A Equação Quadrática

Alexandre Trovon
Departamento de Matemática – UFPR
2012

2 – A Equação Quadrática

Como vimos antes equações quadráticas já eram resolvidas por meio de completamento de quadrados desde os tempos babilônicos. Entretanto, a obtenção de uma fórmula utilizando letras para representar quantidades como hoje fazemos, sintetizando o método de solução, é algo muito mais recente.

Isso ocorreu somente com a publicação de "La Géométrie" de Descartes, em 1637. Nessa obra, pela primeira vez, o autor utiliza as primeiras letras do alfabeto a, b, c, ... para representar constantes e as últimas x, y, z, u, ... para representar variáveis e incógnitas. Descartes também é o primeiro a escrever produtos na forma de potências ao utilizar-se de letras, por exemplo $x \cdot x$ como x^2, $x \cdot x \cdot x$ como x^3, etc. É nesse contexto que a fórmula para a equação quadrática aparece como a conhecemos hoje.

Em períodos anteriores ao século XV, o processo de solução das equações quadráticas era registrado de maneira "retórica", isto é, como uma receita textual, de modo muito semelhante ao que ocorria na época babilônica. Em [1], por exemplo, encontramos a referência dada pelo matemático indiano Brahmagupta para solução de uma equação quadrática no ano de 628 dC:

> Ao número absoluto multiplicado por quatro vezes o coeficiente do quadrado, some o quadrado do coeficiente do termo médio. A raiz quadrada do mesmo, menos o coeficiente do termo médio, se dividido por duas vezes o coeficiente do quadrado, é igual ao termo médio.

As equações a que Brahmagupta se refere, quando escritas em linguagem moderna, são da forma $ax^2 + bx = c$, sendo c o chamado "número absoluto". Nesse caso, de acordo com as explicações, pode-se concluir que $x = \dfrac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$.

Apesar de esforços de matemáticos como Cardano, tentando compilar o que se conhecia sobre as soluções das equações quadráticas, as tentativas de sistematizar os diferentes tipos de solução dadas por Stevin [7], é somente em "La Géométrie" que temos uma fórmula na linguagem e notações semelhantes às que conhecemos hoje. Nessa obra, dentre várias situações, Descartes apresenta uma maneira geométrica de se solucionar equações da forma $z^2 = az - b^2$, obtendo uma fórmula explícita para z como $z = \dfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\dfrac{1}{4}a^2 - b^2}$.

O quadro a seguir, extraído de [3], mostra a evolução na forma de se representar uma equação quadrática de 1494 a 1693. Ele ilustra a dificuldade de notação que se tinha, e vale lembrar que antes desse período o processo de solução era descrito de forma retórica, como ilustramos no caso indicado por Brahmagupta, acima.

Notação: $x^2 + 5x - 6 = 0$

Ano	*Matemático*	*Representação*
1494	Luca Pacioli (itália)	Trouame . 5 . n°. che gioto al suo qdrat° facia 6
1514	Vander Hoecke (Inglaterra)	I Se. + 5 Pri. dit is ghelijc 6
1521	F. Ghaligai (Itália)	1 □ e 5 C° - 6 numeri.
1525	Christoph Rudolff (Alemanha)	Sit 1ȝ aequatus - 5 ℜ + 6
1545	Girolamo Cardano (Itália)	Quadratus p 5 rebus aequalis 6
1553	Michael Stifel (Alemanha)	5 ℜ + 1ȝ. aequata. 6.
1559	J. Buteo (Itália)	1 ◊ P 5p [P 6
1572	Rafael Bombelli (Itália)	$\overset{2}{1}$.p.$\overset{1}{5}$.Equale á 6
1585	Simon Stevin (Holanda)	$\overset{②}{1}$ + $\overset{①}{5}$ egale à 6
1591	François Viète (França)	Q p 5N m 6 aequatur 0
1619	Jobst Bürgi (Suíça)	$\overset{ii}{1}$ + $\overset{i}{5}$ eguales à 6
1631	Thomas Harriot (Inglaterra)	aa + 5a ═══ + 6
1637	Renè Descartes (França)	$x^2 + 5x - 6 \propto 0$
1693	John Wallis (Inglaterra)	$x^2 + 5x - 6 = 0$

Alguns autores, como [6] afirmam tacitamente que foi Viète quem primeiramente introduziu o simbolismo algébrico que ainda usamos. Isso não é de todo verdadeiro. O autor de [6] não cita a referencia histórica justificando sua posição e, ao pesquisarmos a obra de Viète observamos que, de fato, sua notação algébrica é completamente diferente da nossa. Na realidade, essa posição vem da observação feita em [2, pág. 67]. Entretanto, ao verificarmos as referencias históricas sobre Viète, citadas por esse último autor encontramos as seguintes notações para as equações:

FRANCISCI VIETÆ

OPERA

MATHEMATICA,

In unum Volumen congeſta, ac recognita,

Proponatur ſiquidem, A cubus + $\frac{\text{B ſolido in A}}{\text{D}}$, æquari Z ſolido. Oportet jam æqualitatem à fractionibus quibus laborat, liberare. D in A eſto E planum, ergo $\frac{\text{E planum}}{\text{D}}$ erit A. Quare $\frac{\text{E plani cubus + B ſolido in D in E planum}}{\text{D cubo}}$, æquabitur Z ſolido. Omnia per D cubum ducantur, ergo E plani cubus + B ſolido in D in E planum, æquabitur Z ſolido in D cubum.

1 C + $\frac{3}{2}$ N, æquetur 225. Igitur κατ' ἰσομοιρίαν 1 C + 6 N, æquabitur 1800. & radix præparata ad radicem propoſitæ ſe habet ut 2 ad 1. Itaque quum ſit hic 12, illic erit 6.

Et ſi proponatur A cubus $\frac{\text{+ B ſolido in A}}{\text{D}}$, æquari $\frac{\text{Z plano-plano}}{\text{D}}$. Ipſiſmet veſtigiis E plani cubus + B ſolido in D in E planum, æquabitur Z plano-plano in D quadratum.

1 C + $\frac{3}{2}$ N, æquetur $\frac{265}{2}$. Igitur κατ' ἰσομοιρίαν, 1 C + 6 N, æquabitur 1060. & quum ſit hic 1 N 10, illic erit 5.

Et ſi proponatur A cubus $\frac{\text{+ B plano in A quad.}}{\text{D}}$, æquari Z ſolido. Iiſdem veſtigiis E plani cubus + B plano in E plani quad., æquabitur Z ſolido in D cubum.

1 C + $\frac{3}{2}$ Q, æquetur 270. Igitur κατ' ἰσομοιρίαν, 1 C + 3 Q, æquabitur 2160. & quum ſit hic 1 N 12, illic erit 6.

Et ſi proponatur A cubus $\frac{\text{+ B plano in A quad.}}{\text{D}}$, æquari $\frac{\text{Z plano-plano.}}{\text{D}}$ Iiſdem veſtigiis E plani cubus + B plano in E plani quad., æquabitur Z plano-plano in D quadratum.

1 C + $\frac{3}{2}$ Q, æquetur $\frac{325}{2}$. Igitur κατ' ἰσομοιρίαν, 1 C + 3 Q, æquabitur 1300. & quum ſit hic 1 N 10, illic erit 5.

Fonte: Versão online da Universidad Complutense de Madrid

Isso mostra a necessidade, ao se estudar história, de analisar os originais. Nesse campo, não se tolera referências imprecisas, secundárias, ou sem verificação.

No que segue, vamos ver como deduzir a fórmula para solução da equação quadrática por meio do completamento de quadrados, e a correspondente interpretação geométrica das operações realizadas.

2.1 – Dedução por Completamento de Quadrados

Considerando que $ax^2 + bx + c = 0$, primeiramente observe que deve-se ter $a \neq 0$ a fim de que realmente a equação seja quadrática. Dessa forma, podemos reescrever a equação assim:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a^2x^2 + abx = -ac \qquad \text{Multiplicando por } a \text{ e isolando o termo sem o } x.$$

$$(ax)^2 + b \cdot (ax) = -ac$$

Aqui fica claro que podemos fazer uma mudança de variável colocando $y = ax$, para obtermos a nova equação

$$y^2 + b \cdot y = \overline{c}$$

em que colocamos $\overline{c} = -ca$. O ponto importante nessa mudança de variáveis é que ela preserva o termo *b*, utilizado no completamento de quadrados. E, ao reescrever a equação nessa forma, pode-se mais facilmente dar a ela uma interpretação geométrica.

A ideia de se fazer a transformação $y = ax$, e obter uma nova equação com o mesmo termo linear não é nova. Ela é apresentada no tablete babilônico BM 13 901 para solução da equação quadrática $11x^2 + 7x = 6;15$.

Retornando à equação, observe agora que um simples completamento de quadrados resolve o problema:

$$y^2 + b \cdot y = \overline{c}$$

$$y^2 + b \cdot y + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \overline{c} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \overline{c} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$y + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\overline{c} + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$y = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\overline{c} + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

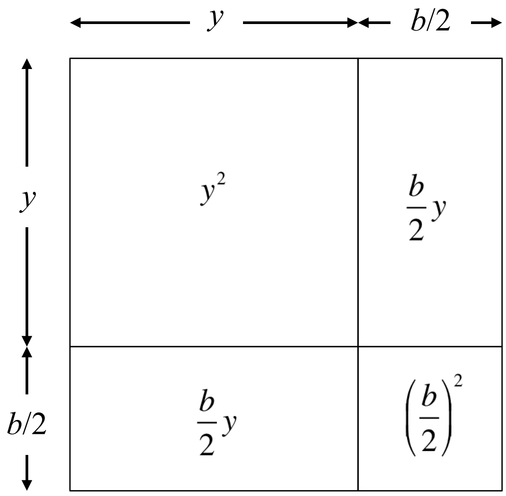
Substituindo na igualdade acima as expressões $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$, $\overline{c} = -ca$ e $y = ax$ obtemos finalmente

$$ax = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{-ca + \frac{b^2}{4}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.2 – Interpretação Geométrica da Fórmula

A multiplicação da expressão $ax^2 + bx + c = 0$ por a, transformando-a na nova equação $y^2 + b \cdot y = \overline{c}$ através das mudanças de variáveis $y = ax$ e $\overline{c} = -ca$ nos permite dar uma interpretação geométrica ao processo de completamento do quadrado do membro da esquerda da igualdade. De fato, com base na expressão $y^2 + b \cdot y = \overline{c}$ construímos a figura a seguir:



O processo que consiste em somar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos os lados da igualdade, faz com que o membro $y^2 + b \cdot y + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ represente a área de um quadrado, como ilustra a figura acima. Nesse caso, o quadrado terá lado $y + \frac{b}{2}$. A conclusão então é que o lado do quadrado será igual à raiz quadrada do termo $\overline{c} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, já que esse último número agora tem o significado geométrico de área.

Se os babilônicos chegaram a essas conclusões por uma via geométrica não sabemos, pois não há registro disso, o que levou Neugebauer a indicar em [5] que essa civilização desenvolveu um pensamento algébrico "de fato", ainda que o passo na direção de uma notação algébrica consciente não tenha sido dado.

2.3 – Sobre a Nomenclatura "Fórmula de Bháskara"

A essa altura de nossas discussões muitos pontos já devem ter ficado claros. Recordemos que Bháskara foi um matemático indiano que viveu de 1114 dC a 1185 dC. Primeiramente vimos que a fórmula, como a conhecemos hoje, foi primeiramente divulgada por Descartes em La Géométrie, em 1637. Antes dessa época, não se usavam letras para representar incógnitas ou constantes.

Apesar disso equações quadráticas eram resolvidas desde os tempos da babilônia e sua solução registrada de maneira retórica. Essa foi a forma pela qual Bháskara se utilizou, tal qual seu predecessor Brahmagupta [1]. Aliás, já em 628 dC Brahmagupta apresenta uma solução retórica bastante completa. Dessa maneira fica a pergunta, por que atribuir a Bháskara a fórmula ou o método? Isso não possui consistência histórica.

Parece que esse costume remanesce na década de 1950 no Brasil. O interessante é que nem mesmo na Índia, terra natal de Bháskara a fórmula, ou qualquer método de solução para equações quadráticas, carrega o nome desse matemático. Ou seja, tal costume não passa de um clichê brasileiro.

2.4 – Duas outras Deduções da Fórmula para Solução da Equação Quadrática

No decurso da história, apareceram muitas deduções diferentes para a fórmula da solução da equação quadrática. No que segue apresentaremos, apenas a título de curiosidade, mais duas delas:

<u>Primeira Dedução:</u>

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Fazendo a substituição $x = \dfrac{y-b}{2a}$ na equação acima obtemos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(\frac{y-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{y-b}{2a}\right) + c = 0$$

Desenvolvendo e simplificando,

$$ay^2 - ab^2 + 4a^2c = 0$$

$$y^2 = b^2 - 4ac$$

$$y = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Lembrando que $x = \dfrac{y-b}{2a}$, escrevemos a variável y como $y = 2ax + b$. Dessa forma, obtemos:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>Segunda Dedução:</u>

O método que apresentamos a seguir é atribuído a Viète [3]. Na equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

efetuamos a substituição $x = u + v$. Dessa maneira,

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0$$

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$$

Reagrupando os termos em u temos

$$au^2 + (2av+b)u + av^2 + bv + c = 0$$

A fim de se eliminar o termo em u, ficando somente com o termo em u^2, podemos impor que o coeficiente de u seja zero, isto é, $2av + b = 0$. Assim, obtemos $v = \dfrac{-b}{2a}$. Substituindo esse valor na equação acima, encontramos

$$au^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

$$au^2 + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$4a^2u^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$u = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lembrando que $v = \frac{-b}{2a}$, e também que inicialmente $x = u + v$, obtemos então a fórmula

$$x = u + v$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, a título de curiosidade, queremos citar o artigo de Heaton [4]. Segundo esse autor, até 1896 não se tinha notícia da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e de sua dedução como método para solução direta de equações quadráticas. Apesar das soluções de Descartes implicarem diretamente as de Heaton elas eram baseadas em um método dedutivo geométrico, não algébrico.

Referências:

1. Berriman, A.: The Babylonian Quadratic Equation. *The Mathematical Gazzete* **40** (1956), 185 – 192.

2. Bourbaki, N.: *Éléments D'Histoire des Mathématiques*. Paris: Masson, 1984. Réimpression inchangée de l'edition originale, Berlin: Springer, 2007.

3. Fragoso, V.: *Equação do 2º Grau: Uma Abordagem Histórica*. 2ª Edição. Ijuí: Unijuí, 1999.

4. Heaton, H.: A Method of Solving Quadratic Equations. *American Mathematical Monthly* **3** (1896), 236–237.

5. Neugebauer, O.: *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd ed., RI: Brown University Press, 1957; reprinted ed., New York: Dover, 1969.

6. Pesic, P.: *Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvabilitty.* Cambridge: The MIT Press, 2003.

7. Struik, D. (ed.), *The principal works of Simon Stevin. Vol. IIB: Mathematics*. Amsterdam: N. V. Swets & Zeitlinger, 1958.