Relatório 3

Equação Cúbica e a Fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano

1. Mostre que $\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ é uma raiz cúbica complexa de 1. Além disso, verifique que 1, ω e ω^2 são as três raízes cúbicas distintas da unidade.

2. Utilizando a fórmula de Cardano resolva as equações cúbicas

   a) $x^3 - 6x - 6 = 0$ b) $x^3 + 9x - 6 = 0$ d) $2x^3 + 6x + 3 = 0$

   e) $x^3 + 6x^2 - 36 = 0$ f) $x^3 + 3x^2 + 9x + 14 = 0$ g) $x^3 - 2x + 2 = 0$

3. Demonstre que

   a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$ b) $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = 2$

4. Uma caixa sem tampa tem a forma de um cubo de aresta 10 cm. Se a capacidade da caixa é de 500 cm^3, qual é a espessura das paredes? Assuma que a espessura é uniforme.

5. Resolva de forma trigonométrica:

   a) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ c) $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = 0$

6. Sendo o peso específico da cortiça 0,25, a que profundidade uma esfera de cortiça de 10 cm de raio mergulhará em água? Pelo princípio de Arquimedes, a cortiça deslocará um volume de água igual ao peso da cortiça.

7. Resolva a equação

$$(x^2 - x + 1)^3 = 9x^2(x-1)^2$$

   Sugestão: faça a substituição $y = x - \dfrac{1}{2}$.

8. Resolva a equação

$$(x^2 - x + 1)^3 = 8x(x-1)$$

9. Deduza a fórmula de Cardano de outra maneira. Para isso, considere a equação geral

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com $a \neq 0$.

a) Faça a substituição $y = x + \dfrac{b}{3a}$ para transformar a equação original numa equação da forma

$$y^3 + py + q = 0.$$

Determine então a expressão de *p* e *q* em termos de *a*, *b*, *c* e *d*.

b) Na equação $y^3 + py + q = 0$ faça a substituição $y = z - \dfrac{p}{3z}$ para obter a equação

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0.$$

Multiplique então a equação por z^3 e aplique a fórmula quadrática para obter

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

10. Na fórmula de Cardano, suponha que $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$ de modo que o número

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = i\sqrt{-D}$$

seja imaginário puro e os números

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D} \quad \text{e} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D}$$

são complexos. Suponha que $u = a + bi$ seja uma das raízes cúbicas de $u^3 = -\dfrac{q}{2} + i\sqrt{-D}$. Com base nisso faça o que se pede:

a) Mostre que, como v^3 é o conjugado de u^3, o número $a - bi$ será uma das raízes cúbicas de v^3, a fim de que se tenha $uv = -\dfrac{p}{3}$.

b) Conclua que as raízes da equação serão todas reais e dadas pelas expressões:

$$y_1 = 2a, \qquad y_2 = -a - b\sqrt{3}, \qquad y_3 = -a + b\sqrt{3}$$