

Funções 2025 - Primeira Lista de Exercícios

Recomendações

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de modelagem matemática. Em ambas as situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados.
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que dêem a você uma ideia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas ideias com os colegas.
- *Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela*

Módulo 1 - Números Reais

1. Expresse cada número como decimal:

- a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{9}{15}$ d) $-\frac{7}{8}$
e) $-3\frac{17}{20}$ f) $\frac{4}{11}$ g) $-\frac{8}{7}$ h) $-\frac{56}{14}$

2. Expresse cada número decimal como uma fração na forma mais reduzida possível:

- a) 2,4 b) -3,6 c) 0,5555...
d) $0,\overline{18}$ e) 0,09595... f) $3,\overline{27}$
g) 1,38181... h) $-4,\overline{17}$ i) $2,\overline{472472}$...

3. Cortou-se, primeiramente, $\frac{2}{7}$ de um fio. Depois cortou-se 0,6 do restante. A parte que restou foi dividida em 50 partes iguais, cada uma medindo 16 metros. Calcule o comprimento do fio.

4. Será que é possível escrever um decimal com um número infinito de algarismos e que não seja uma dízima periódica, seguindo alguma regra para a colocação dos algarismos?

5. Transforme os decimais em frações (irredutíveis). Em seguida, faça o que se pede.

- a) 2,5 e 2,4999... b) 1,02 e $1,01\overline{9}$ c) 3,74 e 3,73999... d) $5,\overline{9}$ e 6
e) O que você observou nas frações dos itens anteriores?
f) Prove que todo decimal finito admite duas representações decimais distintas.

6. Responda às perguntas, justificando em cada caso.

- (a) A soma de dois números racionais é um número racional, ou será que pode ser irracional?
- (b) E a soma de dois números irracionais é sempre irracional, ou será que pode ser racional?
- (c) O produto de dois números racionais é um número racional, ou será que pode ser irracional?
- (d) E o produto de dois números irracionais é sempre irracional, ou será que pode ser racional?

7. Efetue a expressão em cada item. Em seguida, responda às perguntas

a) $\frac{1}{1+1}$ b) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$ c) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}$ d) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}$

- e) Em cada caso, que fração você obtém? Como elas são formadas?
- f) Continuando com esse processo, sem fazer contas, qual você acha que será a próxima fração? Por quê?

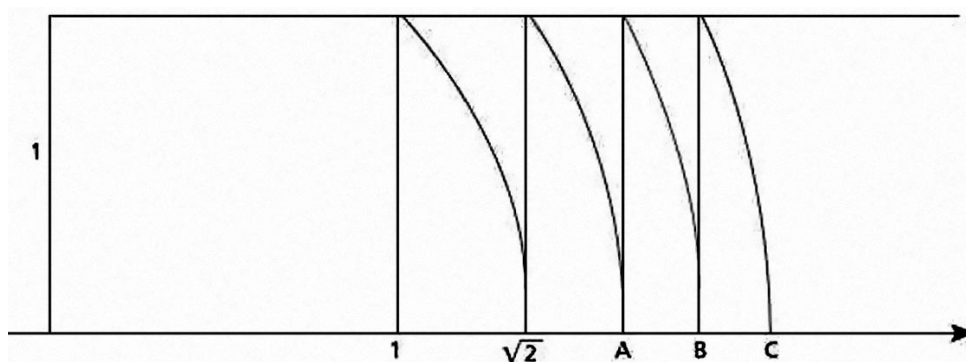
8. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras? Explique sua resposta.

- a) $3 \in \mathbb{R}$ b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
- d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

9. Mostre que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

10. Mostre que existem a e b racionais, tais que $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

11. Que números reais são representados pelos pontos A, B e C na figura a seguir? Explique sua resposta.



12. Efetue as operações indicadas e escreva, em cada caso, se o resultado é um número racional ou irracional.

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

(b) $7 - \sqrt[3]{5} - (8 - \sqrt[3]{5})$

(c) $\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}$

(d) $5 + \sqrt{11} - (3 - \sqrt{11})$

(e) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

(f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(g) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$

13. *Desafio 1.* Prove que:

(a) Um número racional $\frac{m}{n}$, com $\text{mdc}(m, n) = 1$ (a fração é irredutível), pode ser representado como um decimal finito se, e somente se, $n = 2^j 5^k$, onde $j, k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

(b) Todo número racional $\frac{m}{n}$, com $\text{mdc}(m, n) = 1$ (a fração é irredutível), e onde $n = Np$, $N \in \mathbb{Z}$, p é um primo, $p \neq 2$ e $p \neq 5$, pode ser representado como uma dízima periódica.

14. Utilizando os axiomas que definem o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, faça o que se pede nos itens seguintes:

(a) Mostre que se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$

(b) Mostre que se $abc = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$

(c) Se $ab = ac$, então $b = c$? Por quê?

(d) Se $a^2 = b^2$, então $a = b$? Por quê?

(e) Mostre que $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$, para todos os $b, c \neq 0$

(f) Mostre que $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$, para todos os $c, d \neq 0$

15. Prove a *Lei do cancelamento da Multiplicação*: para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ se $ab = ac$, e $a \neq 0$, então $b = c$.

16. As fórmulas a seguir serão muito úteis. Verifique-as:

(a) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

(b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

(c) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

17. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $x^2 \geq 0$.
18. Demonstre que:
- (a) $1 > 0$;
 - (b) Se $a \leq b$ e $c \geq d$ então $a - c \leq b - d$.
 - (c) Se $0 < a < b$ então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
 - (d) Se $a > 1$ então $a^2 > a$.
 - (e) Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.
 - (f) Se $0 \leq a < b$ então $a^2 < b^2$.
 - (g) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $a^2 < b^2$ então $a < b$.
19. Dados dois números a e b reais e positivos, chama-se *média aritmética* de a e b ao número $\frac{a+b}{2}$ e chama-se *média geométrica* ao número $\sqrt{ab}$. Se $0 < a < b$, mostre que
- (a) $a < \frac{a+b}{2} < b$.
 - (b) $a < \sqrt{ab} < b$.
 - (c) $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.
20. Sendo a e b números reais quaisquer, mostre que $a^3 \leq b^3$ se, e somente se, $a \leq b$.
21. Se $x \in \mathbb{R}$ tem a propriedade que $0 \leq x < h$ para todo número real positivo h prove que $x = 0$.
22. Prove que os seguintes números são irracionais: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt[3]{7}$.
23. Usando o fato que $\sqrt{2}$ é irracional, prove que entre dois reais a e b com $a < b$, existe um número irracional da forma $r\sqrt{2}$, sendo r racional.
24. Euclides¹ mostrou que há um número infinito de primos usando um argumento muito simples. Ele supõe que houvesse somente um número finito de primos, digamos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e então considerou o número $p_1 \cdots p_n + 1$ consistindo do produto de todos esses primos mais 1. Dessa forma, esse número não poderá ser primo, já que é maior que todos os primos listados. Portanto, algum primo p_k da lista acima deve dividi-lo. Obtenha com isso uma terrível contradição.

¹Viveu por volta de 300 aC.

25. Determine o valor de x , sabendo que $\frac{1}{2 - \frac{x}{1-x}} = \frac{1}{2}$.
26. Verifique que para todo número $x > 0$, se tem $x + \frac{1}{x} \geq 2$. (*Dica:* tente multiplicar ambos os lados da desigualdade por x e observar o que acontece.)
27. Resolva a expressão $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$.
28. Qual o valor de x^2 , se $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$? (*Dica:* Eleve ao cubo e depois procure uma equação do segundo grau.)
29. Prove que:
- a) $|x| \geq 0$
 - b) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$
 - c) $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
 - d) $|x - y| \leq |x| + |y|$
 - e) $||x| - |y|| \leq |x + y|$
 - f) Se $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
 - g) Dado $c > 0$, tem-se $|x| > c$ se, e somente se, $x < -c$ ou $x > c$.
30. Resolva as inequações
- a) $|x - 7| < 9$
 - b) $|2x + 3| \leq 10$
 - c) $|3x - 1| < x$
 - d) $|2x^2 + 3x + 3| \leq 3$
 - e) $|x - 1| + |x - 3| < 4x$
 - f) $\frac{1}{|x + 1||x - 3|} \geq \frac{1}{5}$
31. Represente graficamente os seguintes intervalos:
- a) $[1, +\infty[$
 - b) $] -2, +\infty[$
 - c) $[3, 8[$
 - d) $] -\infty, -1[\cup [2, +\infty[$
32. Dentre os conjuntos a seguir, distinga quais são intervalos, representando-os com as notações adotadas.
- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x < 3x - 7\}$
 - b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(x+3)^2} = x + 3\}$
 - c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 - 4} \leq x - 1\}$
 - d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{2} \text{ e } x \leq 2\}$
 - e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{|x|} = 1, x \neq 0\}$
 - f) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < |4 - x|\}$

33. Se $a > 0$ e b é um número qualquer, mostre que $|x - b| < a$ é equivalente a $b - a < x < b + a$ e também equivalente a $x \in]b - a, b + a[$.

34. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

a) $|x^2 + 2x + 1| < 0$ b) $|(x - 2)^2| > 0$

c) $x|x + 1| > 0$ e $x|x + 1| < 0$ d) $\sqrt{3x^2} > 0$

e) $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} > 2$ f) $\sqrt{2|x| - 1} > 0$

g) $3|x| + 1 > 0$ e $3|x| + 1 < 0$ h) $\frac{3}{x} < 5$

i) $\frac{2}{x-1} < 4$ j) $\frac{x}{(3-x)^2} < 2$

k) $\frac{2}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1$ l) $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$

m) $\frac{x-3}{x-1} > x-4$ n) $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

35. Nos itens a seguir, determine para quais valores de x o trinômio é maior que zero, e para quais valores de x é menor que zero. Para isso, fator o trinômio (ou complete os quadrados) e estude o sinal. Expresse a resposta na notação de intervalo.

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $x^2 + x - 42$ c) $2x^2 - x - 1$

d) $x^2 - 9$ e) $16x^2 - 2x$ f) $x^2 + 3x$

g) $x^2 + x + 1$

Observe como resolvemos a letra g). Faça o mesmo para os próximos itens.

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 && \text{(completamos o quadrado)} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Assim, $x^2 + x + 1 > 0$ se, e somente se, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, isto é, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}$. Como $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $x^2 + x + 1 > 0$ para $x \in]-\infty, +\infty[$. Por outro lado, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < -\frac{3}{4}$ não tem solução, já que o membro esquerdo da desigualdade é um número positivo. Logo a solução para $x^2 + x + 1 < 0$ é $\emptyset$, o conjunto vazio.

h) $x^2 + 1$ i) $-x^2$ j) $-x^2 + 2x - 2$

k) $x^2 + 3x + 3$ l) $2x^2 + x + 1$ m) $x^2 + x - 1$

36. Resolva as desigualdades, expressando a solução na forma de intervalo, quando possível.

a) $x(x-3)(6-x) < 0$

b) $\frac{(x+1)(2x-3)}{x+5} \geq 0$

c) $|5x| > 1$

d) $|3x-4| \geq 2$

e) $\frac{|x-1|(x^2-2)}{x-1} > 0$

f) $|x-3| > x+1$

g) $\frac{(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2+2)(x^6+6)} > 0$

h) $|x-1| - |x-3| \geq \frac{|x-1|}{2}$

i) $\frac{6-x-x^2}{(x^2+x+1)(x+4)(x-6)^2} \geq 0$

j) $\frac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x^2+3)(2x+1)} \geq 0$

37. Os elementos da *série de Fibonacci* são definidos como

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Com base nisso, faça que se pede:

- (a) Pesquise mais (em livros ou na internet) a respeito da série de Fibonacci, do número aureo e de suas propriedades na natureza. Pesquise também se existe alguma fórmula para gerar os elementos desta sequência.
- (b) Explique como esta sequência é formada.
- (c) O quociente de um termo desta sequência pelo termo seguinte se aproxima de que valor, à medida que aumentamos os termos da sequência?

38. *Desafio 2.* Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (n natural e $a_n \neq 0$) um polinômio com coeficientes inteiros. Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional com p e q primos entre si. Se r é raiz de $f(x)$, prove que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

39. Usando o exercício anterior, prove que são irracionais:

- (a) $\sqrt{3}$
- (b) $\sqrt[4]{5}$
- (c) $\sqrt{p}$, com p um número primo.
- (d) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

40. *Desafio 3. A Conjectura de Fermat.* Antes de morrer, Pierre Fermat afirmou ter obtido uma prova para a seguinte afirmação (conjectura):

Não existem 3 naturais distintos x , y e z tais que $x^n + y^n = z^n$ quando $n \geq 3$.

Observe que o expoente n é um número natural também.

- (a) Verifique que há infinitas soluções para a conjectura de Fermat, quando $n = 1$ ou $n = 2$.
- (b) Já que Andrew Willes provou a conjectura de Fermat, use o que você sabe de matemática para tentar encontrar três naturais distintos x , y e z , tais que $x^2 + y^3 = z^2$.

Módulo 2 - Generalidades sobre Funções

41. Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Com a tabela

x	y
a	4
e	3
i	3
o	2
u	1

estabelecemos uma regra entre os elementos de A e B de modo que a cada $x \in A$ colocado na tabela, associa-se o $y \in B$ colocado à sua direita. Verifique se a regra assim estabelecida determina uma função $f : A \rightarrow B$.

42. Com os mesmos conjuntos A e B do exercício anterior, quais das tabelas a seguir dão origem a funções $f : A \rightarrow B$?

a)

x	y
a	
e	1
i	
o	2
u	

b)

x	y
a	1
e	1
i	1
o	2
u	2

c)

x	y
a	1
e	2
i	3
o	4
u	5

d)

x	y
a	1
e	2
e	3
i	4
u	5
u	1

e)

x	y
a	5
e	5
i	5
o	5
u	5

f)

x	y
a	1
i	2
u	3

g)

x	y
a	3
e	4
i	5
o	5
u	4

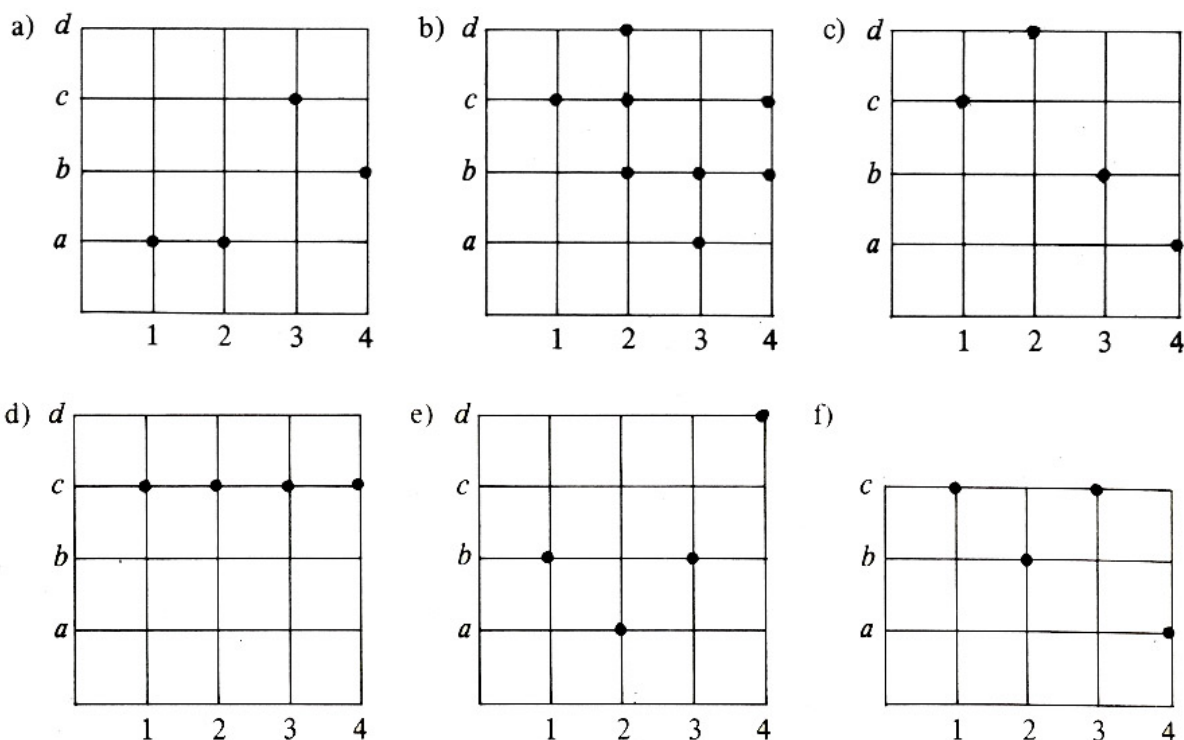
h)

x	y
a	1
e	4
i	2
o	5
u	3

i)

x	y
a	2
e	1
i	2
o	3
u	3

43. Entre as funções determinadas pelas tabelas do exercício anterior, determine quais são injetoras, quais são sobrejetoras e quais são bijetoras.
44. Em cada item a seguir, considere o conjunto G dos pontos assinalados na malha



formado por pontos do produto cartesiano $A \times B$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, exceto em f), onde $B = \{a, b, c\}$. Em cada caso, verifique se G determina uma função.

45. Dentre as funções determinadas pelo conjunto $G \subset A \times B$ do exercício anterior, determinar quais são injetoras, quais são sobrejetoras e quais são bijetoras.
46. Nos exercícios 42 e 44, nos casos em que se tem funções $f: A \rightarrow B$, determine $\text{Im}(f)$.
47. Sabe-se que um triângulo está inscrito na semicircunferência de diâmetro a é retângulo. Se os catetos são x e y , expresse y como função de x . Expresse a área desse triângulo como função de x .
48. Um retângulo inscrito na semicircunferência de diâmetro a tem lados x e y , sendo que y está sobre o diâmetro a . Expresse y em função de x . Expresse a área do retângulo em função de x .
49. Expresse o lado do quadrado inscrito em um triângulo ABC , em função da base a e da altura h .
50. A tela dos monitores dos computadores mais antigos são compostas de pequenos quadradinhos que se iluminam chamados "pixels". Considere que uma tela retangular tenha 1200 pixels na horizontal e 800 pixels na vertical. Um "bug" inicia sua trajetória na tela a partir

da margem esquerda a 80 pixels da base e, ao fim de cada segundo, ela caminha 6 pixels na horizontal para a direita, e 4 na vertical para cima.

(a) Com base nessas informações complete a tabela:

Instante	0	1	2	3	4	5	...	s	...
Horizontal	0	6	12				...		...
Vertical	80	84					...		...

- (b) Determinar a posição do "bug" nos instantes 20s, 25s, 50s.
- (c) Determinar em que instante o "bug" sai da tela.
- (d) Determinar a posição em que o "bug" sai da tela.
- (e) Expresse a posição do "bug" em função do tempo s .
51. Considere que no caso do exercício anterior, no mesmo instante em que o "bug" entra pelo lado esquerdo da tela "mug", um outro "bicho informático", inicia seu passeio pela tela pelo lado direito a 100 pixels da base e que ao fim de cada segundo ele se desloque 6 pixels na horizontal para a esquerda e 2 pixels na vertical para cima.
- (a) Faça uma tabela indicando a posição do "mug" a cada segundo;
- (b) Determine a posição do "mug" nos instantes 20 s, 35 s e 50 s.
- (c) Determine o instante em que o "mug" deixa a tela.
- (d) Determine o ponto em que isso ocorre.
- (e) Determine o ponto de cruzamento das trajetórias do "bug" e do "mug".
- (f) Haverá encontro do "bug" com o "mug"?
- (g) Encontre uma expressão para a posição do "mug" em função do tempo s .
52. Tico e Teco, torcedores fanáticos de certo time da capital, ganharam de seus tios uns cofrinhos na forma de porquinhos. No de Tico havia R\$30,00 e no de Teco R\$ 50,00. Os moleques resolveram guardar parte da mesada semanal. Tico prometeu guardar R\$ 5,00 por semana e Teco, R\$ 3,00.
- (a) Faça uma tabela representando a situação semanal das mesadas de Tico e Teco.
- (b) Determinar as quantias nos cofrinhos em 20 semanas.
- (c) Quando terão quantias iguais?
- (d) Em que semana Tico terá R\$ 12,00 a mais que Teco?
- (e) Em que semana Teco terá R\$ 12,00 a mais que Tico?
- (f) Em que momento Tico terá o dobro da quantia de Teco?
- (g) Expresse a quantia guardada pelo Tico em função do número n de semanas.
- (h) Expresse a quantia guardada pelo Teco em função do número n de semanas.

53. Calcular $f(a)$ sabendo que:

a) $a = -1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $a = 0$ e $f(x) = \frac{x^3 - 1}{1 - x^2}$

c) $a = \frac{7}{2}$ e $f(x) = \frac{2}{x}$

d) $a = 1$ e $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 5x + 1}$

54. Se $f(x) = x^3 + 4x - 3$, calcule $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(\sqrt{2})$.

55. Seja $g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$, calcule:

(a) $g\left(\frac{1}{a}\right)$ (b) $\frac{1}{g(a)}$ (c) $g(a^2)$ (d) $[g(a)]^2$ (e) $g(\sqrt{a})$ (f) $\sqrt{g(a)}$

56. Calcular $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, fazendo as simplificações possíveis, supondo que $x \neq a$, em cada um dos itens a seguir:

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 4x^4$

57. Se $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ calcular:

a) $f(-x)$

b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$

d) $f(f(x))$

58. Determine o domínio das seguintes funções

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$

b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{-x+2}{x+1}}$

d) $f(x) = 4\sqrt{\frac{-8x+12}{x+5}}$

e) $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{x-x^3}$

g) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

h) $\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x+1}}$

59. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$. Determine o domínio A para as seguintes funções:

a) $f(x) = 3x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

c) $f(x) = \frac{2x-5}{1-x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

e) $f(x) = |3-x| - 1$

f) $\sqrt{\frac{x}{10}}$

60. Seja $f : A \rightarrow [0, 1]$. Determine o domínio A , quando f é dada por:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

c) $f(x) = -x^2 + x + 2$

d) $f(x) = \frac{1-x}{3-x}$

61. As funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Explique.

62. As funções f e g , cujas regras são dadas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

podem ser iguais? Explique.

63. As funções f e g , definidas de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$ em $\mathbb{R}$, são dadas pelas regras:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

Elas são iguais? Explique.

64. As funções

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2-1}{x-1} \end{array}$$

são iguais? Explique.

65. Construir o gráfico e determinar o conjunto imagem das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -2 & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ 3 & \text{se } x = -2 \end{cases}$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 9 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ -1 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ -1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} -|x+2| & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 - 4x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -4 & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

66. Em cada item a seguir escrevemos abreviadamente $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Verificar se o conjunto dado pode ser o gráfico de uma função $y = f(x)$. Em caso afirmativo, explicitá-la:

- a) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y = 1\}$ b) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$
c) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$ d) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^3\}$
e) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 4y = -4\}$ f) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$

67. Usando, por exemplo, o DESMOS² obtenha o gráfico das funções a seguir:

- (a) $f(x) = ax + b$ para diferentes valores das constantes a e b
(b) $f(x) = x^2$
(c) $f(x) = \sqrt{x}$
(d) $y = \frac{1}{x}$
(e) $f(x) = |x|$

68. Esboçar o gráfico das seguintes funções (pode usar o DESMOS)

- (a) $f(x) = 4 - x^2$ (b) $g(t) = -1$ (c) $f(s) = -\frac{1}{s}$
(d) $f(x) = x(1 - x)$ (e) $h(x) = \sqrt{x-1}$ (f) $h(z) = |1 - z|$
(g) $g(x) = |1 - x^2|$ (h) $f(t) = |t^2 - 2t - 3|$ (i) $f(t) = t^2 - 2|t| - 3$
(j) $f(t) = |t^2 - 2|t| - 3|$ (k) $f(x) = |2x - 1|$ (l) $f(x) = |1 - |1 - x||$

69. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostre que $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{f(a)}{a^2}$

²Esse *software* para construção de gráficos está disponível gratuitamente em <https://www.desmos.com/calculator>.

70. Se $f(x) = ax + b$ mostre que vale $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.
71. Se $f(x) = x^2$ mostre que $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.
72. Uma função f com domínio $A \subset \mathbb{R}$ é *par* se $f(-a) = f(a)$ para todo a em A tal que $-a \in A$, e *Ímpar* se $f(-a) = -f(a)$. Determine em cada alternativa abaixo se f é par, Ímpar, ou nem par nem Ímpar.
- (a) $f(x) = 3x^3 - 4x$ (b) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$ (c) $f(x) = 9 - 5x^2$
 (d) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$ (e) $f(x) = -2$ (f) $f(x) = 2x^3 + x^2$
 (g) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ (h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ (i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$
 (j) $f(x) = |x| + 5$ (k) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ (l) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
73. Dada uma função qualquer f , definida em toda a reta (ou num intervalo $] - a, a[$), mostre que a função $g(x) = f(x) + f(-x)$ é par.
74. Uma função f é dita *aditiva* se o domínio de f é $\mathbb{R}$ e $f(a + b) = f(a) + f(b)$ é verdadeiro para todos os números reais a e b .
- (a) Dê um exemplo de função aditiva.
 (b) Dê um exemplo de função não-aditiva.
 (c) Mostre que se f é uma função aditiva, então $f(0) = 0$.
 (d) Mostre que uma função aditiva deve satisfazer a $f(-x) = -f(x)$.
75. Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ considere as funções $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que p é par e que q é Ímpar.
76. Seja f a função definida pela equação $y = x + \frac{1}{x}$.
- (a) Qual o domínio de f ?
 (b) Qual a imagem de f ?
 (c) Esboce o gráfico de f .
 (d) Quais dos seguintes pontos pertencem ao gráfico de f : $(-1, -2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(-2, -5/2)$, $(3, 7/2)$?

Módulo 3 - Funções Injetoras, Sobrejetoras e Inversas

77. Nas funções seguintes classifique em: injetora; sobrejetora; bijetora; não é nem injetora nem sobrejetora.

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$
- (b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$
- (c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$
- (d) $m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$
- (e) $p: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \frac{1}{x}$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$)
- (f) $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$
- (g) $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $r(x) = |x|(x - 1)$

78. Para cada uma das funções a seguir, obtenha a expressão para a sua inversa.

- (a) $f(x) = 2x + 3$; (b) $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$ (c) $f(x) = \frac{1}{x}$
- (d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; (e) $f(x) = \sqrt{x-4}$ (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
- (g) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ (h) $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ (i) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

79. Seja $f(x)$ a temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) quando a coluna de mercúrio de um dado termômetro mede x centímetros. Em termos práticos, qual é o significado de $f^{-1}(C)$?

80. Nos itens a seguir, decida se a função f é inversível ou não:

- (a) $f(d)$ é o total de litros de combustível consumido por um avião ao final de d minutos de um determinado voo.
- (b) $f(t)$ é o número de clientes presentes nas Lojas Americanas, t minutos após o meio-dia de 29 de março de 2006.
- (c) $f(x)$ é o volume, em litros, de x quilogramas de água a 4°C .
- (d) $f(w)$ é o custo, em reais, de se remeter uma carta que pesa w gramas.
- (e) $f(n)$ é o número de alunos de uma turma de Cálculo, cujos aniversários caem no n -ésimo dia do ano.

81. Faça uma tabela para os valores de f^{-1} , onde a f é dada abaixo. O domínio de f são os naturais de 1 a 7. Especifique o domínio de f^{-1} .

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	3	-7	19	4	178	2	1

82. A função $f(x) = x^3 + x + 1$ é inversível. Utilizando uma calculadora gráfica, ou um computador, determine o valor aproximado de $f^{-1}(20)$.
83. Utilizando um computador, ou uma calculadora gráfica, trace o gráfico das seguintes funções, e decida se elas são ou não inversíveis.
- a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ b) $f(x) = x^3 - 5x + 10$ c) $f(x) = x^3 + 5x + 10$
84. Seja $f :]-\infty, -1] \rightarrow [1, +\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ qual o valor do domínio de f^{-1} com imagem 3?
85. Determine a função inversa de cada uma das funções abaixo.
- (a) $f(x) = 8 + 11x$ (b) $f(x) = 2x^3 - 5$ (c) $f(x) = 7 - 3x^3$
 (d) $f(x) = x$ (e) $f(x) = (x^3 + 8)^5$ (f) $f(x) = x^{1/3} + 2$
86. Seja f a função definida por $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $x \geq 0$. Mostre que f é a sua própria inversa.
87. Seja $f : A \rightarrow [-9, -1[$ dada por $f(x) = \frac{3 + 4x}{3 - x}$. Pede-se:
- (a) Determinar A .
 (b) Mostrar que f é injetora.
 (c) Verificar se f é sobrejetora.
88. Seja $f : A \rightarrow]1, 10]$ dada por $f(x) = \frac{4 - 11x}{4 - 2x}$. Pede-se:
- (a) Determinar A .
 (b) Mostrar que f é injetora.
 (c) Verificar se f é sobrejetora.
89. Seja $f : A \rightarrow]-4, 1]$ dada por $f(x) = \frac{10 + 3x}{10 - 2x}$. Pede-se:
- (a) Determinar A .
 (b) Mostrar que f é injetora.
 (c) Verificar se f é sobrejetora.
90. Suponha que f é inversível e crescente. O que se pode dizer a respeito de sua inversa ser crescente ou decrescente?
91. Se uma função f é inversível e côncava para cima, o que se pode dizer a respeito da concavidade de sua inversa?

92. Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, onde $x \geq 1$, obter uma expressão para sua inversa, o domínio dessa inversa e representar f e f^{-1} graficamente.

93. Dada a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$, $x \neq 1$, determinar:

(a) Sua função inversa f^{-1}

(b) O conjunto $\text{Im}(f)$.

94. Dada a função $f(x) = \frac{9 - x^2}{4 - x^2}$, $x \geq 0$, pede-se:

(a) Mostrar que f é injetora.

(b) Determinar a função inversa f^{-1} .

(c) Determinar o conjunto $\text{Im}(f)$.

95. Determinar, se existir, a função inversa de cada uma das funções a seguir:

(a) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$, onde $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$.

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, onde $x \in]-\infty, -2[$.

(c) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, onde $x \in [-2, 1]$.

96. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ |x| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

verificar se ela é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa.

97. A função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ admite inversa?

Módulo 4 - A Família das Funções do 1º Grau

98. Se $f(x) = 4x - 3$ mostre que $f(2x) = 2f(x) + 3$.

99. Se $f(x) = ax$ mostre que $f(x) + f(1 - x) = f(1)$ para todo x real. Mostre também que $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ quaisquer que sejam os números reais x_1 e x_2 .

100. Encontre a inclinação e a intersecção vertical da reta cuja equação é $2y + 5x - 8 = 0$.

101. Em cada item a seguir encontre a equação da reta que passa pelo par de pontos
- (a) (3,2) e (-2,4) (b) (1,1) e (2,-2)
 (c) (-3,-3) e (4,9) (d) (-1,-3) e (-2,5)
 (e) (0,0) e (3,2) (f) (5,0) e (0,5)
 (g) (-2,-3) e (5,-7) (h) $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$
 (i) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
102. Nos itens de (a) a (d) encontre os valores de x para os quais a inclinação da reta ligando os dois pontos dados:
- (i) é zero (ii) não existe (iii) é positivo (iv) é negativo
- (a) (2,3) e (x,5) (b) (6,-1) e (3,x)
 (c) (4,x) e (x,2) (d) $(-6, x^2)$ e $(x^2, -2)$
103. Determine se a reta passando pelos dois primeiros pontos é paralela à reta passando pelos dois últimos
- (a) (6,2) e (0,2); (5,1) e (12,10) (b) (-2,-4) e (-4,1); (7,4) e (-3,19)
 (c) (6,-1) e (11,1); (5,-2) e (20,4) (d) (-1,4) e (7,1); (4,2) e (15,-2)
104. Nos itens a seguir encontre a equação da reta que possui inclinação m , e que passa pelo ponto dado.
- (a) $m = \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{3}, 3\right)$ (b) (-2,5), $m = -\frac{2}{3}$
 (c) $m = 1, (-4, -3)$ (d) $m = -1, (-3, -3)$
 (e) (0,3), $m = -2$ (f) (3,0), $m = 2$
 (g) (-4,3), $m = 0$ (h) (1,-3), $m = 0$
105. Nos itens a seguir determine a inclinação e as intersecções com os eixos x e y das funções definidas pelos gráficos:
- (a) $\{(x, y) \mid 3x + 4y - 6 = 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid x - 2y + 4 = 0\}$
 (c) $\{(x, y) \mid -4x + 5y + 12 = 0\}$ (d) $\{(x, y) \mid 2y + y = 0\}$
106. O gráfico de uma função linear, f , tem coeficiente angular $m = 2$. Se $(-1, 3)$ e $(c, -2)$ pertencem ambos ao gráfico de f , encontre o número c .
107. Nos problemas a seguir, determine o ponto de intersecção das duas retas, se existir, e desenhe os gráficos em cada situação.
- (a) $3x + y - 1 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$
 (b) $-2x + 3y - 6 = 0$ e $-2x + 3y + 3 = 0$
 (c) $-2x + 5y + 30 = 0$ e $5x + 2y - 2 = 0$

- (d) $-x + y - 2 = 0$ e $x + y - 2 = 0$
- (e) $y - 3x = 0$ e $y - 3x + 1 = 0$
- (f) $y + x + 1 = 0$ e $2y + 2x + 1 = 0$

108. (a) Qual a equação da reta que passa pelos pontos $(0, 3)$ e $(5, 0)$.
 (b) Mostre que a equação da reta que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(a, 0)$ pode ser escrita na forma (chamada forma *segmentária*):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \cdot b \neq 0)$$

109. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(2, 1)$ e que é perpendicular à reta $y = 5x + 3$.

110. Encontre a equação das retas paralela e perpendicular à reta $y + 4x = 7$ e que passa pelo ponto $(1, 5)$.

111. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x - 1}{4}$. Para que valores do domínio a imagem é menor que 4?

112. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$ é negativa?

113. O custo de uma plantação é, normalmente, uma função do número de hectares semeado. O custo do equipamento é um *custo fixo*, pois tem que ser pago independentemente do número de hectares plantado. O custo de suprimentos e mão-de-obra varia com o número de hectares plantados e são chamados de *custos variáveis*. Suponha que os custos fixos sejam de R\$ 10.000,00 e os custos variáveis de R\$ 200,00 por hectare. Seja C o custo total, calculado em milhares de reais, e x o número de hectares plantados.

- (a) Encontre uma fórmula para C em função de x .
- (b) Esboce o gráfico de C versus x .
- (c) Explique como você pode visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico.

114. Pimentas picantes foram graduadas de acordo com as unidades de Scoville, em que o nível máximo de tolerância humana é de 14.000 Scovilles por prato. O Restaurante Costa Oeste, conhecido por seus pratos picantes, promete um prato especial do dia, que irá satisfazer ao mais ávido aficcionado por pratos apimentados. O restaurante importa pimentas indianas, graduadas em 1.200 Scovilles cada, e pimentas mexicanas, com uma graduação de 900 Scovilles cada.

- (a) Determine a equação de restrição de Scoville, relacionando o número máximo de pimentas indianas e mexicanas que o restaurante deve utilizar na composição do prato especial.

- (b) Resolva a equação da parte (a) obtenha, explicitamente, o número de pimentas indianas usadas nos pratos mais picantes em função do número de pimentas mexicanas.

115. Um corpo de massa m está caindo com velocidade v . A segunda Lei de Newton do Movimento $F = ma$, estabelece que a força resultante, F , com sentido para baixo, é proporcional à sua aceleração, a . A força resultante, F , é composta pela Força de gravidade F_g , que age para baixo, menos a força de resistência do ar F_r , que age para cima. A força devida à gravidade é mg , onde g é uma constante. Suponha que a resistência do ar seja proporcional à velocidade do corpo.

- (a) Obtenha uma expressão para a força resultante F , em função da velocidade v .
(b) Obtenha uma fórmula, dando a em função de v .
(c) Esboce o gráfico de a versus v .

116. Encontre o comprimento do segmento da reta $3x + 4y = -12$ que está entre as intersecções horizontal e vertical.

117. Três operários trabalhando 8 horas por dia, constroem um muro de 30 m em cinco dias. Quantos dias serão necessários para que cinco operários, trabalhando 6 horas por dia, construam um muro de 75 m?

118. Numa fotocopiadora consta a seguinte tabela de preços:

Nº de cópias	preço por cópia
de 1 a 99	0,15
de 100 a 999	0,12
1000 ou mais	0,10

- (a) Qual o custo de 99 cópias?
(b) Qual o custo de 101 cópias?
(c) Qual o custo de 999 cópias?
(d) Qual o custo de 1001 cópias?
(e) Esboce um gráfico representado o custo C em função do número n de cópias
(f) Que observações você faz sobre uma regra de preços como a proposta pela tabela acima? Como você corrige a tabela para evitar distorções?

119. Valores correspondentes a p e q são dados na tabela a seguir:

p	1	2	3	4
q	950	900	850	800

- (a) Determine q como uma função linear de p .

(b) Determine q como função linear de p .

120. Uma função linear foi utilizada para gerar os valores da tabela a seguir. Encontre esta função.

x	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
y	27,8	29,2	30,6	32,0	33,4

121. Um carro a 112 km/h necessita de 54 metros para parar. Supondo que a distância, até parar, é proporcional ao quadrado da velocidade, calcule as distâncias, até parar, deste mesmo carro, a velocidades de 56 km/h e 224 km/h.

122. A Lei de Poiseuille fornece a taxa de fluxo, R , de um gás, através de um tubo cilíndrico em função do raio r , do tubo, para uma dada pressão. Assuma uma queda constante de pressão ao longo do restante deste problema.

- (a) Determine uma fórmula para a Lei de Poiseuille, dado que a taxa de fluxo é proporcional à quarta potência do raio.
- (b) Se $R = 400 \text{ cm}^3/\text{s}$ em um tubo com raio 3 cm, para um certo gás, determine uma fórmula explícita para a taxa de fluxo deste gás, através de um tubo de r centímetros.
- (c) Qual a taxa de fluxo do mesmo gás, através de um tubo com raio 5 cm?

Módulo 5 - Funções Quadráticas

123. Fatore as seguintes expressões quadráticas

- (a) $x^2 - 3x$ e $2x^2 + x$
- (b) $\pi x^2 + 3\pi$ e $17x^2 + 51x$
- (c) $\sqrt{2}x^2 + 2x$ e $\sqrt{\pi}x^2 - \pi$
- (d) $x^2 - 9$ e $x^2 - 49$
- (e) $x^2 - 3$ e $x^2 - 1$
- (f) $x^2 - 2$ e $x^2 - \pi$
- (g) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ e $x^2 + x + 6$
- (h) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ e $x^2 - x - 6$
- (i) $x^2 - 2x + 3$ e $x^2 - 3x - 40$
- (j) $3x^2 - 5x - 2$ e $8x + 2x - 1$
- (k) $2x^2 - 5bx - 3b^2$ e $x^2 - 4x - 21$
- (l) $x^4 - 2x^2 + 1$ e $x^6 - 4x^3 - 21$

124. Utilizando uma calculadora gráfica, ou um computador, estude o comportamento do gráfico de $p(x) = ax^2 + bx + c$ nas seguintes situações:

- (a) Dê valores fixos para b e c (por exemplo, $b = 1$ e $c = 2$) e varie a . Fazendo isso, o que acontece com o gráfico de $p(x)$?
- (b) Dê valores fixos para a e b (por exemplo, $b = 3$ e $b = 5$) e varie c . Descreva o que acontece com o gráfico de $p(x)$.

(c) Dê valores fixos para a e c (por exemplo, $a = 2$ e $c = 3$) e varie b . Descreva o que acontece com o gráfico de $p(x)$.

125. Observe como fazemos para completar os quadrados das funções $p(x) = x^2 + 2x + 10$ e $q(x) = x^2 - x$.

$$\begin{array}{ll} p(x) = x^2 + 2x + 10 & p(x) = x^2 - x \\ p(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 + 10 & p(x) = x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ p(x) = (x + 1)^2 + 9 & p(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ & p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{array}$$

Utilize essa ideia para completar os quadrados das funções:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} p(x) = x^2 + 5x + 2 & \text{(b)} p(x) = x^2 + 3x + 1 \\ \text{(c)} p(t) = -3t^2 - 5t + 1 & \text{(d)} p(t) = t^2 - 2t \\ \text{(e)} p(x) = x^2 + 3x & \text{(f)} p(x) = x^2 + 4x - 3 \\ \text{(g)} p(x) = 4x^2 + 12x + 10 & \text{(h)} p(x) = -16x^2 + 6x \\ \text{(i)} p(x) = x^2 + 4b + c & \text{(j)} p(x) = ax^2 + ax + b \\ \text{(k)} p(x) = \pi(x^2 - 2x) & \text{(l)} p(x) = 24(-x^2 - 3x + 1) \end{array}$$

126. Resolva as seguintes equações completando os quadrados:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} 3x^2 + 6x - 1 = 0 & \text{(b)} 3x(3x - 2) = 6x - 5 \\ \text{(c)} y^2 - 15y - 4 = 0 & \text{(d)} 6u^2 + 7u - 3 = 0 \\ \text{(e)} x^2 - 2x + 9 = 0 & \text{(f)} 4z^2 - 4z - 1 = 0 \\ \text{(g)} p(2p - 4) = 5 & \text{(h)} (x - 2)^2 + 3x - 5 = 0 \\ \text{(i)} (3x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 0 & \text{(j)} 5y^2 - 15y + 9 = 0 \end{array}$$

127. Deduza a fórmula para a solução da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

128. Use a fórmula para a solução da equação quadrática para resolver as seguintes equações:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} 5x^2 + 6x - 1 = 0 & \text{(b)} 2x^2 = 18x + 5 \\ \text{(c)} x(2x - 3) = 2x - 6 & \text{(d)} 6x^2 - 7x + 2 = 0 \\ \text{(e)} 2x^2 = 13(x - 1) + 3 & \text{(f)} 2x^2 - 6x - 1 = 0 \\ \text{(g)} 1200y^2 = 10y + 1 & \text{(h)} x^2 + 2bx - c^2 = 0 \\ \text{(i)} x^2 - 6ax + 3a^2 = 0 & \text{(j)} \pi u^2 + (\pi^2 - 1)u - \pi = 0 \\ \text{(k)} x(x - \sqrt{2} + 4) = 4(x + 1) & \text{(l)} 3x^2 = 5(x - 1)^2 \end{array}$$

129. Determine o valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq b\}$ de modo que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.

130. Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ de modo que a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.

131. Dada a função quadrática $p(x) = ax^2 + bx + c$, prove que as coordenadas (x_v, y_v) do vértice da parábola são dadas por

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o *discriminante* de $p(x) = 0$.

132. Determinar os vértices e a imagem das parábolas

(a) $y = 4x^2 - 4$

(b) $y = -x^2 + 3x$

(c) $y = 2x^2 - 5x + 2$

(d) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(e) $y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$

(f) $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$

133. Qual deve ser o valor de c para que o vértice da parábola $y = x^2 - 8x + c$ esteja sobre o eixo dos x ?

134. Qual deve ser o valor de k para que $y = 2x^2 - kx + 8$ tenha duas raízes reais e iguais?

135. Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$ determine aqueles cujo produto é máximo.

136. Dentre todos os números de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mania.

137. Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice sobre a reta $y = -4x + 5$.

138. Um arame de comprimento ℓ deve ser cortado em dois pedaços. Um pedaço será usado para formar um círculo, e outro, um quadrado. Onde se deve cortar o arame, para que as áreas das figuras sejam as maiores possíveis?

139. Em uma reação química, um *catalisador* é uma substância que acelera a reação mas que, ela mesma, não sofre transformação. Se o produto de uma reação é um catalisador, a reação é chamada de *autocatalítica*. Suponha que a taxa, r , de uma dada reação autocatalítica é proporcional à quantidade da substância original que ainda permanece vezes a quantidade de produto, p , produzido. Se a quantidade inicial da substância original é A e a quantidade que ainda permanece é $A - p$:

(a) Exprima r em função de p .

(b) Qual é o valor de p quando a reação está ocorrendo de forma mais rápida?

140. Para as seguintes funções f , encontre o discriminante de $f(x) = 0$ e determine se as razões são reais e diferentes, reais e iguais, ou não existem. Esboce o gráfico de $f(x)$ sem desenhar mais de quatro pontos.

(a) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

(b) $f(x) = z^2 + z + 1$

(c) $f(x) = 4x^2 - x - 5$

(d) $f(x) = 7x^2 - 5x - 2$

(e) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{4}$

(f) $f(x) = x^2 - ax - 1$

(g) $f(x) = 3x^2 + \pi x + 4$

(h) $f(x) = x^2 - 2ax + a^2$

(i) $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3}$

(j) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

141. Determine os valores de K para os quais as equações tem razões reais e iguais.

(a) $5x^2 - 4x - (5 + K) = 0$

(b) $(K + 2)x^2 + 3x + (K + 3) = 0$

(c) $x^2 + 3 - K(2x - 2) = 0$

(d) $(K + 2)x^2 + 5Kx - 2 = 0$

(e) $x^2 - x(2 + 3K) + 7 = 0$

(f) $(K - 1)x^2 + 2x + (K + 1) = 0$

142. Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

143. Determinar os valores de m para que a equação do segundo grau $(m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes reais.

144. Determinar os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + (m + 1)$ tenha um zero real duplo.

145. Determinar os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ não tenha raízes reais.

146. Prove as *relações de Girard* para equações do segundo grau: se $ax^2 + bx + c = 0$ possui razões x_1 e x_2 , então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

147. Mostre que uma equação do segundo grau que tem x_1 e x_2 como razões é a equação $x^2 - Sx + P = 0$, onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

148. Obtenha uma equação do segundo grau que possua as razões:

(a) 2 e 3

(b) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

(c) 0,4 e 5

(d) 1 e $-\sqrt{2}$

(e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

149. Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ de modo que se tenha $\text{Im}(f) = [2, +\infty[$.
150. Cada uma das expressões a seguir pode ser escrita na forma $\sqrt{a}\sqrt{c^2 \pm (dx + b)^2}$, sendo que c é uma fração. Observe como fazemos isso para $\sqrt{-4x^2 + x}$. Chamando $q(x) = -4x^2 + x$ temos:

$$q(x) = -4\left(x^2 - \frac{x}{4}\right)$$

$$q(x) = -4\left(x^2 - 2\left(\frac{1}{8}\right)x + \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2\right)$$

$$q(x) = -4\left(\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64}\right)$$

$$q(x) = 4\left(\frac{1}{64} - \left(x - \frac{1}{8}\right)^2\right) \text{ já que } -4 = (-1) \cdot 4$$

$$\sqrt{q(x)} = 2\sqrt{\frac{1}{64} - \left(x - \frac{1}{8}\right)^2}$$

$$\sqrt{q(x)} = 2\sqrt{\frac{1 - 64\left(x - \frac{1}{8}\right)^2}{64}}$$

$$\sqrt{q(x)} = \frac{1}{4}\sqrt{1 - 64\left(x - \frac{1}{8}\right)^2}$$

$$\sqrt{q(x)} = \frac{1}{4}\sqrt{1 - \left(8\left(x - \frac{1}{8}\right)\right)^2}$$

$$\sqrt{q(x)} = \frac{1}{4}\sqrt{1 - (8x - 1)^2}$$

Utilize essa ideia nos itens a seguir:

(a) $\sqrt{x^2 + 3x + 1}$

(b) $\sqrt{-3t^2 + 5t + 1}$

(c) $\sqrt{x^2 + 3x}$

(d) $\sqrt{-16x^2 + 6x}$

(e) $\sqrt{-x^2 + x + 1}$

(f) $\sqrt{-x^2 + 2x - 4}$

(g) $\sqrt{6x - 4x^2}$

(h) $\sqrt{4x - x^2}$

(i) $\sqrt{6 + x - 2x^2}$

(j) $\sqrt{-x^2 - 2x + 8}$

(k) $\sqrt{9x - 4x^2}$

151. Dada a função quadrática $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$, prove que:
- Se $b > 0$ o gráfico de $p(x)$ corta o eixo dos y com a parte crescente.
 - Se $b < 0$ o gráfico de $p(x)$ corta o eixo dos y com a parte decrescente.
152. Considere o Polinômio $f(n) = n^2 + n + 41$. Observe que $f(1) = 43$ é primo, $f(2) = 47$ é primo, $f(3) = 53$ é primo. Será que para todos os números $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ será um número primo? Prove ou “desprove” esta afirmação.
153. Prove que somando-se 1 ao produto de quatro números naturais consecutivos o resultado será sempre um quadrado perfeito.

154. Suponha que a , b e c sejam constantes com $a > 0$. Seja f a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $x \geq \frac{-b}{2a}$. Mostre que a função inversa é dada por $f^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a}$ para $x \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$.
155. A medida que a altura referente ao nível do mar aumenta, o peso de um astronauta diminui até atingir a imponderabilidade. Se o peso w do astronauta a altura x km acima do nível do mar é dado pela expressão $w = p \left(\frac{6400}{x + 6400} \right)^2$, onde p é o peso do astronauta ao nível do mar, a que altitude seu peso é inferior a $0,1p$?
156. Se a distância de frenagem d (em metros) de um carro a velocidade de c km/h é dada, aproximadamente, por $d = v + \frac{v^2}{20}$, para quais velocidades o espaço de frenagem é inferior a 20 m?
157. Para que um medicamento faça o efeito desejado a sua concentração na corrente sanguínea deve ser acima do nível terapêutico mínimo. Se a concentração c desse medicamento t horas após ser ingerido é dada por $c = \frac{20t}{t^2 + 4}$ mg/L e o seu nível terapêutico mínimo é 40 mg/L, determine a partir de que instante esse nível é excedido.
158. Considerando que a resistência elétrica R (em Ohms) para um fio de metal puro está relacionado com a temperatura T (em $^{\circ}\text{C}$) pela fórmula $R = R_0(1 + \alpha T)$ onde α , R_0 são constantes positivas. Pede-se:
- Para que temperatura se tem que $R = R_0$
 - Se a resistência é considerada 0 para $T = -273^{\circ}\text{C}$, determine o valor de α
 - Se a prata tem resistência 1,25 ohms a 0°C a que temperatura sua resistência atinge 2,0 ohms?
159. As dosagens para adultos e para crianças devem ser especificadas nos produtos farmacêuticos. Duas das fórmulas para se especificar as dosagens para crianças a partir das dosagens para adultos são a de Cowling, dada por $y = \frac{1}{24}(t + 1)\alpha$ e a de Friend, dada por $y = \frac{2}{25}t\alpha$ onde α representa a dosagem para adulto, em mg, e t representa a idade da criança, em anos.
- Se $\alpha = 100$ mg, represente graficamente as expressões das dosagens infantis usando as fórmulas de Cowling e de Friend.
 - Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?
160. O IMC (Índice de Massa Corporal) é definido como:

$$\phi = \frac{\text{massa}}{(\text{altura})^2}$$

Uma pessoa é considerada obesa quando o Índice é maior que 30. Segundo dados publicados na revista *Veja* de 12/01/2004, dos obesos brasileiros 13% são mulheres, 7% homens e 15% são crianças. Pelo critério anterior você se considera obeso? A partir de que peso você passaria a ser considerado obeso? A partir de que altura uma pessoa de 100 kg deixa de ser considerada obesa? Uma pessoa de 1,75 m passa a ser considerada obesa a partir de quantos quilos?

161. Expresse o volume C do tronco de um cone reto de altura h e raio base r em termos de h e r .
162. Expresse o volume C de um cilindro reto de altura x inscrito no cone reto de altura h e raio da base r .