Equações no Período Babilônico*

Alexandre Trovon
Departamento de Matemática – UFPR
2012

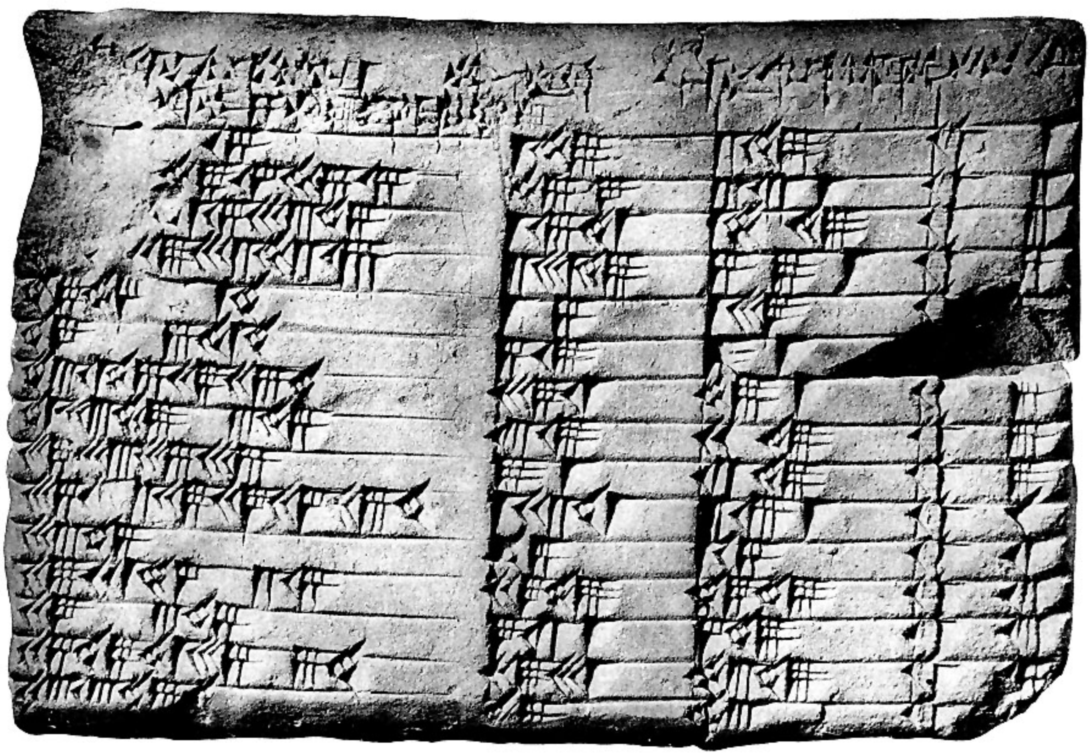
* Revisado em 2023

1 – Equações no Período Babilônico

Dentre os povos que se destacaram no desenvolvimento de técnicas para solução de equações certamente os Egípcios e Babilônicos merecem um destaque. Entretanto, os babilônicos foram além, desenvolvendo métodos para resolver problemas quadráticos de diversos tipos.

Um dos enganos comuns que se tem é que esses problemas babilônicos eram ligados sempre ao quotidiano envolvendo, por exemplo, cálculos de áreas. Entretanto, ao se analisar os tabletes de argila, onde esses problemas eram registrados, percebemos muitos deles são na verdade exercícios que explicitam um método de cálculo e resolução de problemas numéricos apenas.

Para exemplificar o que estamos dizendo, vamos analisar mais adiante dois casos concretos de problemas babilônicos, recuperados de tabletes de argila. Antes, porém, é importante saber como funcionava o sistema de numeração babilônico que, diferentemente do egípcio, era posicional, mas com base 60.



Tablete Plimpton 322: datando de aproximadamente de 1800 aC, pertence à coleção do Museu da Universidade de Columbia. Ele apresenta uma tabela envolvendo ternas pitagóricas, mostrando que certas relações pitagóricas já eram conhecidas pelos Babilônicos naquela época.

Para representar os números babilônicos em base 60 utilizamos a notação moderna de Neugebauer [2]. Por exemplo, escrevemos 4,19;14,35 para indicar o número

$$4 \times 60 + 19 + 14 \times 60^{-1} + 35 \times 60^{-2} = 259\frac{35}{144}$$

A partir de 1930, as traduções e análises dos textos babilônicos feitos por Neugebauer mostraram a versatilidade dos babilônicos na solução de equações quadráticas. A seguir apresentamos dois exemplos disso.

Exemplo 1:
O tablete de argila BM 13 901, que se encontra no Museu Britânico, contém o seguinte problema, que transcrevemos para linguagem atual:

> Encontrar o lado de um quadrado cuja área, somada com o lado, é igual a 0;45.

Lembrando que $0;45 = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$, observamos que o problema consiste em resolver a seguinte equação quadrática

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

A solução dessa equação é apresentada no tablete da seguinte maneira:

> Tome metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, que é 0;15. Some isso a 0;45 para obter 1. Este é o quadrado de 1. Agora subtraia 0;30 de 1. O resultado é 0;30, o lado do quadrado.

Para ficar mais claro, vamos transformar as quantidades para o sistema decimal, e organizar o método de solução de acordo com o que apresenta Berriman em [1]:

$$ax^2 + bx = c\text{; com } a = 1,\ b = 1 \text{ e } c = 3/4.$$

Solução em forma textual	***Operação Numérica***	***Fórmula***
	1	b
Tome metade de 1, que é 1/2,	$(1/2)1 = (1/2)$	$(b/2)$
Multiplique 1/2 por 1/2, que é 1/4	$(1/2)^2 = (1/4)$	$(b/2)^2$
Some isso à 3/4 para obter 1.	$(1/4) + (3/4) = 1$	$(b/2)^2 + c = z$
Este é o quadrado de 1.	$= 1^2$	$= \left(\sqrt{z}\right)^2$
Agora subtraia 1/2 de 1.	$1 - (1/2) = (1/2)$	$\sqrt{z} - (b/2) = x$
O resultado é 1/2, o lado do quadrado	1/2	

Aqui se evidencia claramente o processo de completamento de quadrado para solução da equação, por meio da soma de (1/4), a fim de que se tenha um quadrado perfeito no primeiro membro (e também no segundo). Tal método se evidencia em inúmeras outras inscrições em tabletes, mostrando que, ainda que não se tinha um método algébrico baseado em incógnitas, o raciocínio do completamento de quadrados para a solução das equações já era evidente.

Exemplo 2:
O tablete de argila YBC 6967, que se encontra na Universidade de Yale, contém o problema que transcrevemos para linguagem atual:

> Um recíproco excede seu recíproco em 7. Quais são: o recíproco e seu recíproco?

Esse problema é essencialmente numérico, pois os recíprocos são números que multiplicados perfazem 1,0. Entretanto, como o sistema babilônico é de base 60, lembremos que nessa base 1,0 = 1 × 60 + 0 = 60. O problema então consiste em se obter dois números, x e y, cujo produto é 60 e a diferença é 7, isto é

$$x \cdot y = 60 \quad \text{e} \quad x - y = 7$$

Desse modo, obtemos um sistema de duas equações, que por substituição se reduz à equação quadrática $(y + 7) \cdot y = 60$. A solução apresentada no tablete babilônico para esse sistema é a seguinte:

> Tome metade de 7, que é 3;30. Multiplique 3;30 por 3;30, que é 12;15. Some isso ao produto 1,0 e o resultado é 1,12;15. Qual é a raiz quadrada de 1,12;15? 8;30. Tome o 8;30 que você obteve e subtraia 3;30 dele; some 3;30 a 8;30. Um é 12 o outro é 5. O recíproco é 12 e seu recíproco 5.

Aqui novamente temos um completamento de quadrados no processo de solução. Uma vez colocada a equação na forma $(y + 7) \cdot y = 60$, ou seja $y^2 + 7y = 60$ ela se torna uma equação do mesmo tipo daquela apresentada no primeiro exemplo, podendo ser resolvida pelo mesmo método:

$$ay^2 + by = c\text{; com } a = 1,\ b = 7 \text{ e } c = 60.$$

Solução em forma textual	***Operação Numérica***	***Fórmula***
	7	b
Tome metade de 7, que é 7/2	$(1/2)7 = (7/2)$	$(b/2)$
Multiplique 7/2 por 7/2, que é 49/2	$(7/2)^2 = (49/4)$	$(b/2)^2$
Some isso ao produto 60 e o resultado é 289/4	$(49/4) + 60 = (289/4)$	$(b/2)^2 + c = z$
Qual é a raiz quadrada de 289/4? 17/2.	$= (17/2)^2$	$= \left(\sqrt{z}\right)^2$
Tome o 17/2 que você obteve e subtraia 7/2 dele;	$(17/2) - (7/2) = 5$	$\sqrt{z} - (b/2) = y$
Some 7/2 a 17/2.	$(17/2) + (7/2) = 12$	$\sqrt{z} + (b/2) = x$
Um é 12 outro é 5. O recíproco é 12 e seu recíproco 5.		

Mais uma vez aparece o completamento de quadrados no processo de solução do problema, bem como o elemento "b" e as manipulações necessárias que o envolvem.

Outros tipos de equações quadráticas, tais como $x^2 = px + q$, $x^2 + q = px$ e diversos sistemas, alguns bastante complexos, eram resolvidos pela matemática babilônica. [2,3] apontam ainda um estudo rudimentar de equações cúbicas, do quarto e oitavo graus, e uma abordagem de alguns problemas com potências e expoentes, levando à ideia de logaritmo.

O que nos deve ficar evidente é o fato central do completamento de quadrados como método de solução para equações quadráticas na matemática babilônica.

Referências:

1. Berriman, A.: The Babylonian Quadratic Equation. *The Mathematical Gazzete* **40** (1956), 185 – 192.

2. Neugebauer, O.: *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd ed., RI: Brown University Press, 1957; reprinted ed., New York: Dover, 1969.

3. ________ and Sachs, A.: *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Texts, Vol. 29, New Heaven: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 1945.