontrar $\phi_h \in V_h$ tal que

$$a(\phi_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (18)$$

Para que $\phi_h \in V_h$, devemos ter

$$\phi_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \phi_j v_j(\mathbf{x}) \quad (n \text{ incógnitas}).$$

Escolhendo $v_h = v_1, \dots, v_n$ em (18), obtemos as seguintes n equações:

$$a(\phi_h, v_i) = F(v_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Substituindo ϕ_h e usando a linearidade de $a(\cdot, \cdot)$, chegamos ao seguinte sistema linear:

$$\sum_{j=1}^n a(v_j, v_i) \phi_j = F(v_i) \quad 1 \leq i \leq n,$$

ou na forma matricial, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $A_{ij} = a(v_j, v_i)$, $x_j = \phi_j$ e $b_i = F(v_i)$. Para analisar a relação entre ϕ e ϕ_h , vamos escolher $v = v_h$ em (17):

$$a(\phi, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (19)$$

Subtraindo (18) de (19) e usando a linearidade de $a(\cdot, \cdot)$, obtemos

$$a(\phi - \phi_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

Assim,

$$\begin{aligned} a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) &= a(\phi - \phi_h, \phi - v_h + v_h - \phi_h) \\ &= a(\phi - \phi_h, \phi - v_h) + a(\phi - \phi_h, v_h - \phi_h) \\ &= a(\phi - \phi_h, \phi - v_h) + a(\phi - \phi_h, v_h - \phi_h) = a(\phi - \phi_h, \phi - v_h). \end{aligned}$$

Como $a(u, u) \geq C_1 \|u\|_1^2$ e $a(u, v) \leq C_2 \|u\|_1 \|v\|_1$,

$$C_1 \|\phi - \phi_h\|_1^2 \leq a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) = a(\phi - \phi_h, \phi - v_h) \leq C_2 \|\phi - \phi_h\|_1 \|\phi - v_h\|_1.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $C_1 \|\phi - \phi_h\|_1$, encontramos

$$\|\phi - \phi_h\|_1 \leq \frac{C_2}{C_1} \|\phi - v_h\|_1$$

Como $v_h \in V_h$ foi arbitrário, temos que

$$\|\phi - \phi_h\|_1 \leq \min_{v_h \in V_h} \frac{C_2}{C_1} \|\phi - v_h\|_1. \quad (20)$$

2.2.1 Métodos de Elementos Finitos

Os métodos de elementos finitos pertencem à categoria do método de Galerkin. Na versão clássica desta classe de métodos, o espaço V_h é gerado por *funções de base nodais* $N_1, \dots, N_n$ associadas a uma discretização do domínio Ω . Nos exemplos a seguir, vamos considerar o domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Vamos particionar o domínio Ω em malhas triangulares (Fig. 1) e associar uma função de base a cada vértice da malha (exceto pelos vértices localizados em Γ_1).

Dados os vértices $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, escolhemos $N_1, \dots, N_n$ tais que, para cada $1 \leq i \leq n$,

- $N_i(\mathbf{x})$ é contínua;
- $N_i(\mathbf{x})$ é um polinômio de grau 1 em cada triângulo, ou seja, $N_i(x, y) |_{K_e} = a^e + b^e x + c^e y$;
- $N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Note que cada função N_i se anula não somente nos pontos $\mathbf{x}_j$ para $j \neq i$, mas também em qualquer ponto que não pertença à união dos triângulos que contêm o vértice $\mathbf{x}_i$ (Fig 2).

Vamos agora caracterizar o espaço V_h como um espaço de interpolação polinomial por partes. Dada $f(\mathbf{x})$, sejam $f_1 = f(\mathbf{x}_1), \dots, f_n = f(\mathbf{x}_n)$ e

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f_1 N_1(\mathbf{x}) + f_2 N_2(\mathbf{x}) + \dots + f_{n-1} N_{n-1}(\mathbf{x}) + f_n N_n(\mathbf{x})$$

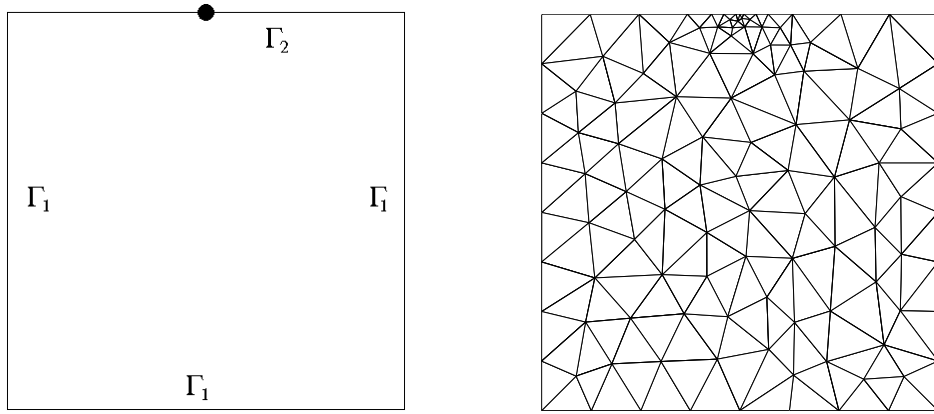


Figura 1: O domínio Ω e uma malha triangular associada a este domínio.

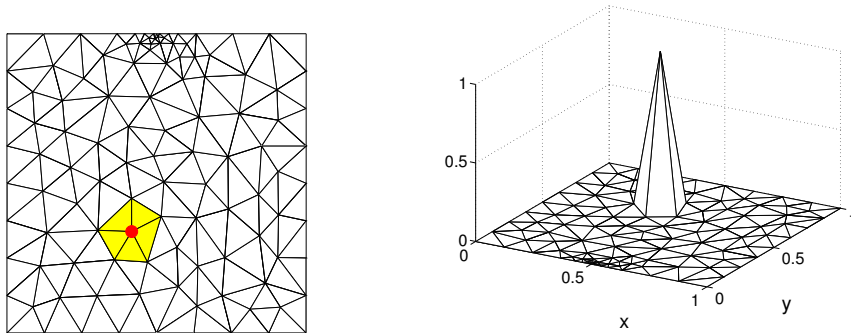


Figura 2: Funções de interpolação de Lagrange contínuas e lineares por partes.

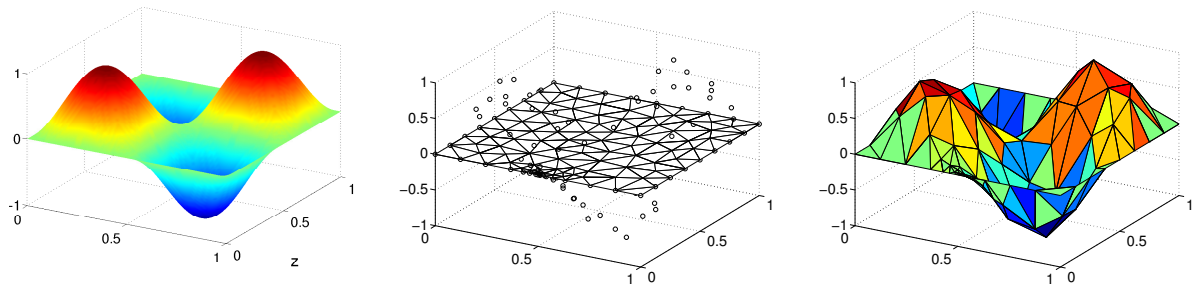


Figura 3: Da esquerda para a direita: função f ; $f_j = f(\mathbf{x}_j)$ para $j = 1, \dots, n$; função $\tilde{f}$.

Temos que $\tilde{f} \in V_h$. Além disso,

$$\tilde{f}(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^n f_i N_i(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^n f_i \delta_{ij} = f_j = f(\mathbf{x}_j).$$

Assim, $\tilde{f}(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)$, ou seja, $\tilde{f}$ interpola f em $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ (Fig. 3).

Temos de (20) que

$$\|\phi - \phi_h\|_1 \leq \frac{C_2}{C_1} \|\phi - \tilde{\phi}\|_1,$$

logo, $\|\phi - \tilde{\phi}\|_1 \rightarrow 0 \implies \|\phi - \phi_h\|_1 \rightarrow 0$. O método de elementos finitos se beneficia de resultados da teoria de aproximação a respeito da convergência de funções interpolantes.

2.2.2 Implementação do Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos pode ser implementado seguindo os seguintes passos:

1. Geração da malha
2. Cálculos no elemento de referência
3. Algoritmo de montagem
4. Solução do sistema linear
5. Visualização, pós-processamento

2.3 Geração da Malha

Vamos ilustrar a etapa de geração de malhas utilizando o pacote **triangle**. Este pacote permite a geração de malhas triangulares para domínios bidimensionais, e está disponível na página

<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>.

Vamos primeiro considerar meios homogêneos (ou seja, σ constante em (13)). O gerador de malha deve fornecer os seguintes dados:

- Número de vértices;
- Coordenadas dos vértices;
- Número de elementos (número de triângulos) ;
- Matriz de conectividade dos elementos;
- Identificação dos vértices na fronteira.

Para utilizar o pacote **triangle**, devemos criar um arquivo de entrada com informações básicas da geometria do domínio, como no exemplo a seguir:

```
# quad.poly: geracao de uma malha em um dominio quadrado
#
# Numero de vertices, dimensao (2), numero de atributos e
# e numero de ident. de fronteira (1: Dirichlet; 2: Neumann)
#
4 2 0 1
#
# Vertices
#
1 0 0 1
2 0 1 1
3 1 1 1
4 1 0 1
#
# Linhas (sobretudo do contorno)
#
4 1
1 1 2 1
2 2 3 1
3 3 4 1
4 4 1 1
#
# Numero de furos no dominio (seguido pelas coords)
#
0
#
# Numero de sub-regioes (seguido pelas coords)
#
0
```

Executamos o `triangle` numa janela de Terminal com o seguinte comando:

`./triangle -qANG -aA INPUT.poly`

sendo que:

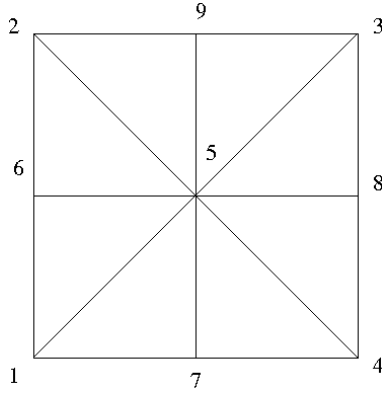
- ^{ANG}: ângulo mínimo dos triângulos (ex: 30 (30°));
- ^A: área máxima dos triângulos (ex: 0.01 ($0.01u.a.$));
- ^{INPUT}: nome do arquivo de entrada (extensão `.poly`).

O arquivo de entrada ilustrado acima foi salvo com o nome `quad.poly`. Executando o comando `./triangle -q -a0.2 quad.poly`, obtemos os seguintes arquivos de saída:

quad.1.node: <pre>9 2 0 1 1 0 0 1 2 0 1 1 3 1 1 1 4 1 0 1 5 0.5 0.5 0 6 0 0.5 1 7 0.5 0 1 8 1 0.5 1 9 0.5 1 1 # Generated by ./triangle -q -a0.2 quad.poly</pre>	quad.1.ele: <pre>8 3 0 1 8 3 5 2 6 1 5 3 5 9 2 4 5 2 6 5 5 1 7 6 7 4 5 7 5 4 8 8 5 3 9 # Generated by ./triangle -q -a0.2 quad.poly</pre>
---	--

Do arquivo `quad.1.node`, extraímos os seguintes dados:

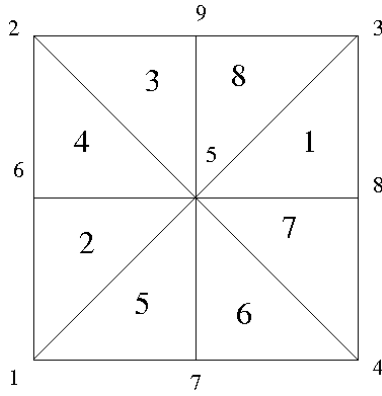
- Número de vértices: 9
- Coordenadas dos vértices: $[0, 0], [0, 1], \dots [0.5, 1]$
- Identificação dos vértices na fronteira: $[1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1]$



Por outro lado, o arquivo `quad.1.node` fornece:

- Número de elementos: 8

- Matriz de conectividade:
$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & \cdots & 5 \\ 3 & 1 & 9 & \cdots & 3 \\ 5 & 5 & 2 & \cdots & 9 \end{bmatrix}$$



OBS: o comando `triangle` dispõe de mais opções, descritas na página do pacote. Um aplicativo adicional que acompanha o `triangle` (`showme`) permite visualizar a malha gerada. Executamos este comando do seguinte modo:

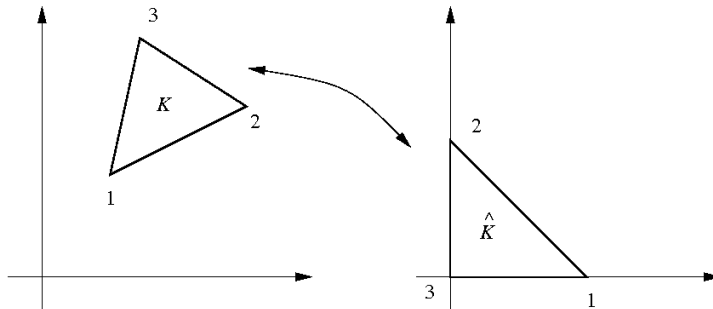
`./showme INPUT.poly`

2.4 Cálculos no Elemento de Referência

Vamos denominar *elemento de referência* o triângulo $\hat{K}$ definido pelos vértices $\hat{x}_1 = (1, 0)$, $\hat{x}_2 = (0, 1)$, $\hat{x}_3 = (0, 0)$. Vamos escrever a transformação do triângulo de referência $\hat{K}$ para um triângulo arbitrário de vértices $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ na forma

$$\begin{cases} x(\hat{x}, \hat{y}) = x_1 \hat{N}_1(\hat{x}, \hat{y}) + x_2 \hat{N}_2(\hat{x}, \hat{y}) + x_3 \hat{N}_3(\hat{x}, \hat{y}), \\ y(\hat{x}, \hat{y}) = y_1 \hat{N}_1(\hat{x}, \hat{y}) + y_2 \hat{N}_2(\hat{x}, \hat{y}) + y_3 \hat{N}_3(\hat{x}, \hat{y}), \end{cases}$$

ou vetorialmente, $\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_1 \hat{N}_1(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{x}_2 \hat{N}_2(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{x}_3 \hat{N}_3(\hat{\mathbf{x}})$.



Vamos determinar as funções $\hat{N}_i$ acima. Para que $\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{x}_1$, vamos impor

$$\hat{N}_1(\hat{\mathbf{x}}_1) = 1, \quad \hat{N}_2(\hat{\mathbf{x}}_1) = 0, \quad \hat{N}_3(\hat{\mathbf{x}}_1) = 0.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{x}_2 &\implies \hat{N}_1(\hat{\mathbf{x}}_2) = 0, \quad \hat{N}_2(\hat{\mathbf{x}}_2) = 1, \quad \hat{N}_3(\hat{\mathbf{x}}_2) = 0, \\ \mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}_3) = \mathbf{x}_3 &\implies \hat{N}_1(\hat{\mathbf{x}}_3) = 0, \quad \hat{N}_2(\hat{\mathbf{x}}_3) = 0, \quad \hat{N}_3(\hat{\mathbf{x}}_3) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}}_j) = \delta_{ij}$. Seja $\hat{N}_1(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{N}_1(\hat{x}, \hat{y}) = a^1 + b^1\hat{x} + c^1\hat{y}$. Impondo $\hat{N}_1(\hat{\mathbf{x}}_j) = \delta_{1j}$, obtemos

$$\begin{cases} a^1 + b^1(\textcolor{red}{1}) + c^1(\textcolor{red}{0}) = 1 \\ a^1 + b^1(\textcolor{red}{0}) + c^1(\textcolor{red}{1}) = 0 \\ a^1 + b^1(\textcolor{red}{0}) + c^1(\textcolor{red}{0}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b^1 = 1 \\ c^1 = 0 \\ a^1 = 0, \end{cases}$$

ou seja, $\hat{N}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}$. As funções $\hat{N}_2$ e $\hat{N}_3$ são obtidas de forma análoga, de modo que ao final, encontramos:

$$\hat{N}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}, \quad \hat{N}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}, \quad \hat{N}_3(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}. \quad (21)$$

OBS: A transformação $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})$ é linear, i.e., existe uma matriz J_K e um vetor $\mathbf{x}_0$ tais que

$$\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}) = J_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0.$$

Vamos supor inicialmente que $\Omega = K$ e $\Gamma = \Gamma_2$. Neste caso, $V_h = \text{span}\{N_1, N_2, N_3\}$. Como

$$N_i(\mathbf{x}_j) = N_i(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}_j)) = \begin{cases} 1, & i = j. \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad \hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}}_j) = \begin{cases} 1, & i = j. \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

temos que $N_i(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}_j)) = \hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}}_j)$ ($j = 1, 2, 3$), ou seja, $N_i \circ \mathbf{x}$ e $\hat{N}_i$ coincidem nos vértices de $\hat{K}$. Como N_i e $\hat{N}_i$ são funções de grau 1,

$$N_i(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) = \hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}}) \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}.$$

Além disso (vide, por exemplo, Jin (2002)), a relação entre os gradientes de N_i e $\hat{N}_i$ é dada por

$$\nabla N_i(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) = J_K^{-1} \nabla \hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}}).$$

Vamos aproximar $f(\mathbf{x})$ pelo seu interpolante linear $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 f_j N_j(\mathbf{x})$ ¹. Assim,

$$\begin{aligned} \int_K f(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x}) d\Omega &\approx \sum_{j=1}^3 f_j \int_K N_j(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x}) d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^3 f_j \int_{\hat{K}} N_j(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) N_i(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) |J_K| d\hat{\Omega} = \sum_{j=1}^3 f_j \int_{\hat{K}} \hat{N}_j(\hat{\mathbf{x}}) \hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}}) |J_K| d\hat{\Omega}. \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando a aproximação $\sigma(\mathbf{x})|_K \approx \sigma_K$,

$$\int_K \sigma(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\Omega \approx \sigma_K \int_K (J_K^{-1} \nabla \hat{N}_j(\hat{\mathbf{x}})) \cdot (J_K^{-1} \nabla \hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}})) |J_K| d\hat{\Omega}.$$

As integrais acima podem ser calculadas por meio de quadraturas:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} \hat{N}_j(\hat{\mathbf{x}}) \hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}}) |J_K| d\hat{\Omega} &\approx \sum_{l=1}^{n_{int}} \hat{N}_j(\hat{\mathbf{p}}_l) \hat{N}_i(\hat{\mathbf{p}}_l) |J_K| w_l, \\ \int_{\hat{K}} (J_K^{-1} \nabla \hat{N}_j(\hat{\mathbf{x}})) \cdot (J_K^{-1} \nabla \hat{N}_i(\hat{\mathbf{x}})) |J_K| d\hat{\Omega} &\approx \sum_{l=1}^{n_{int}} (J_K^{-1} \nabla \hat{N}_j(\hat{\mathbf{p}}_l)) \cdot (J_K^{-1} \nabla \hat{N}_i(\hat{\mathbf{p}}_l)) |J_K| w_l, \end{aligned} \quad (22)$$

¹Há abordagens mais adequadas no caso em que $f(\mathbf{x})$ é uma fonte pontual ???.

sendo $\mathbf{p}_l$ e w_l os pontos e pesos de integração, respectivamente. Por meio das equações (22), todos os cálculos passaram ao domínio de referência, facilitando sua automatização.

OBS: Para funções de base de ordem mais alta, $|J_K| = |J_K(\hat{\mathbf{p}}_l)|$.

OBS: É possível usar $\hat{\mathbf{p}}_l = \hat{\mathbf{x}}_l$ (ex: Komatitsch e Tromp, 1999)

2.5 Algoritmo de Montagem

O algoritmo de montagem estende a técnica acima para malhas compostas por mais de um elemento. Este algoritmo é baseado nas seguintes observações:

Fato 1: se a malha possui N_e elementos $K_1, \dots, K_{N_e}$,

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{K_e} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\hat{K}} f(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) |J_{K_e}| d\hat{\Omega}$$

Fato 2: Sejam $N_1^e(\mathbf{x})$, $N_2^e(\mathbf{x})$, $N_3^e(\mathbf{x})$ as funções de base caso $\Omega = K^e$. As funções de base $N_1(\mathbf{x}), \dots, N_n(\mathbf{x})$ são ligadas a $N_1^e(\mathbf{x})$, $N_2^e(\mathbf{x})$, $N_3^e(\mathbf{x})$ por meio da matriz de conectividade

Para ilustrar o Fato 2, vamos considerar a função $N_5(\mathbf{x})$ restrita ao elemento K_1 do exemplo utilizado para ilustrar a geração de malhas (ver Fig. 4).

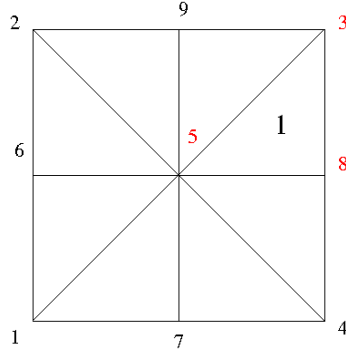


Figura 4: Vértices associados à função global N_5 , quando restrita ao elemento de índice 1.

A função $N_5(\mathbf{x})$ restrita ao elemento K_1 satisfaz

$$N_5(\mathbf{x}_5) = 1, \quad N_5(\mathbf{x}_3) = 0, \quad N_5(\mathbf{x}_8) = 0 \quad (23)$$

Por outro lado, a base local no elemento K_1 satisfaz

$$\begin{cases} N_1^1(\mathbf{x}_1^1) = 1, & N_1^1(\mathbf{x}_2^1) = 0, & N_1^1(\mathbf{x}_3^1) = 0 \\ N_2^1(\mathbf{x}_1^1) = 0, & N_2^1(\mathbf{x}_2^1) = 1, & N_2^1(\mathbf{x}_3^1) = 0 \\ N_3^1(\mathbf{x}_1^1) = 0, & N_3^1(\mathbf{x}_2^1) = 0, & N_3^1(\mathbf{x}_3^1) = 1 \end{cases}$$

Da matriz de conectividade

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & \dots & 5 \\ 3 & 1 & 9 & \dots & 3 \\ 5 & 5 & 2 & \dots & 9 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\mathbf{x}_1^1 = \mathbf{x}_8, \quad \mathbf{x}_2^1 = \mathbf{x}_3, \quad \mathbf{x}_3^1 = \mathbf{x}_5$$

Substituindo na base local no elemento K_1 :

$$\begin{cases} N_1^1(\mathbf{x}_8) = 1, & N_1^1(\mathbf{x}_3) = 0, & N_1^1(\mathbf{x}_5) = 0 \\ N_2^1(\mathbf{x}_8) = 0, & N_2^1(\mathbf{x}_3) = 1, & N_2^1(\mathbf{x}_5) = 0 \\ \textcolor{red}{N_3^1(\mathbf{x}_8) = 0,} & \textcolor{red}{N_3^1(\mathbf{x}_3) = 0,} & \textcolor{red}{N_3^1(\mathbf{x}_5) = 1} \end{cases}$$

Comparando com (23), concluímos que $N_5(\mathbf{x})|_{K_1} = N_3^1(\mathbf{x})$, ou seja, $N_{M_{3,1}}(\mathbf{x})|_{K_1} = N_3^1(\mathbf{x})$. Em geral,

$$N_{M_{i,e}}(\mathbf{x})|_{K_e} = N_i^e(\mathbf{x}).$$

Porém, a relação $N_{M_{i,e}}(\mathbf{x}) = N_i^e(\mathbf{x})$ somente é válida se $\Gamma = \Gamma_2$. Assim, em geral, precisamos acrescentar um vetor (ID) que identifique se um vértice pertence a Γ_1 :

$$N_{ID(M_{i,e})}(\mathbf{x}) = N_i^e(\mathbf{x}). \quad (24)$$

Seja J_e o jacobiano da transformação de $\hat{K}$ para K_e . Levando-se em conta (22) e (24), temos o seguinte algoritmo:

para $e = 1 \dots N_e$:

para $i, j = 1 \dots 3$:

$$\text{calcule } F(N_i^e) = \sum_{j=1}^3 f_j^e \sum_{l=1}^{n_{int}} \hat{N}_j(\hat{\mathbf{p}}_l) \hat{N}_i(\hat{\mathbf{p}}_l) |J_K| w_l$$

$$\text{calcule } a(N_i^e, N_j^e) = \sigma_K^e \sum_{l=1}^{n_{int}} (J_K^{-1} \nabla \hat{N}_j(\hat{\mathbf{p}}_l)) \cdot (J_K^{-1} \nabla \hat{N}_i(\hat{\mathbf{p}}_l)) |J_K| w_l$$

se $I = ID(M_{i,e}) \neq 0$ e $J = ID(M_{j,e}) \neq 0$,

$$a(N_I, N_J) = a(N_I, N_J) + a(N_i^e, N_j^e)$$

$$F(N_I) = F(N_I) + F(N_i^e)$$

2.6 Experimentos Numéricos

2.6.1 Exemplo 1: solução conhecida

Neste primeiro exemplo, usamos uma fonte não-pontual:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nabla \phi(\mathbf{x})) &= \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi|_{\Gamma} &= 0 \end{cases}$$

Esta fonte foi escolhida de modo que a solução exata fosse $\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Considerando as malhas da Fig. 5, obtemos as soluções apresentadas na figura 6. A regularidade da função f e a simplicidade das condições de contorno tornam o problema simples para o método de elementos finitos, que fornece uma boa aproximação da solução exata em ambas as malhas.

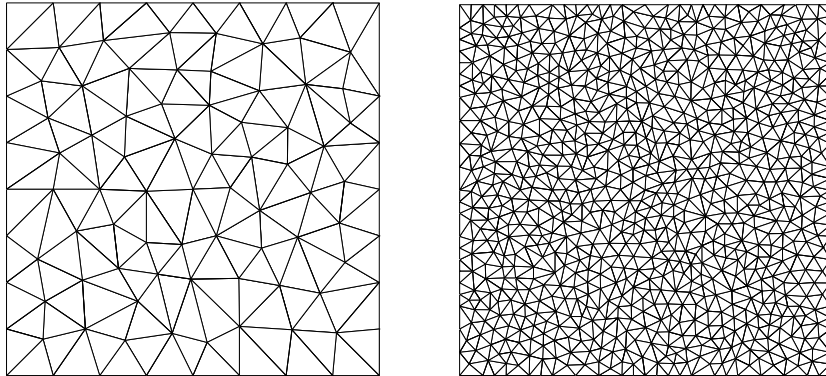


Figura 5: Malhas utilizadas no Exemplo 1.

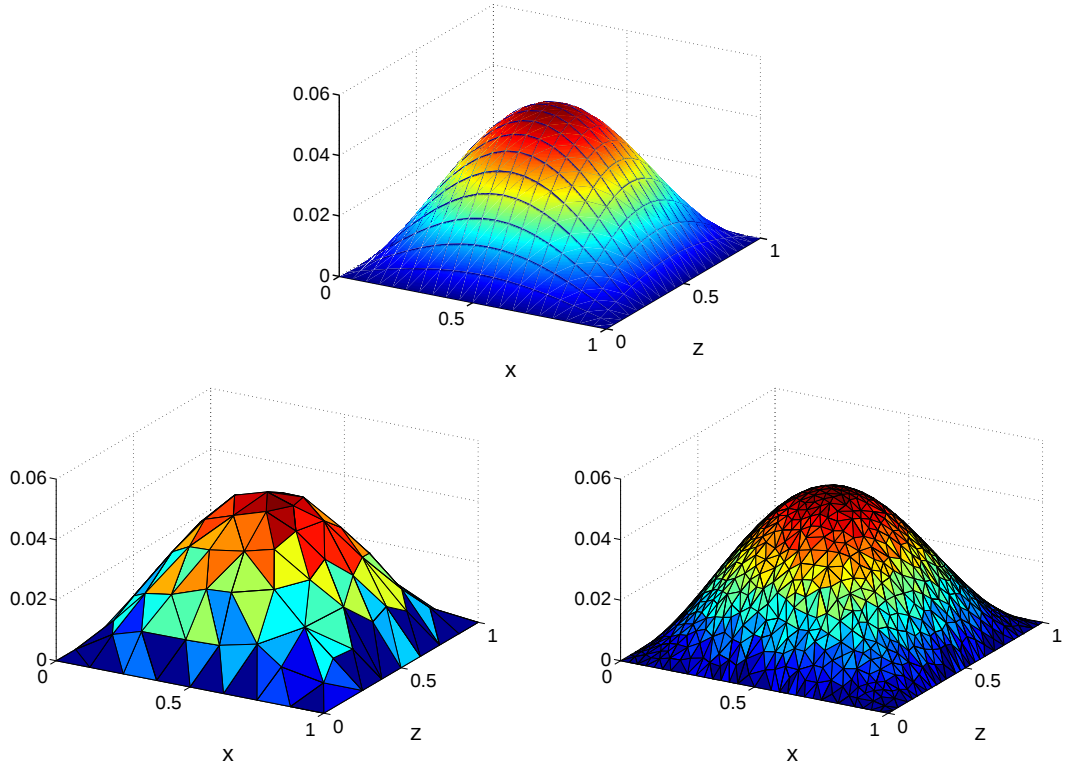


Figura 6: Exemplo 1: Solução exata (topo) e aproximação por elementos finitos na malha grossa (esquerda) e na malha fina (direita).

2.6.2 Exemplo 2: Potencial Elétrico

Vamos agora considerar um exemplo relacionado ao modelo de potencial elétrico. Na geração da malha, realizamos um refinamento na vizinhança da fonte (Fig. 7).

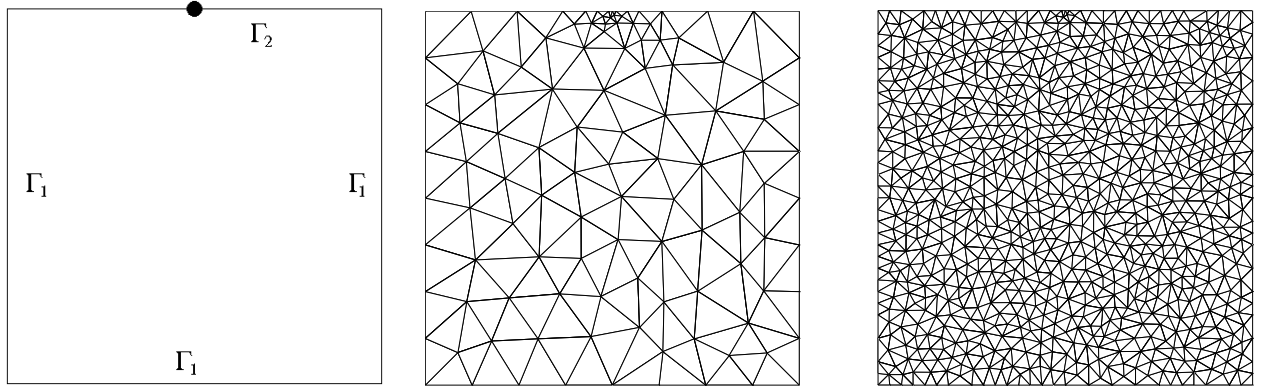


Figura 7: Configuração geométrica e malhas utilizadas no Exemplo 2.

A figura 8 mostra os resultados obtidos na malha fina e na malha grossa.

2.6.3 Exemplo 3: Potencial Elétrico em um Meio Heterogêneo

Vamos tornar heterogênea a condutividade elétrica do exemplo anterior, definindo $\sigma(\mathbf{x}) = 1000$ no interior do polígono ilustrado na Fig. 9 e $\sigma(\mathbf{x}) = 1$ no restante do domínio. Identificamos a condutividade em cada elemento no arquivo de entrada para o pacote `triangle`, definindo um subdomínio para cada valor de σ .

A solução por elementos finitos é exibida na Fig. 10. Comparando-a com a Fig 8, observa-se uma redução do potencial eletétrico na região da heterogeneidade.

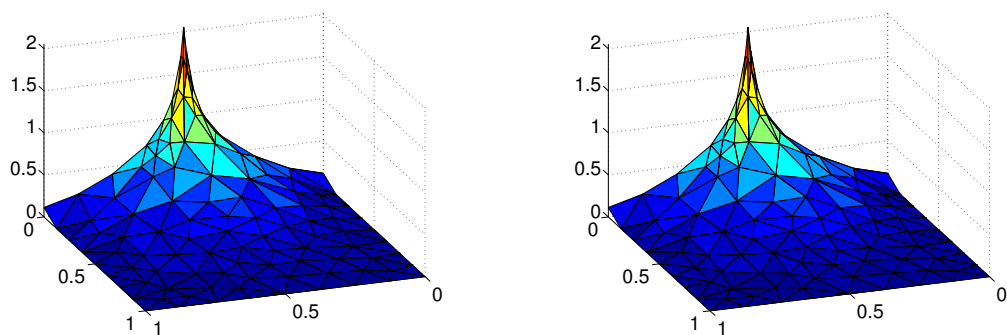


Figura 8: Exemplo 1: Solução na malha grossa e na malha fina.

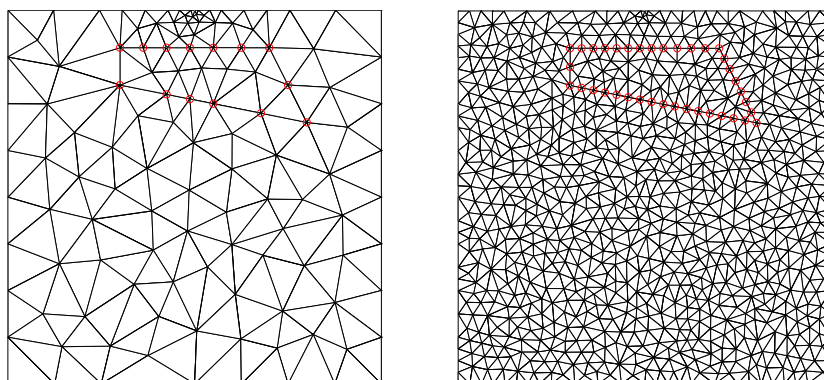


Figura 9: Malhas utilizadas no Exemplo 3.

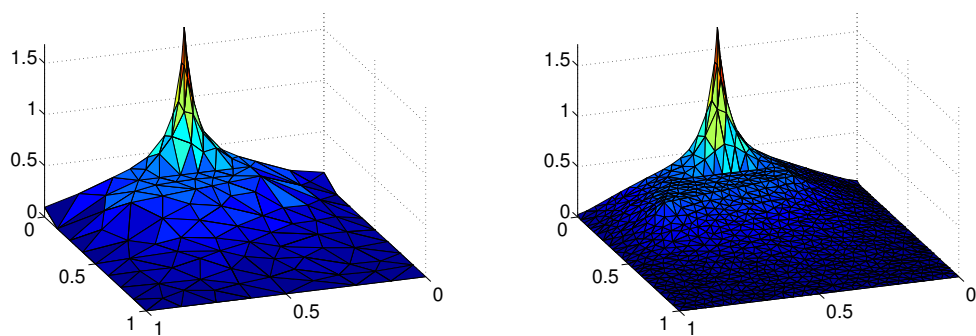


Figura 10: Solução na malha grossa e na malha fina.

3 Equações de Maxwell no regime harmônico

Vamos estender o método de elementos finitos utilizado na equação do potencial para as equações de Maxwell. Por simplicidade, vamos permanecer em domínios bidimensionais e considerar o regime harmônico no tempo: dada uma frequência angular ω , vamos tomar $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \dots$, de modo que as equações (3) se transformam em

$$\begin{aligned}\nabla \times (\hat{\mathbf{H}}e^{i\omega t}) - \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t}) &= \hat{\mathbf{J}}e^{i\omega t} \\ \mu \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\mathbf{H}}e^{i\omega t}) + \nabla \times (\hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t}) &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\epsilon \hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t}) &= \hat{\rho}e^{i\omega t} \\ \nabla \cdot (\mu \hat{\mathbf{H}}e^{i\omega t}) &= 0\end{aligned}$$

Simplificando as equações acima e dividindo por $e^{i\omega t}$, encontramos

$$\begin{aligned}\nabla \times \hat{\mathbf{H}} + i\omega\epsilon\hat{\mathbf{E}} &= \hat{\mathbf{J}} \\ -i\omega\mu\hat{\mathbf{H}} + \nabla \times \hat{\mathbf{E}} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\epsilon\hat{\mathbf{E}}) &= \hat{\rho} \\ \nabla \cdot (\mu\hat{\mathbf{H}}) &= 0\end{aligned}\tag{25}$$

Vamos considerar a relação constitutiva $\hat{\mathbf{J}} = \sigma\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}_a$, sendo que o primeiro termo corresponde à lei de Ohm e $\hat{\mathbf{J}}_a$ é a densidade de uma fonte externa de corrente (vide, por exemplo [Monk \(2003\)](#)). Assim, a primeira equação de (25) se reduz a

$$\begin{aligned}\nabla \times \hat{\mathbf{H}} + i\omega\epsilon\hat{\mathbf{E}} &= \sigma\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}_a \\ \nabla \times \hat{\mathbf{H}} + i\omega(\epsilon + i\sigma/\omega)\hat{\mathbf{E}} &= \hat{\mathbf{J}}_a\end{aligned}$$

Obtemos assim as equações de Maxwell de primeira ordem no regime harmônico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \hat{\mathbf{E}} - i\omega\mu\hat{\mathbf{H}} = 0 \\ i\omega(\epsilon + i\sigma/\omega)\hat{\mathbf{E}} + \nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}}_a \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\epsilon\hat{\mathbf{E}}) = \hat{\rho} \\ \nabla \cdot (\mu\hat{\mathbf{H}}) = 0 \end{array} \right.$$

Vamos eliminar o campo magnético. Multiplicando a primeira e a segunda equação por μ^{-1} e $i\omega$, respectivamente, e tomando o rotacional em ambos os lados da primeira equação, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) = i\omega\nabla \times \hat{\mathbf{H}} \\ -\omega^2(\epsilon + i\sigma/\omega)\hat{\mathbf{E}} + i\omega\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = i\omega\hat{\mathbf{J}}_a \end{array} \right.$$

Segue que

$$-\omega^2(\epsilon + i\sigma/\omega)\hat{\mathbf{E}} + \nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) = i\omega\hat{\mathbf{J}}_a,$$

Estas são as equações de Maxwell de segunda ordem no regime harmônico:

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) - \omega^2\tilde{\epsilon}\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{F}}, \quad \hat{\mathbf{F}} = i\omega\hat{\mathbf{J}}_a, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}.\tag{26}$$

OBS: convém normalizar as equações (26) com respeito às constantes no vácuo (ϵ_0, μ_0)

3.1 Formulação Variacional

Vamos encontrar a formulação variacional de problemas de valores de contorno associados às equações (26). Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = \mathbf{F}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (27)$$

Um meio no qual o campo elétrico satisfaz a condição de contorno $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ é conhecido como condutor perfeito (Monk, 2003). Vamos buscar soluções para o problema (27), no seguinte espaço vetorial:

$$V = \{\mathbf{E} \in H(\text{curl}, \Omega); \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma\},$$

sendo que o espaço $H(\text{curl}, \Omega)$ é definido (no plano complexo) como

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{\mathbf{E} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3; \nabla \times \mathbf{E} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)\}.$$

Vamos considerar também o seguinte produto interno complexo:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{u} \, d\Omega.$$

Tomando o produto interno com $\mathbf{v} \in V$ em ambos os lados da primeira equação de (27), encontramos

$$(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}), \mathbf{v}) - \omega^2 (\tilde{\epsilon} \mathbf{E}, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v})$$

Para efetuar a operação correspondente à integração por partes, vamos precisar do Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma$$

Como $\mathbf{n} \times \mathbf{u}$ se anula na fronteira,

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (28)$$

ou $(\nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v})$ em termos do produto interno. Tomando $\mathbf{u} = \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}$, chegamos à seguinte formulação variacional: encontrar $\mathbf{E} \in V$ tal que

$$(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{v}) - \omega^2 (\tilde{\epsilon} \mathbf{E}, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (29)$$

3.2 Formulação Variacional no Plano

Para adaptar a formulação variacional a $\mathbb{R}^2$, vamos escrever campos vetoriais no plano da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 v_1 - u_1 v_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \nabla \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto motiva o uso as seguintes notações, compartilhadas por diversos autores (Monk (2003); Ainsworth and Coyle (2001); Kikuchi (1989), por exemplo):

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_2 v_1 - u_1 v_2, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \nabla \times \phi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^T. \quad (30)$$

Substituindo $\mathbf{u} = [0, 0, \xi]^T$ em (28), com $\xi = \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}$, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \overline{\nabla \times \mathbf{v}} (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \, d\Omega,$$

ou seja, $(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}), \mathbf{v}) = (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{v})$, o que nos dá uma formulação variacional na mesma forma que em (29). Explicitando as componentes vetoriais, a formulação variacional é escrita como: encontrar $[E_1, E_2]^T \in V$ tal que

$$\left(\mu^{-1} \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right) - \omega^2 (\tilde{\epsilon} E_1, v_1) - \omega^2 (\tilde{\epsilon} E_2, v_2) = (F_1, v_1) + (F_2, v_2) \quad \forall [v_1, v_2]^T \in V.$$

Para expressar as condições de contorno em domínios do plano, convém observar que a relação entre o vetor normal exterior $\mathbf{n} = [n_1, n_2]^T$ e vetor tangente com orientação positiva $\mathbf{t} = [-n_2, n_1]$ no plano é dada (vide Grote et al. (2008) e Fig. 11), de acordo com as notações (30), por

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}.$$

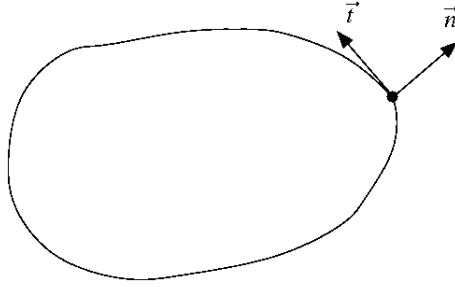


Figura 11: Vetor tangente com orientação positiva (no sentido que $\mathbf{n} \times \mathbf{t} > 0$).

Vamos considerar o domínio quadrado exibido na Fig. 1. Temos que, no lado inferior da fronteira,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_1 = (E_1, E_2) \cdot (1, 0) = E_1.$$

Analogamente, para os lados inferior, esquerdo e direito, obtemos, respectivamente,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_2 = (E_1, E_2) \cdot (-1, 0) = -E_1,$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}_3 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_3 = (E_1, E_2) \cdot (0, -1) = -E_2,$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}_4 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_4 = (E_1, E_2) \cdot (0, 1) = E_2.$$

Portanto:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma \implies E_1|_{\Gamma_1} = E_1|_{\Gamma_2} = E_2|_{\Gamma_3} = E_2|_{\Gamma_4} = 0. \quad (31)$$

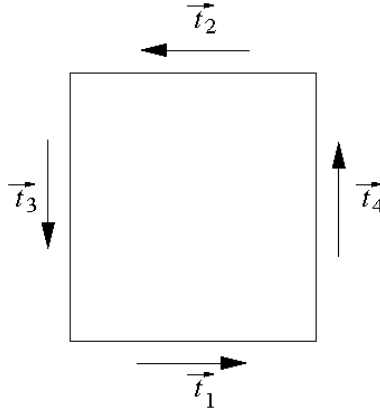


Figura 12: Vetores tangentes à fronteira de um domínio quadrado.

3.3 Métodos de Elementos Finitos Nodais

Vamos utilizar inicialmente o mesmo tipo de funções de base do problema do potencial, porém vetoriais:

$$\mathbf{N}_1^v(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} N_1(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_2^v(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ N_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{N}_{2n-1}^v(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} N_n(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_{2n}^v(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ N_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Note que agora temos duas funções de base por vértice. O sistema de equações resultante do método de Galerkin é dado por:

$$\sum_{j=1}^{2n} E_j \left(\mu^{-1} \left(\frac{\partial N_j^{v,2}}{\partial x} - \frac{\partial N_j^{v,1}}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial N_i^{v,2}}{\partial x} - \frac{\partial N_i^{v,1}}{\partial y} \right) \right) - \omega^2 (\tilde{\epsilon} N_j^{v,1}, N_i^{v,1}) - \omega^2 (\tilde{\epsilon} N_j^{v,2}, N_i^{v,2}) = (F_1, N_i^{v,1}) + (F_2, N_i^{v,2}) \quad 1 \leq i \leq 2n$$

Vamos enumerar a base local do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1^{v,e}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} N_1^e(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_2^{v,e}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} N_2^e(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_3^{v,e}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} N_3^e(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{N}_4^{v,e}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ N_1^e(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \mathbf{N}_5^{v,e}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ N_2^e(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \mathbf{N}_6^{v,e}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ N_3^e(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sendo $\{N_1^e(\mathbf{x}), N_2^e(\mathbf{x}), N_3^e(\mathbf{x})\}$ a base local utilizada para aproximar a solução da equação do potencial elétrico.

OBS: Nos vértices do domínio deve-se optar entre impor E_1 e/ou $E_2 = 0$ (ver condição (31)). Nos experimentos a seguir, escolheu-se impor $E_1 = E_2 = 0$.

3.3.1 Experimentos Numéricos

Nos experimentos a seguir vamos considerar o problema (27) no domínio $\Omega = (0, 1)^2$ com $\mu = 1$, $\epsilon = 1$ e $\sigma = 1$. Vamos definir

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y) = \begin{bmatrix} \sin(M\pi y) \\ i \sin(M\pi x) \end{bmatrix},$$

em que $M \in \mathbb{Z}$ faz o papel do número de onda. Note que $\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{t} = 0$ em Γ . Vamos escolher $\tilde{\mathbf{F}}$ tal que a solução exata do problema (27) seja dada por $\tilde{\mathbf{E}}$, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} [(M\pi)^2 - \omega^2 \tilde{\epsilon}] \sin(M\pi y) \\ i[(M\pi)^2 - \omega^2 \tilde{\epsilon}] \sin(M\pi x) \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar as malhas exibidas na Fig. 13. As figuras 14-16 mostram as soluções obtidas por elementos finitos nodais para diversas freqüências angulares ω . Cada figura mostra a parte real e a parte imaginária do campo elétrico aproximado nas duas malhas.

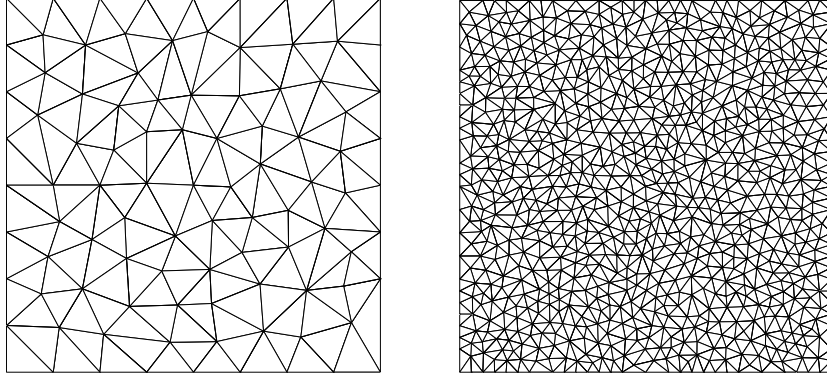


Figura 13: Malhas utilizadas nos experimentos com as equações de Maxwell harmônicas 2D.

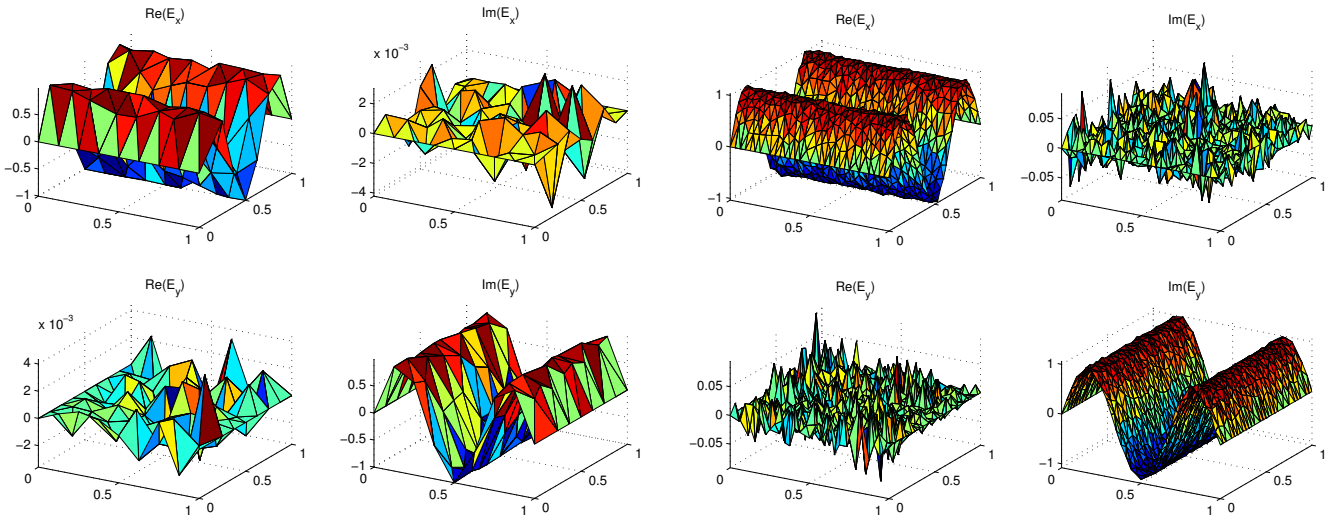


Figura 14: Elementos nodais, $M = 3, \omega = 100$.

Vamos repetir o experimento considerando agora um meio dielétrico, isto é, $\sigma = 0$ (note que ω é um autovalor se $\omega = 0$ ou $\omega = M\pi/\sqrt{\epsilon}$) Neste caso, os elementos finitos nodais não são capazes de recuperar a solução exata para baixas frequências, mesmo se a malha é refinada.

Uma forma de contornar este problema é usar *elementos finitos de arestas*, introduzidos a seguir.

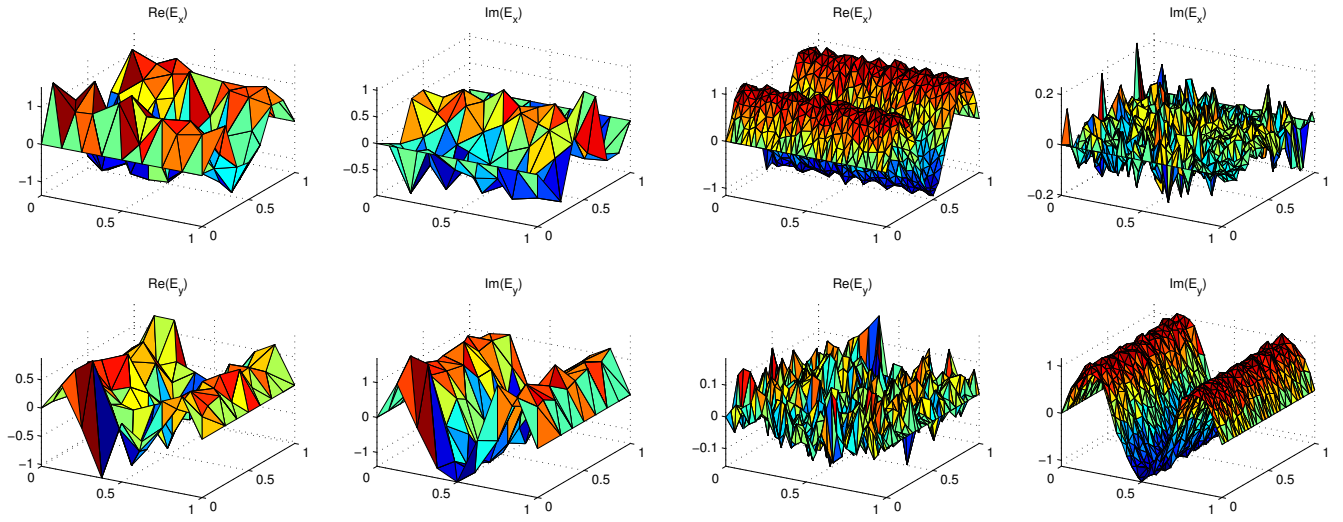


Figura 15: Elementos nodais, $M = 3, \omega = 10$.

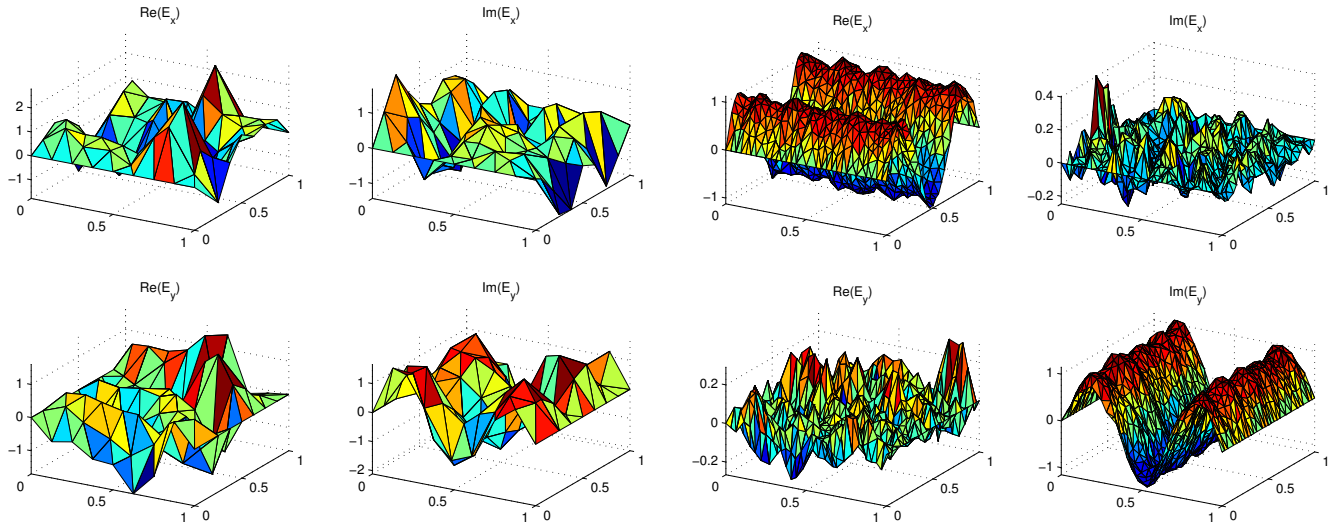


Figura 16: Elementos nodais, $M = 3, \omega = 1$.

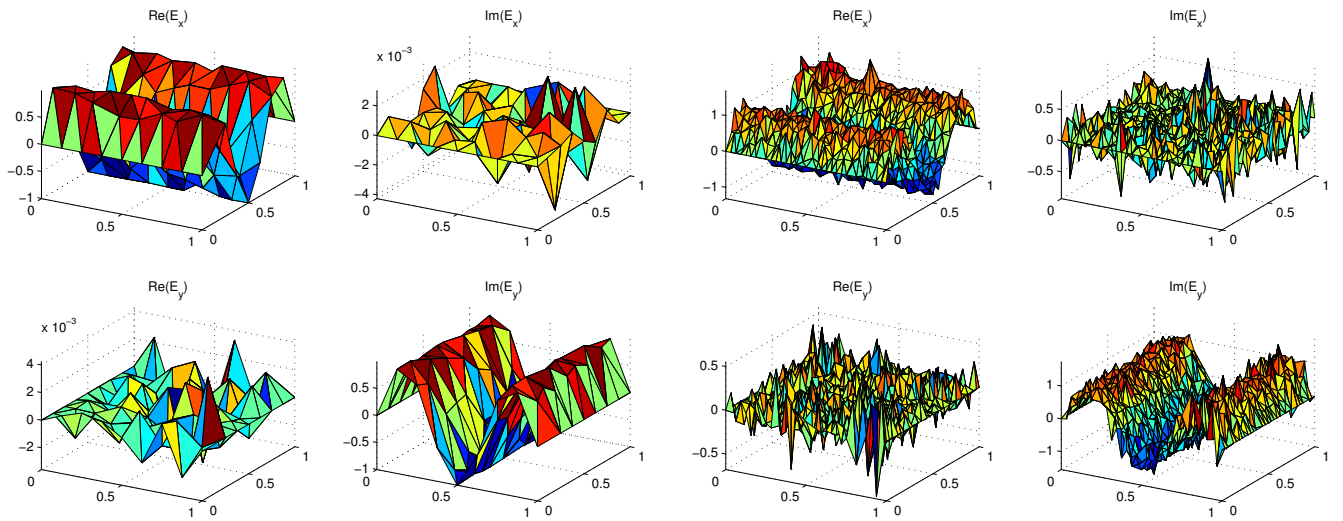


Figura 17: Elementos nodais com $\sigma = 0, M = 3, \omega = 100$.

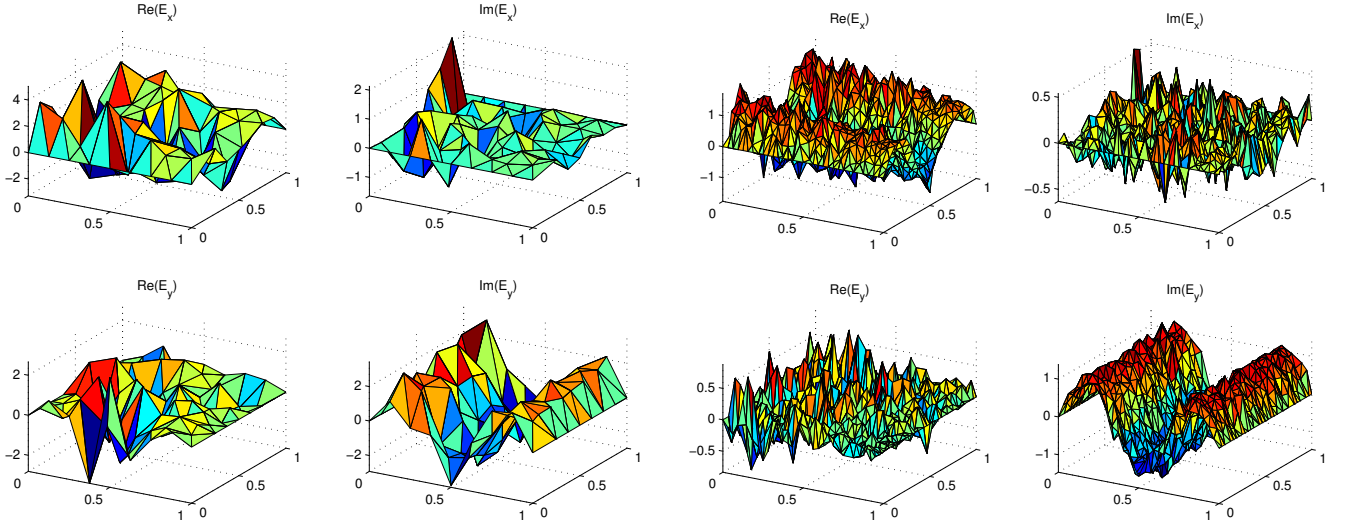


Figura 18: Elementos nodais com $\sigma = 0$, $M = 3$, $\omega = 10$.

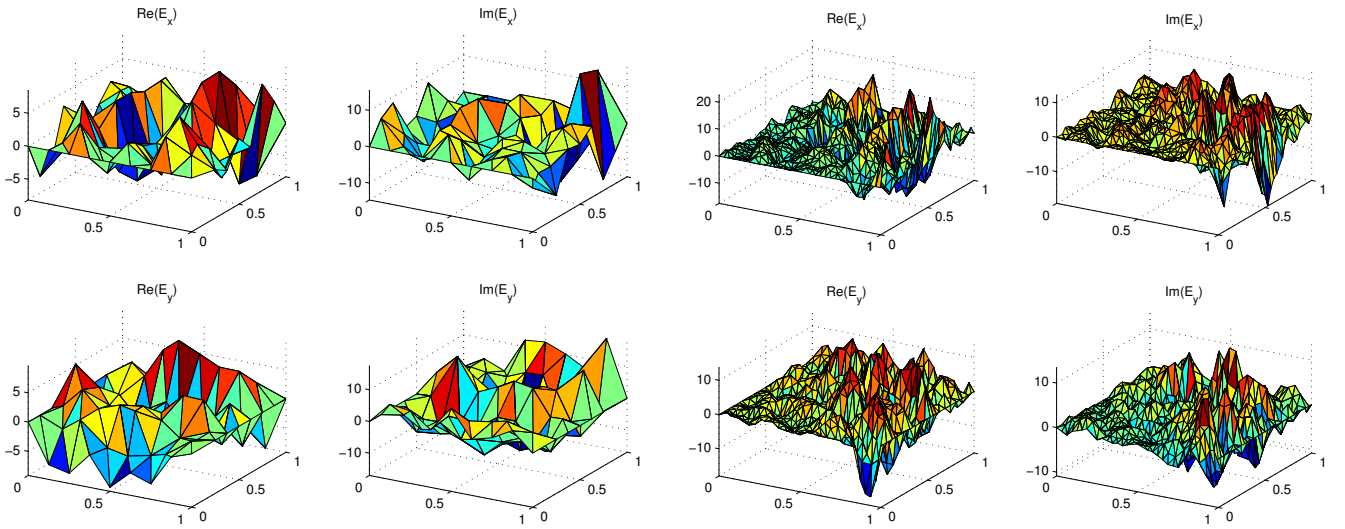


Figura 19: Elementos nodais com $\sigma = 0$, $M = 3$, $\omega = 1$.

3.4 Métodos de Elementos Finitos de Aresta

Em vez de impor a continuidade das funções de base nos vértices, vamos impor a continuidade de $\mathbf{N}_j \times \mathbf{n}$ nas arestas² da malha:

$$\int_{\gamma_k} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) \times \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\gamma_k} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Estas bases são conhecidas como *elementos finitos de arestas*. Nestas notas veremos o caso de ordem mais baixa, dado pelos *elementos de Whitney*. Para os elementos de Whitney, consideramos funções de base locais de grau 1 e constantes nas arestas do elemento de referência $\hat{K}$:

$$\hat{\mathbf{N}}_j(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} a_j + c_j \hat{y} \\ b_j - c_j \hat{x} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Vamos enumerar as arestas do elemento de referência de acordo com a figura 20. As funções de base de Whitney devem satisfazer as seguintes condições:

$$\int_{\hat{\gamma}_k} \hat{\mathbf{N}}_j(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{t} \, d\hat{\Gamma} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (33)$$

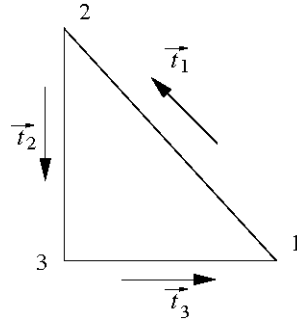


Figura 20: Numeração das arestas.

Vamos encontrar $\hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}})$. Temos que $\mathbf{t} = \mathbf{t}_3 = [1, 0]^T$ ao longo da terceira aresta, de modo que

$$\hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{t}|_{\gamma_3} = (a_1 + c_1 \hat{y})|_{\hat{y}=0} = a_1 + c_1 \hat{0} = a_1,$$

logo,

$$\int_{\hat{\gamma}_3} \hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{t} \, d\hat{\Gamma} = a_1.$$

Segue de (33), com $j = 1$ e $k = 3$, que $a_1 = 0$. Analogamente, ao longo de segunda aresta,

$$\hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{t}|_{\gamma_2} = -(b_1 - c_1 \hat{x})|_{\hat{x}=0} = -(b_1 - c_1 \hat{0}) = -b_1 \implies \int_{\hat{\gamma}_2} \hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{t} \, d\hat{\Gamma} = -b_1,$$

e assim $b_1 = 0$. Finalmente,

$$\hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{t}|_{\gamma_1} = \frac{-c_1(\hat{x} + \hat{y})}{\sqrt{2}}|_{\hat{x}+\hat{y}=1} = \frac{-c_1}{\sqrt{2}} \implies \int_{\hat{\gamma}_1} \hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{t} \, d\hat{\Gamma} = -c_1,$$

e de (33), com $j = 1$ e $k = 1$, temos que $c_1 = -1$. Substituindo em (32) os coeficientes obtidos, concluímos que $\hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}}) = [-\hat{y}, \hat{x}]^T$. Prosseguindo os cálculos com as demais funções de base (Schneebeli, 2003), encontramos

$$\hat{\mathbf{N}}_1(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\hat{y} \\ \hat{x} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{N}}_2(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\hat{y} \\ \hat{x} - 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{N}}_3(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 - \hat{y} \\ \hat{x} \end{pmatrix}.$$

²Daqui em diante vamos utilizar a palavra *aresta* para nos referir aos lados de um triângulo.

3.4.1 Transformação para o Domínio Real

Uma vez obtidas as funções $\hat{N}_j(\hat{\mathbf{x}})$ ($j = 1, 2, 3$) no elemento de referência, vamos definir as funções de base local em um elemento arbitrário K de modo que

$$\int_{\gamma_k} \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_k d\Gamma = \int_{\hat{\gamma}_k} \hat{N}_j(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{t}}_k d\hat{\Gamma} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3.$$

O primeiro passo é obter a relação entre os vetores tangentes nos dois elementos. Vamos considerar o vetor tangente da primeira aresta, conforme ilustrado na Fig. 21.

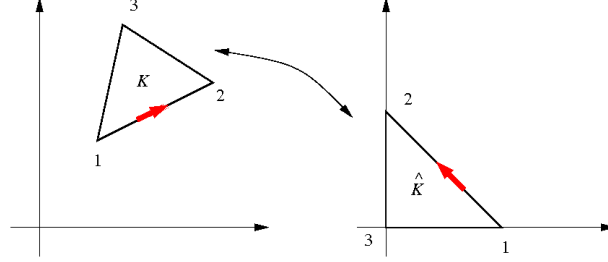


Figura 21: Relação entre os vetores tangentes da primeira aresta de um elemento arbitrário K e o elemento de referência $\hat{K}$.

Considere a seguinte parametrização da primeira aresta do elemento de referência:

$$\hat{\gamma}_1(s) = \begin{pmatrix} 1-s \\ s \end{pmatrix} \quad \left(\hat{\gamma}'_1(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Temos que o vetor tangente a $\hat{\gamma}_1(s)$ e normalizado corresponde ao vetor tangente $\hat{\mathbf{t}}_1$:

$$\frac{1}{\|\hat{\gamma}'_1(s)\|} \hat{\gamma}'_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{t}}_1,$$

e que em geral,

$$\hat{\mathbf{t}}_j = \frac{1}{\|\hat{\gamma}'_j(s)\|} \hat{\gamma}'_j(s), \quad j = 1, 2, 3.$$

Lembrando que $\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{J}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0$, temos que

$$\gamma_j(s) = \mathbf{x}(\hat{\gamma}_j(s)) = \mathbf{J}_K \hat{\gamma}_j(s) + \mathbf{x}_0,$$

de modo que $\gamma'_j(s) = \mathbf{J}_K \hat{\gamma}'_j(s)$ e assim

$$\mathbf{t}_j = \frac{1}{\|\gamma'_j(s)\|} \mathbf{J}_K \hat{\gamma}'_j(s) = \frac{\|\hat{\gamma}'_j(s)\|}{\|\gamma'_j(s)\|} \mathbf{J}_K \frac{1}{\|\hat{\gamma}'_j(s)\|} \hat{\gamma}'_j(s) = \frac{\|\hat{\gamma}'_j(s)\|}{\|\gamma'_j(s)\|} \mathbf{J}_K \hat{\mathbf{t}}_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_k d\Gamma &= \int_0^1 \mathbf{N}_j^e(\gamma_k(s)) \cdot \mathbf{t}_k \|\gamma'_k(s)\| ds = \int_0^1 \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}(\hat{\gamma}_k(s))) \cdot \mathbf{t}_k \|\gamma'_k(s)\| ds \\ &= \int_0^1 \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}(\hat{\gamma}_k(s))) \cdot \left(\frac{\|\hat{\gamma}'_k(s)\|}{\|\gamma'_k(s)\|} \mathbf{J}_K \hat{\mathbf{t}}_k \right) \|\gamma'_k(s)\| ds = \int_0^1 \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}(\hat{\gamma}_k(s))) \cdot (\mathbf{J}_K \hat{\mathbf{t}}_k) \|\hat{\gamma}'_k(s)\| ds \\ &= \int_0^1 (\mathbf{J}_K \hat{\mathbf{t}}_k)^T \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}(\hat{\gamma}_k(s))) \|\hat{\gamma}'_k(s)\| ds = \int_0^1 (\mathbf{J}_K^T \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}(\hat{\gamma}_k(s)))) \cdot \hat{\mathbf{t}}_k \|\hat{\gamma}'_k(s)\| ds \end{aligned}$$

Para que tenhamos

$$\int_{\gamma_k} \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_k d\Gamma = \int_0^1 \hat{N}_j(\hat{\gamma}_k(s)) \cdot \hat{\mathbf{t}}_k \|\hat{\gamma}'_k(s)\| ds = \int_{\hat{\gamma}_k} \hat{N}_j(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{t}}_k d\hat{\Gamma},$$

a função $\mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}))$ deve ser definida por uma transformação do tipo Piola:

$$\mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{J}_K^{-T} \hat{\mathbf{N}}_j(\hat{\mathbf{x}}).$$

Por outro lado (Schneebeli, 2003), a relação entre os rotacionais de $\mathbf{N}_j^e$ e $\hat{\mathbf{N}}_j$ é dada por

$$\nabla \times \mathbf{N}_j^e(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) = \det(\mathbf{J}_K)^{-1} \nabla \times \hat{\mathbf{N}}_j(\hat{\mathbf{x}}).$$

3.4.2 Observações sobre a numeração das arestas

Além da matriz de conectividade dos vértices, precisamos também de uma matriz de conectividade das arestas. Esta matriz pode ser obtida por meio do pacote **triangle**, ao incluirmos a opção `-e`.

Devemos também atribuir o sentido do vetor tangente a cada aresta criada pelo gerador de malha, especialmente em se tratando das arestas interiores (Fig. 22). Uma forma de escolher o sentido positivo destes vetores tangentes, proposta por Jin (2002) é estabelecer a convenção de que o vetor $\mathbf{t}$ associado à aresta com vértices $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ aponta para o vértice de maior índice (por exemplo, se $i > j$, o sentido do vetor $\mathbf{t}$ é de $\mathbf{x}_j$ para $\mathbf{x}_i$).

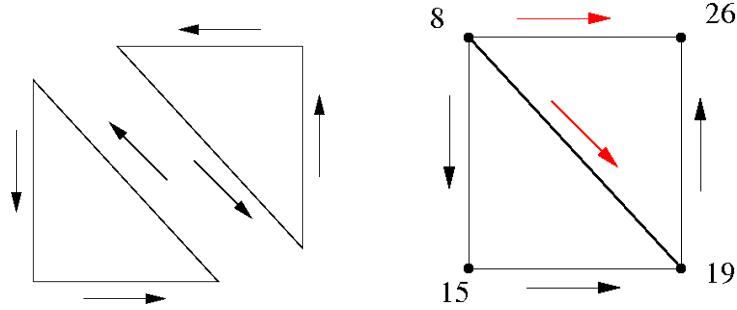


Figura 22: Orientação das arestas da malha, com a numeração proposta por Jin (2002).

3.4.3 Exemplos

Vamos repetir os experimentos realizados com as bases nodais de elementos finitos no caso $\sigma = 0$, agora usando os elementos de arestas de Whitney. As figs. 23-25 mostram os resultados com os elementos de Whitney. Note em particular na Fig. 25 que, embora a continuidade das componentes do campo esteja severamente comprometida, a solução gerada por estes elementos está convergindo para a solução exata no regime de baixas frequências.

4 Panorama da pesquisa na área

Os métodos de elementos finitos apresentados acima fornecem ao leitor uma base preliminar para estudos mais avançados na área de métodos numéricos para as equações de Maxwell. Neste sentido, as seções a seguir apresentam um panorama da pesquisa na área, e podem servir como guia nos próximos estudos.

4.1 Modos Espúrios

O insucesso dos métodos de elementos finitos nodais para as equações de Maxwell no regime de baixa frequência é historicamente atribuído aos chamados *modos espúrios*, que por sua vez são associados à má aproximação do núcleo do operador rotacional.

Diversos artigos tentaram explicar os modos espúrios do ponto de vista físico, por exemplo Lee et al. (1991); Mur (1994); Hillion (1997); Jiang et al. (1996); Schroeder and Wolff (1994); Bossavit

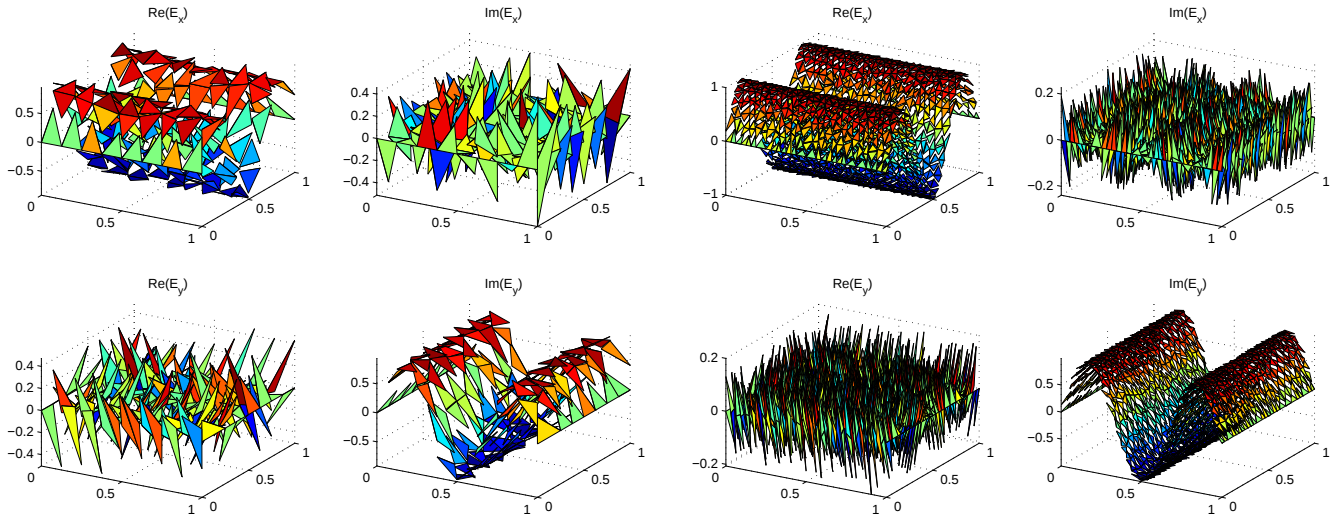


Figura 23: Elementos de aresta, $M = 3, \omega = 100$.

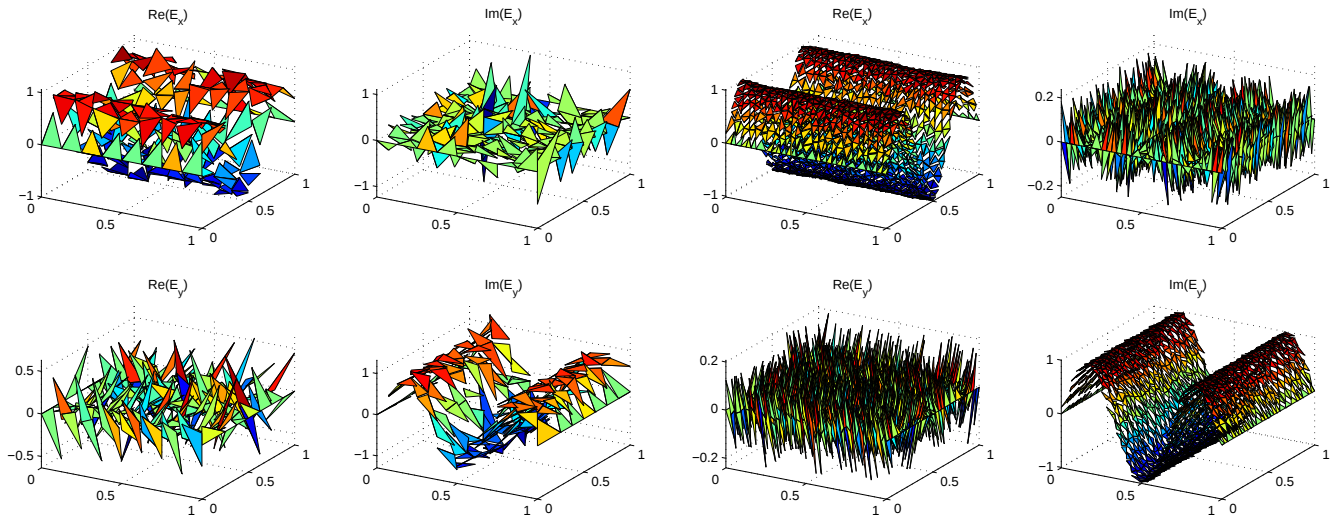


Figura 24: Elementos de aresta, $M = 3, \omega = 10$.

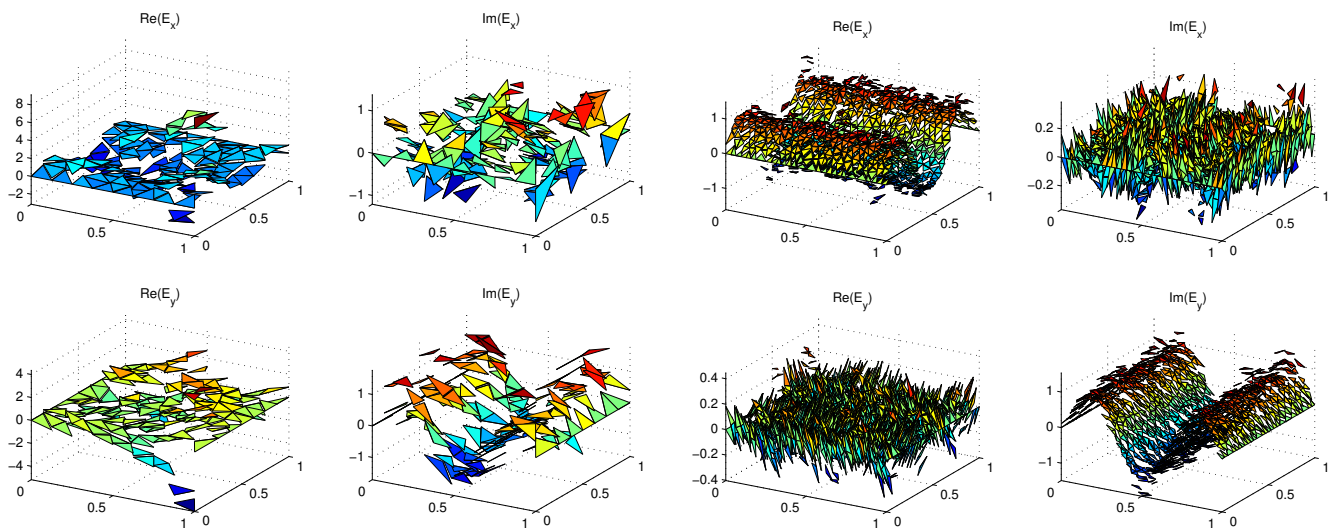


Figura 25: Elementos de aresta, $M = 3, \omega = 1$.

(1990). Muitos destes trabalhos criticam a transformação das equações de Maxwell em equações de segunda ordem (Jiang et al., 1996) e o uso de elementos finitos de arestas Mur (1994). Este tema foi efetivamente esclarecido a partir dos trabalhos sobre a formulação aumentada das equações de Maxwell, por Assous et al. (1993), e com o auxílio do conceito de compacidade discreta, por Kikuchi (1989) (ver também Kikuchi (1989); Boffi et al. (2006); Demkowicz et al. (2000)).

Outras contribuições significativas para o tema foram o isolamento do autovalor zero (Levillain, 1992) das equações harmônicas de segunda ordem, e a formulação por métodos de elementos finitos mistos (Boffi et al., 1999).

Conforme ilustrado nestas notas, uma das maneiras de lidar com a má aproximação em baixas frequências é utilizar os elementos finitos de arestas. O trabalho de Whitney (1957) é frequentemente citado como o precursor dos elementos de arestas de baixa ordem, enquanto os artigos de J. Nédélec (Nédélec, 1980, 1986) sobre bases de elementos finitos para os espaços $H(\text{div}, \Omega)$ e $H(\text{curl}, \Omega)$ formam a base teórica destes elementos. Um dos trabalhos mais conhecidos sobre o uso dos elementos de arestas em eletromagnetismo é o artigo de Bossavit (1990). Convém observar que o clássico método de Yee Yee (1966) pode ser deduzido como um caso particular dos elementos de Nédélec Monk (1993).

Entre as alternativas aos elementos finitos de arestas para baixas frequências, convém notar as bases mistas nodais e de arestas propostas por Graglia et al. (1997). Talvez a abordagem mais popular para o uso de elementos finitos nodais seja a formulação de quadrados mínimos inspiradas pela formulação aumentada (Jiang et al., 1996; Vardapetyan and Demkowicz, 1999). A partir das formulações aumentadas surgiram também novas formulações ponderadas (Costabel and Dauge, 2002; Bramble and Pasciak, 2004). Temos também o uso de elementos finitos descontínuos, como o *interior penalty* (Grote et al., 2008).

Outra questão que afeta a precisão da solução por elementos finitos é a presença de singularidades do domínio. Para lidar com esta dificuldade, Boffi et al. (2006) propuseram novos elementos de arestas quadrilaterais, enquanto Badia and Codina (2011) desenvolveram formulações aumentadas com termos de estabilização.

4.2 Modelos Gerais

Temos naturalmente diversos modelos alternativos ao modelo 2D harmônico apresentado nestas notas. No caso bidimensional, temos os modos TM e TE (Key and Weiss, 2006), assim como o sistema de primeira ordem (Bramble et al., 2005; Maggio et al., 2004; Rieben et al., 2004; Zhao et al., 2009), em que os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ são calculados simultaneamente. Ainda outra alternativa é resolver equações para os potenciais destes campos (Hiptmair et al., 2008; Biro and Preis, 1989; Badea et al., 2001). Um primeiro passo para chegar ao modelo 3D é considerar o chamado modelo 2.5D, que aplica a transformada de Fourier em uma das direções espaciais, e permite o uso de uma fonte 3D pontual. Um trabalho representativo nesta área é o artigo de Li and Key (2007) sobre a modelagem do CSEM, que também modela meios anisotrópicos.

Ainda no contexto do CSEM, da Silva et al. (2012) utilizaram um modelo 3D no domínio da frequência (com elementos finitos de arestas), utilizando métodos diretos para a solução dos sistemas lineares.

Em diversas aplicações é importante considerar a formulação no domínio do tempo. Diversos métodos de elementos finitos no domínio do tempo e questões a respeito da implementação destes métodos são revisados por Lee et al. (1997). Uma estratégia bastante popular nestes métodos é utilizar *mass lumping* (Pernet et al., 2005; Cohen and Monk, 1999). Entretanto, deve-se ter cuidado com esta técnica em conjunto com elementos finitos nodais (vide o contra-exemplo apresentado por Lee et al. (1997)). Convém notar a disponibilidade de métodos simpléticos (Rieben et al., 2004; Zhao et al., 2009).

Finalmente, é notável a relação entre a aproximação de problemas do eletromagnetismo e a discretização de formas diferenciais (Whitney, 1957; Bossavit, 1998; He and Teixeira, 2007; Hiptmair,

2001, 2002; Boffi et al., 2011). Recentemente, os métodos de elementos finitos para cálculo exterior foram formalizados (Arnold et al., 2010). Outro desenvolvimento recente é o dos métodos miméticos (Brezzi and Buffa, 2010).

4.3 Métodos de Alta Ordem

Um bom ponto de partida para o estudo de métodos de alta ordem para as equações de Maxwell é a resenha de Hesthaven (2003).

Diversos métodos de alta ordem utilizados em outras áreas também foram desenvolvidos para as equações de Maxwell, como os métodos hp (Vardapetyan and Demkowicz, 1999; Ainsworth and Coyle, 2001), o método *partition of unity* (Ledger et al., 2003) e os métodos de elementos espectrais. Neste último, temos trabalhos desenvolvidos com elementos de arestas (Lee et al., 2006; Lee and Liu, 2007), elementos nodais (considerando a formulação de quadrados mínimos) (Maggio et al., 2004) e bases mistas de elementos nodais e de arestas (Lin et al., 2007).

4.4 Textos Preliminares

O autor recomenda os livros de Jin (2002) e Monk (2003) para o aprendizado dos elementos finitos para as equações de Maxwell. Outros textos introdutórios úteis são a resenha de Demkowicz (2004), as notas de aula de Monk (2010) e a introdução aos elements de Nédélec por Schneebeli (2003). Para finalizar, os seguintes artigos são representativos em seus respectivos temas:

- Modelagem 2.5D de CSEM (Li and Key, 2007);
- Elementos espectrais em $H(\text{curl})$ (Lee et al., 2006);
- hp / formulação aumentada (Demkowicz and Vardapetyan, 1998);
- Elemento de aresta para quadriláteros em geral (Boffi et al., 2006);
- Formulação aumentada com norma negativa (Bramble et al., 2005);
- Elementos espectrais nodais via quadrados mínimos (Maggio et al., 2004);
- Formulação aumentada com termo de estabilização (Badia and Codina, 2011).

Referências

- Ainsworth, M. and J. Coyle (2001). Hierachic *hp*-edge element families for Maxwell’s equations on hybrid quadrilateral/triangular meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190(49-50), 6709–6733.
- Arnold, D. N., R. S. Falk, and R. Winther (2010). Finite element exterior calculus: From hodge theory to numerical stability. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* 47(2), 281–354.
- Assous, F., P. Degond, E. Heintze, P. Raviart, and J. Segre (1993). On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations. *J. Comput. Phys.* 109(2), 222–237.
- Badea, E. A., M. E. Everett, G. A. Newman, and O. Biro (2001). Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using coulomb-gauged potentials. *Geophysics* 66(3), 786–799.
- Badia, S. and R. Codina (2011). A combined nodal continuous-discontinuous finite element formulation for the Maxwell problem. *Applied Mathematics and Computation* 218(8), 4276–4294.

- Biro, O. and K. Preis (1989). On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetics* 25(4), 3145–3159.
- Boffi, D., M. Costabel, M. Dauge, and L. Demkowicz (2006). Discrete compactness for the hp version of rectangular edge finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44(3), 979–1004.
- Boffi, D., M. Costabel, M. Dauge, L. Demkowicz, and R. Hiptmair (2011). Discrete compactness for the p -version of discrete differential forms. *SIAM J. Numer. Anal.* 49(1), 135–158.
- Boffi, D., P. Fernandes, L. Gastaldi, and I. Perugia (1999). Computational models of electromagnetic resonators: Analysis of edge element approximation. *SIAM J. Numer. Anal.* 36(4), 1264–1290.
- Boffi, D., F. Kikuchi, and J. Schöberl (2006). Edge element computation of Maxwell’s eigenvalues on general quadrilateral meshes. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 16(2), 265–273.
- Bossavit, A. (1990). Solving Maxwell equations in a closed cavity, and the question of ‘spurious modes’. *Magnetics, IEEE Transactions on* 26(2), 702–705.
- Bossavit, A. (1998). Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proceedings* 135, 493–500.
- Bramble, J., T. Kolev, and J. Pasciak (2005). A least-squares approximation method for the time-harmonic Maxwell equations. *J. Numer. Math.* 13(4), 237–263.
- Bramble, J. H. and J. E. Pasciak (2004). A new approximation technique for div-curl systems. *Math. Comput.* 73(248), 1739–1762.
- Brezzi, F. and A. Buffa (2010). Innovative mimetic discretizations for electromagnetic problems. *J. Comput. Appl. Math.* 234(6), 1980–1987.
- Cohen, G. and P. Monk (1999). Mur-Nédélec finite element schemes for Maxwell’s equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 169(3–4), 197–217.
- Costabel, M. and M. Dauge (2002). Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains. a rehabilitation of nodal finite elements. *Numer. Math.* 93(2), 239–277.
- da Silva, N. V., J. V. Morgan¹, L. MacGregor, and M. Warner (2012). A finite element multifrontal method for 3d csem modeling in the frequency domain. *Geophysics* 77(2), E101–E115.
- Demkowicz, L. (2004). *Finite Element Methods for Maxwell Equations*, pp. 1–20. John Wiley & Sons, Ltd.
- Demkowicz, L., P. Monk, C. Schwab, and L. Vardapetyan (2000). Maxwell eigenvalues and discrete compactness in two dimensions. *Comput. Math. Appl.* 40(4–5), 589–605.
- Demkowicz, L. and L. Vardapetyan (1998). Modeling of electromagnetic absorption/scattering problems using hp -adaptive finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 152(1–2), 103–124.
- Dey, A. and H. Morrison (1979). Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures. *Geophysics* 44(4), 753–780.
- Girault, V. and P.-A. Raviart (1986). *Finite element methods for Navier-Stokes equations - theory and algorithms*. Berlin: Springer-Verlag.
- Graglia, R., D. Wilton, and A. Peterson (1997). Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* 45(3), 329–342.

- Grote, M. J., A. Schneebeli, and D. Schötzau (2008). Interior penalty discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations: Optimal l^2 -norm error estimates. *IMA J. Numer. Anal.* 28(3), 440–468.
- Guerreiro, S. (2004). O significado das equações de Maxwell. Notas de aula, CPGG-UFBA.
- He, B. and F. Teixeira (2007). Differential forms, galerkin duality, and sparse inverse approximations in finite element solutions of Maxwell equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 55(5), 1359–1368.
- Hesthaven, J. (2003). *High-Order Accurate Methods in Time-Domain Computational Electromagnetics: A Review*, Volume 127, pp. 59–123. San Diego: Academic Press.
- Hillion, P. (1997). Beware of Maxwell's divergence equations. *J. Comput. Phys.* 132, 154–155.
- Hiptmair, R. (2001). Higher Order Whitney Forms. *Progress In Electromagnetics Research* 32, 271–299.
- Hiptmair, R. (2002). Finite elements in computational electromagnetism. *Acta Numerica* 11, 237–339.
- Hiptmair, R., F. Kramer, and J. Ostrowski (2008). A robust maxwell formulation for all frequencies. *IEEE Transactions on Magnetics* 44(6), 682–685.
- Jiang, B.-n., J. Wu, and L. Povinelli (1996). The origin of spurious solutions in computational electromagnetics. *J. Comput. Phys.* 125(1), 104–123.
- Jin, J. (2002). *The Finite Element Method in Electromagnetism, 2nd ed.* New York: John Wiley and Sons.
- Key, K. and C. Weiss (2006). Adaptive finite-element modeling using unstructured grids: The 2d magnetotelluric example. *Geophysics* 71(6), G291–G299.
- Kikuchi, F. (1989). On a discrete compactness property for the nedelec finite elements. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A* 36(3), 479–490.
- Ledger, P., K. Morgan, O. Hassan, and N. Weatherill (2003). Plane wave $\mathcal{H}(\text{curl};)$ conforming finite elements for Maxwell's equations. *Comput. Mech.* 31(3-4), 272–283.
- Lee, J., D. Sun, and Z. Cendes (1991). Tangential vector finite elements for electromagnetic field computation. *IEEE Transactions on Magnetics* 27(5), 4032–4035.
- Lee, J.-F., R. Lee, and A. Cangellaris (1997). Time-domain finite-element methods. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 45(3), 430–442.
- Lee, J.-H. and Q. Liu (2007). A 3-d spectral-element time-domain method for electromagnetic simulation. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 55(5), 983–991.
- Lee, J.-H., T. Xiao, and Q. Liu (2006). A 3-d spectral-element method using mixed-order curl conforming vector basis functions for electromagnetic fields. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 54(1), 437–444.
- Levillain, V. (1992). Eigenvalue approximation by a mixed method for resonant inhomogeneous cavities with metallic boundaries. *Math. Comput.* 58(197), 11–20.
- Li, Y. and K. Key (2007). 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: Part 1 – an adaptive finite-element algorithm. *Geophysics* 72(2), WA51–WA62.

- Lin, X., L. Olson, and J. Jin (2007). An interpolatory spectral element method using curl-conforming vector basis functions on tetrahedra. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2007 IEEE*, pp. 5095–5098.
- Maggio, F., G. Mazzarella, and C. Pitzianti (2004). Least squares spectral element method for 2D Maxwell equations in the frequency domain. *Int. J. Numer. Model.* 17(6), 509–522.
- Monk, P. (1993). An analysis of nedelec’s method for the spatial discretization of maxwell’s equations. *J. Comput. Appl. Math.* 47, 101–121.
- Monk, P. (2003). *Finite Element Methods for Maxwell’s Equations*. New York: Oxford University Press.
- Monk, P. (2010). An $H(\text{curl}; \Omega)$ -conforming FEM: Nédélec’s elements of first type. XII-th Summer School in Computational Mathematics and Scientific Computing, University of Durham.
- Mur, G. (1994). Edge elements, their advantages and their disadvantages. *IEEE Transactions on Magnetism* 30(5), 3552–3557.
- Nédélec, J. (1980). Mixed finite elements in R^3 . *Numer. Math.* 35, 315–341.
- Nédélec, J. (1986). A new family of mixed finite elements in R^3 . *Numer. Math.* 50, 57–81.
- Pernet, S., X. Ferrieres, and G. Cohen (2005). High spatial order finite element method to solve Maxwell’s equations in time domain. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 53(9), 2889–2899.
- Rieben, R., D. White, and G. Rodrigue (2004). High-order symplectic integration methods for finite element solutions to time dependent Maxwell equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 52(8), 2190–2195.
- Schneebeli, A. (2003). An $H(\text{curl}; \Omega)$ -conforming FEM: Nédélec’s elements of first type. <http://www.dealii.org/developer/reports/nedelec/>.
- Schroeder, W. and I. Wolff (1994). The origin of spurious modes in numerical solutions of electromagnetic field eigenvalue problems. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on* 42(4), 644–653.
- Snyder, D. D. (1976). A method for modeling the resistivity and ip response of two-dimensional bodies. *Geophysics* 41(5), 997–1015.
- Vardapetyan, L. and L. Demkowicz (1999). hp -adaptive finite elements in electromagnetics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 169(3-4), 331–344.
- Ward, S. H. and G. W. Hohmann (1988). Electromagnetic theory for geophysical applications.
- Whitney, H. (1957). *Geometric integration theory*. Princeton: Princeton University Press.
- Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 14(3), 302–207.
- Zhao, Y., G. Dai, Y. Tang, and Q. Liu (2009). Symplectic discretization for spectral element solution of Maxwell’s equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42(32), 325203.