MA33 – Introdução à Álgebra Linear

Lista de Exercícios

Entrega até 19/02/2018

Módulo 1 – Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

1. Calcule o valor de λ de modo que o sistema de três variáveis:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

possua soluções não-triviais.

2. Calcule todas as soluções do sistema linear:

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1 \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \\ x_4 + x_1 &= yx_5 \end{aligned}$$

nas variáveis x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 em termos do parâmetro y.

3. Considere as três retas no plano xy:

$$\begin{aligned} r_1 &: ax + by + c = 0 \\ r_2 &: bx + cy + a = 0 \\ r_3 &: cx + ay + b = 0 \end{aligned}$$

Mostre que r_1, r_2 e r_3 se interceptam em um ponto se e só se $a + b + c = 0$.

4. Seja S a matriz *"identidade ao contrário"*, isto é,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostre que $S^{-1} = S^t = S$.

5. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais não nulos. Calcule a inversa da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Módulo 2 - Determinantes

6. Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Seja A uma matriz $n \times n$ cujas entradas são 1 ou -1. Prove que $\det(A)$ é divisível por 2^{n-1}.

8. Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas reais.
   (a) Mostre que se $A^t = -A$ e n é ímpar, então $\det(A) = 0$.
   (b) Mostre que se $A^2 + I = 0$ então n deve ser par.

9. Se A é uma matriz quadrada ptal que $A^3 = 2I$, mostre que B é inversível, sendo

$$B = A^2 - 2A + 2I$$

10. Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vetores de $\mathbb{R}^n$, escritos como matrizes coluna. Mostre que

$$\begin{vmatrix} I & \vec{x} \\ \vec{y}^t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \vec{y}^t \\ \vec{x} & I \end{vmatrix}$$

Módulo 3 – Espaços Vetoriais

11. A fórmula para o volume de um tetraedro é $\frac{1}{3}$(área da base) · (altura). Use esse resultado para provar que o volume de um tetraedro cujos lados são os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ é dado por $\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$.

12. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e $k = \|\vec{u}\|$ e $l = \|\vec{v}\|$. Prove que $\vec{w} = l\vec{u} + k\vec{v}$ bisecta o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

13. Dada uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, de $\mathbb{R}^3$, defina $\vec{v}_4 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$. Mostre que todo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + a_4\vec{v}_4$, sendo a_1, a_2, a_3, a_4 únicos escalares tais que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$.

14. Para quais valores de $t \in \mathbb{R}$ os vetores

$$\vec{v}_1 = (1,1,0), \quad \vec{v}_2 = (1,3,-1) \quad \text{e} \quad \vec{v}_3 = (5,3,t)$$

são linearmente independentes?

15. Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^n$ gerados respectivamente pelos vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q$. Considere o subespaço W, gerado pelos vetores $\vec{u}_i + \vec{v}_j$, com $i = 1,2,\ldots p$ e $j = 1,2,\ldots q$. Se $\dim(U) = s$ e $\dim(V) = t$, mostre que

$$\dim(W) \leq \min\{n, s+t\}$$

Módulo 4 – Transformações Lineares

16. Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, tais que $\dim(W) < \dim(V)$, prove que não existe transformação linear injetora $T : V \to W$.

17. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que efetua um giro de 60° no plano xz deixando o eixo y fixo.

18. Uma transformação linear $P : V \to V$, agindo em um espaço vetorial V, é dita ser *idempotente* se $P^2 = P \circ P = P$. Nesse caso, mostre que:
    a) $P(\vec{v}) = \vec{v}$ para todo $v \in \mathrm{Im}(P)$;
    b) $P + I$ é inversível, e calcule $(P + I)^{-1}$;
    c) $\mathrm{Ker}(P) = \{\vec{v} - P(\vec{v}) | \vec{v} \in V\} = \mathrm{Im}(I - P)$;
    d) a representação de P em uma determinada base é

$$\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0);$$

19. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$. Se $AB = 0$ mostre que

$$\mathrm{posto}(A) + \mathrm{posto}(B) \leq n.$$

20. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma transformação linear. Prove que existe um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, tal que $T(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Entrega até 19/02/2018