Relatório 4

Equação do Quarto Grau e Fórmula de Ferrari-Cardano

1. Resolva as seguintes equações do quarto grau:

   a) $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 2 = 0$ c) $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$

   d) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12 = 0$ e) $x^4 + 2x^2 + x + 2 = 0$

2. Mostre que uma equação recíproca, da forma

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$

   pode ser resolvida por meio de radicais quadráticos.

3. Mostre que $x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ satisfaz à equação

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0\,.$$

   Quais são as outras raízes dessa equação?

4. Resolva a equação

$$[(x+2)^2 + x^2]^3 = 8x^4(x+2)^2$$

   Sugestão: faça a substituição $x + 1 = y$.

5. Mostre que toda solução de uma equação de grau *n*, da forma

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + dx + e = 0$$

   pode ser reduzida à solução de uma outra equação em que $a = 0$ por meio de uma substituição da forma $x = y + k$.

6. Vamos resolver a equação do quarto grau de outra maneira. Para isso, siga os passos descritos em cada item.

   a) Dada uma equação da forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ efetue uma transformação da forma $y = x + k$ de modo a colocá-la na forma $y^4 + py^2 + qy + r = 0$.

b) Reescreva a equação na forma $y^4 = -py^2 - qy - r$ e introduza uma nova variável *m*, fazendo

$$(y^2+m)^2 = y^4 + 2my + m^2 = (-p+2m)y^2 - qy + (-r+m^2)$$

Obtenha então um valor adequado de *m*, de modo que o membro direito seja um quadrado perfeito.

c) Com base no que você obteve no item anterior, prove que

$$(y^2+m)^2 = (-p+2m)\left(y - \frac{q}{2(-p+2m)}\right)^2,$$

ou mais simplesmente

$$y^2 + m = \pm\sqrt{-p+2m}\left(y - \frac{q}{2(-p+2m)}\right)$$

que dá *y* como solução de uma equação quadrática.

7. Deduza a fórmula de Ferrari-cardano de outra maneira. Para isso, considere uma equação do quarto grau geral:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

com $a \neq 0$.

a) Faça a substituição $z = x + \dfrac{b}{4a}$ a fim de transformar a equação original em

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Determine então a expressão de *p*, *q* e *r* em termos das demais constantes *a, b, c, d, e*.

b) Para todos os $u \in \mathbb{C}$, a equação $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ é igual à:

$$z^4 + z^2u + \frac{u^2}{4} - z^2u - \frac{u^2}{4} + pz^2 + qz + r = 0 \qquad (*)$$

ou

$$\left(z^2 + \frac{u^2}{2}\right)^2 - [(u-p)z^2 - qz + (\frac{u^2}{4} - r)] = 0.$$

Seja $P = z^2 + \frac{u}{2}$. Mostre que o polinômio $(u-p)z^2 - qz + (\frac{u^2}{4} - r)$ é da forma Q^2, sendo Q um polinômio do primeiro grau em z, precisamente quando o discriminante de $(u-p)z^2 - qz + (\frac{u^2}{4} - r)$ é zero, isto é, quando

$$q^2 = 4(u-p)(\frac{u^2}{4} - r).$$

c) Finalmente, resolvendo a equação cúbica acima para u, mostre que a equação do quarto grau (*) toma a forma $0 = P^2 - Q^2 = (P+Q)(P-Q)$, ou

$$(z^2 + \frac{u}{2} + L)(z^2 + \frac{u}{2} - L) = 0$$

sendo L uma função linear de z. Essa equação é então o produto de duas equações quadráticas, em que cada uma pode ser resolvida usando a fórmula quadrática.