# Funções 2025 - Segunda Lista de Exercícios

## Módulo 1 - Exponenciais e Potências

1. Nos itens a seguir escreva a expressão dada na forma $p/q$, onde $p$ e $q$ são números inteiros. Por exemplo:

$$4^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

a) $\dfrac{3^{-2}}{2^{-3}}$ b) $\dfrac{1}{2^{-1}}$ c) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}$ d) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

e) $\dfrac{2^0}{3^{-2}}$ f) $\dfrac{5^{-1}}{3^{-2}}$ g) $(-8)^{-\frac{1}{3}}$ h) $16^{-\frac{1}{4}}$

i) $3^{-2} + 3$ j) $5^{-1} + 25^0$ k) $16^{-\frac{1}{2}} - 16^{-\frac{1}{4}}$ l) $8^{-\frac{1}{3}} - 2^0$

m) $\dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{8^{-\frac{2}{3}}}$ n) $4^{-1} + 3^{-1}$ o) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}$

2. Assuma que todas as variáveis representam número reais positivos somente. Escreva cada uma das seguintes expressões como um produto ou quociente de potências onde cada variável apareça uma única vez, e todos os expoentes são positivos. Veja o exemplo:

$$\left(\frac{x^{-1}y^2z^0}{x^3y^{-4}z^2}\right)^{-1} = \frac{x^3y^{-4}z^2}{x^{-1}y^2z^0} = \frac{x^4z^2}{y^6}$$

a) $x^{-3}x^5$ b) $(x^2y^{-3})^{-1}$ c) $\dfrac{x^5}{x^{-2}}$ d) $(x^{-3})^2$

e) $(x^{\frac{1}{2}})^{-3}$ f) $(x^3)^{-\frac{1}{3}}$ g) $(x^2y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ h) $(x^3y^{-2})^{-\frac{1}{6}}$

i) $(x^{-2}y^3)^0$ j) $\dfrac{x^{-1}}{y^{-1}}$ k) $\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}$ l) $\dfrac{a^2x^{-3}}{b^2y^{-2}}$

m) $\dfrac{a^{-2}b^{-2}c}{ab^{-3}c^0}$ n) $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{2x^0y^{-5}}\right)^{-2}$ o) $\left(\dfrac{a^{-1}b^{-2}}{3^0ab}\right)^{-1}$

3. Nos itens a seguir, escreva a expressão dada como uma fração simples, envolvendo somente expoentes positivos. Assuma que todas as variáveis representam números reais positivos somente.

a) $x^{-1}+y^{-1}$ b) $x^{-1}-y^{-1}$ c) $\dfrac{x+(xy)^{-1}}{x}$ d) $x^{-1}+y^{-2}$

e) $(x^{-1}+x^{-2})^{-1}$ f) $x^{-1}+\dfrac{1}{x^{-1}}$ g) $a^{-2}+b^{-2}$ h) $\dfrac{x^{-1}}{y^{1}}+\dfrac{y}{x}$

i) $\dfrac{r}{s^{-1}}+\dfrac{r^{-1}}{s}$ j) $(x+y)^{-1}$ k) $(a-b)^{-2}$ l) $xy^{-1}+x^{-1}y$

m) $x^{-1}y-xy^{-1}$ n) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}}$ o) $\dfrac{a}{b^{-1}}+\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ p) $(x^{-1}-y^{-1})^{-1}$

q) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$ r) $\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$

4. Nos problemas a seguir calcule o fator $A$. Por exemplo, se $y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=Ay^{-\frac{1}{2}}$ encontramos $A=1+y$. Confira:

$$Ay^{-\frac{1}{2}}=(1+y)y^{-\frac{1}{2}}=y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}.$$

a) $y^{\frac{3}{4}}=Ay^{\frac{1}{4}}$ b) $x^{\frac{3}{5}}=Ax^{\frac{1}{5}}$ c) $x^{-\frac{1}{3}}=Ay^{-\frac{2}{3}}$

d) $y^{-\frac{1}{4}}=Ay$ e) $x^{\frac{2}{3}}+x=Ax$ f) $y^{\frac{1}{2}}+y=Ay$

g) $x-x^{\frac{2}{3}}=Ax^{\frac{1}{3}}$ h) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}=Aa$ i) $x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}=Ax^{\frac{3}{2}}$

j) $x^{-\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=Ax^{-\frac{1}{2}}$

5. Nos itens a seguir, encontre uma fórmula que se ajuste às funções representadas pelos dados:

a)

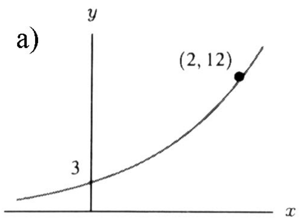
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4,30 | 6,02 | 8,43 | 11,80 |

b)

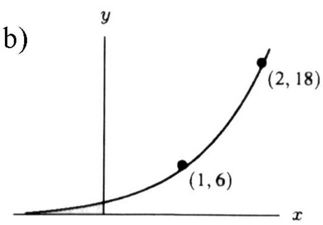
| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | 5,50 | 4,40 | 3,52 | 2,82 |

6. Encontre as funções exponenciais que possuem o seguinte gráfico:

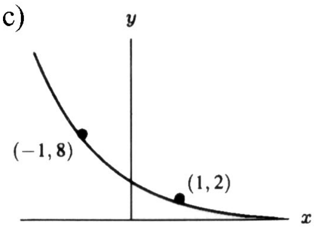
a)



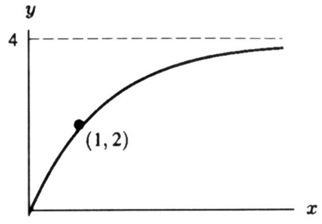

b)



c)




d)




7. A meia-vida do rádio-226 é de 1620 anos.

   (a) Obtenha uma fórmula para a quantidade $Q$ de rádio que resta após $t$ anos, dado que a quantidade inicial é $Q_0$.

   (b) Que percentual da substância resta após 500 anos?

8. Nos Jogos olímpicos de 1968, nos arredores da Cidade do México, houve muita discussão a respeito do efeito da grande altitude (2237 metros) poderia causar aos atletas. Presumindo-se que a pressão atmosférica decaia exponencialmente em 0,4% a cada 30 metros, de que percentual fica reduzida a pressão atmosférica ao se deslocar do mar até a Cidade do México?

9. Uma certa substância radioativa decai exponencialmente de tal modo que, após 10 anos, ainda restam 70% da quantidade inicial. Obtenha uma expressão para a quantidade que ainda resta após um número $t$ qualquer de anos. Que quantidade ainda restará após 50 anos? Qual a meia-vida? Quanto tempo é preciso para que reste somente 20% da quantidade inicial? E para que reste somente 10% ? (Use tentativa e erro onde for necessário.)

10. Escreva cada uma das expressões, a seguir, racionalizando o denominador e simplificando onde seja possível. Por exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y},$$

onde assumimos que $x \neq y$.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$ b) $\dfrac{-4}{1+\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ e) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ f) $\dfrac{\sqrt{x+a}}{1-\sqrt{x+a}}$

g) $\sqrt{x+1} - \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x^2-2} - \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-2}}$

i) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ j) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

11. Esboce os gráficos de $y = x^{1/2}$ e $y = x^{2/3}$ no mesmo sistema de eixos. Qual função tem valores maiores, quando $x \to \infty$?

12. O que acontece com o valor de $y = x^4$ quando $x \to \infty$? E quando $x \to -1$?

13. Faça alguns cálculos usando valores particulares de $x$, para verificar que $y = x^{1/3}$ fica acima de $y = x^{1/2}$ e que $y = x^{1/2}$ fica acima de $y = x$ para $0 < x < 1$.

14. Através de tentativa e erro, use uma calculadora para encontrar, com uma precisão de duas casas decimais, o ponto próximo a $x = 10$ onde $y = 2^x$ e $y = x^3$ se cruzam.

15. Use uma calculadora (ou um software) que faça gráficos, para encontrar o(s) ponto(s) de intersecção dos gráficos de $y = (1,06)^x$ e $y = 1 + x$.

16. Para que valores de $x$ temos $4^x > x^4$?

17. Determine os valores inteiros de $x$ e $y$ que satisfazem a equação $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$.

18. Resolva o seguinte sistema $\begin{cases} 2^{x-2y} &= \dfrac{1}{8} \\ 3^{xy} &= 9 \end{cases}$.

19. Resolva as equações:

a) $(0,533\ldots)^x = \dfrac{225}{64}$ b) $\sqrt[5]{32} = 2$ c) $27 = 3^{5x} \cdot 9^{x^2}$

d) $(0,4)^x + (0,6)^x = 2 \cdot (0,9)^x$ e) $\dfrac{25^x + 125}{6} = 5^{x+1}$ f) $4^{2^{8^x}} = 256$

g) $2^x + \dfrac{4}{2^x} = 5$ h) $\dfrac{625^{1-x} \cdot 5}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x} = \sqrt{5 \cdot 25}$ i) $\dfrac{(11^{3x+1})^2}{11^4} = 11^{10x}$

20. Devido às sementes aperfeiçoadas e às novas técnicas agrícolas, a produção de grãos de uma certa região vem aumentando. Ao longo de um período de 20 anos, a produção anual (em milhões de toneladas) foi a seguinte:

| 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 |
|---|---|---|---|---|
| 5,35 | 5,90 | 6,49 | 7,05 | 7,64 |

No mesmo período, a população (em milhões de habitantes) foi de:

| 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 |
|---|---|---|---|---|
| 53,2 | 56,9 | 60,9 | 65,2 | 69,7 |

(a) Encontre uma função linear ou exponencial que se ajuste, de modo aproximado, a cada conjunto de dados. (Escolha o tipo de função que melhor se ajustar).

(b) Se esta região foi auto-sustentável para este tipo de grão em 1970, ela foi auto-sustentável entre 1970 e 1990? (Ser auto-sustentável significa que cada pessoa tem uma quantidade suficiente de grãos. Como fica a quantidade de grãos por pessoa nos anos seguintes?)

## Módulo 2 - Logaritmos e o número $e$

21. Resolva as seguintes equações. Uma calculadora e o uso de logaritmos pode ser necessário.

a) $4^x = 7$ b) $5^{x+1} = 9$ c) $6^{2x+3} = 354$

d) $x^5 = 873$ e) $x^4 = 687$ f) $x^{7/2} = 51,4$

g) $2 = (1,02)^t$ h) $7 \cdot 3^t = 5 \cdot 2^t$ i) $5,02(1,04)^t = 12,01(1,03)^t$

22. Resolva para $x$:

a) $3^x = 6^{x+3}$ b) $7^x = 2^{2x-1}$ c) $2^{x-1} = 5^{2x+1}$

d) $8^{x+2} = 3^{3x-1}$ e) $y = 2^{3x}$ f) $10y = 10^x$

23. Simplifique o máximo possível as expressões

a) $\log A^2 + \log B - \log A - \log B^2$ b) $\log(10^{x+7})$

c) $10^{\log A^2}$ d) $10^{2\log Q}$

e) $10^{-\log P}$ f) $10^{-(\log B)/2}$

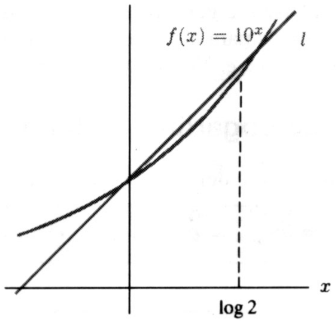
g) $\dfrac{\log A^2 - \log A}{\log B - \frac{1}{2}\log B}$ h) $2\log\alpha - 3\log B - \dfrac{\log\alpha}{2}$

24. Resolva para $x$: (aqui $\log x = \log_{10} x$)

a) $\log(3x-1) - \log(x+2) = 2$ b) $\log(x-\sqrt{6}) + \log(x+\sqrt{6}) = 1$

c) $\log(x^2-1) - \log(x+1) = 1$ d) $\log(x^2-4) - 2\log(x-2) = 2$

25. Encontre a equação da reta $l$, da figura a seguir




26. O *período de duplicação* é o tempo necessário para que uma grandeza que cresce exponencialmente dobrar seu valor. Calcule o período de duplicação de preços que estão subindo a uma taxa de 5% ao ano.

27. A população de uma certa região cresce exponencialmente. Se em 1990 ($t = 0$) havia 40 000 pessoas em uma cidade em 2000 esse número subiu para 46 000 pessoas, encontre uma fórmula para a população em qualquer instante $t$. Qual será a população em 2020? E o período de duplicação?

28. (a) Encontre o período de duplicação $D$, para as seguintes taxas de crescimento anual: $i$%, 2%, 3%, 4% e 5%.

    (b) Como $d$ diminui à medida que $i$ aumenta, poderíamos supor que $D$ é inversamente proporcional à $i$, isto é, que $D = k/i$. Use suas respostas ao item anterior para confirmar que $D = 70/i$, aproximadamente. Esta é a "Regra dos 70" usada pelos banqueiros. Para calcular, de forma aproximada, o período de duplicação de um investimento, o banqueiro divide 70 pela taxa de rendimento anual.

29. A meia-vida de uma substância radioativa é de 12 dias. Se inicialmente existe uma quantidade de 10,32 gramas:

    (a) Obtenha uma equação que dê a quantidade $Q$, da substância, em função do tempo.

    (b) Em quanto tempo a substância ficará reduzida a 1 grama?

30. Dado um número $a > 0$ definimos o *logaritmo de base a*, $\log_a x$, como a função inversa de $a^x$, isto é,

$$\log_a x = c \quad \text{significa} \quad a^c = x.$$

Dados então $a, b > 0$ mostre que vale a seguinte relação

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

31. Nos itens a seguir, encontre o valor da expressão dada:

| | | |
|---|---|---|
| a) $\log_3 81$ | b) $\log_4 16$ | c) $\log_2 16$ |
| d) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$ | e) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ | f) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right)$ |
| g) $\log_2 1$ | h) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$ | i) $\log_{13} 13$ |
| j) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ | k) $\log_{\frac{1}{6}} 216$ | l) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{64}\right)$ |

32. Se $\log_b a = \log_a b$, que tipo de relação existe entre $a$ e $b$?

33. Com ajuda de uma calculadora da relação $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, construa uma tabela de logaritmos para os primeiros dez inteiros, nas seguintes bases:

| | | |
|---|---|---|
| a) 2 | b) 3 | c) 5 |

34. Sabendo que $a > 0$, simplifique as expressões dadas:

| | | |
|---|---|---|
| a) $\log_a a^{-x}$ | b) $a^{-\log_a x}$ | c) $a^{x+\log_a x}$ |
| d) $\log_a(xa^{2x})$ | e) $a^{-\log_a x^2}$ | f) $a^{\log_a a^x}$ |
| g) $\log_a(a^{\log_a a})$ | h) $a^{2\log_a 3}$ | i) $\log_a(x^2 a^x)$ |
| j) $\log_a(a^{x^2-2x})$ | k) $a^{\log_a(a^x)}$ | l) $a^{2\log_a x}$ |

35. Determine $x$ em cada item:

| | | |
|---|---|---|
| a) $\log_5 x = 3$ | b) $\log_6 x = 3$ | c) $\log_2 x = 10$ |
| d) $\log_{10} x = \frac{1}{2}$ | e) $\log_{10} x = 1$ | f) $\log_{16} x = \frac{1}{4}$ |

36. Determine $a$ em cada item:

a) $\log_a 216 = 3$ b) $\log_a 625 = 4$ c) $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$

d) $\log_a \frac{1}{49} = -2$ e) $\log_a 2 = \frac{1}{4}$ f) $\log_a 125 = 3$

37. Determine $y$ em cada item:

a) $2^{\log_2 y} = 13$ b) $6^{\log_6 y} = 21$ c) $4^{\log_4 y} = 9$

d) $y^{\log_4 6} = 6$ e) $y^{\log_7 14} = 14$ f) $y^{\log_3 2} = 2$

38. Determine $x$ em cada item:

a) $5^{\log_5 7} = x$ b) $3^{\log_x 5} = 5$ c) $10^{\log_x 7} = 7$

d) $k^{\log_k 4} = x$ e) $7^{\log_x k} = k$ f) $8^{\log_8 x} = y$

39. Efetue as expressões indicadas, simplificando-as o máximo possível.

a) $\ln e + \ln(1/e)$ b) $\ln e^2 + e^{-\ln e}$

c) $\ln(e \ln e) + \ln(\ln e)$ d) $e^{-\ln\sqrt{e}}$

40. Simplifique completamente as expressões:

a) $2\ln A - 3\ln B + \ln(AB)$ b) $e^{2\ln A-(\ln B)/2}$

c) $\ln(xe^{-\ln x})$ d) $\ln(e^2 \ln(e \ln e))$

41. Resolva as equações em $x$:

a) $2^x = e^{x+1}$ b) $2e^{3x} = 4e^{5x}$

c) $4e^{2x-3} - 5 = e$ d) $10^{x+3} = 5e^{7-x}$

42. Nos itens a seguir, converta a função dada para a forma $P = P_o a^{kt}$.

a) $P = P_0 e^{0,2t}$ e $a = 2$ b) $P = P_0 e^{0,917t}$ e $a = 3$

c) $P = P_0 e^{-2,5t}$ e $a = 1,7$ d) $P = P_0 e^{-\pi t}$ e $a = e^2$

43. Converta as funções para a forma $P_o e^{kt}$, determinando quais representam crescimento e quais decaimento exponencial.

a) $P = P_0 2^t$ b) $P = 10(1,7)^t$ c) $P = 5,23(0,2)^t$ $P = 174(0,9)^t$

44. Resolva as seguintes equações para $t$

a) $a = be^t$

b) $P = P_0 e^{kt}$

c) $ae^{kt} = e^{bt}$ com $k \neq b$

d) $ce^{\alpha t} = be^{\gamma t/n}$, onde $\alpha n \neq \gamma$

45. Encontre a função inversa de $f(x) = 50e^{0,1x}$.

46. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) A função $f$ é crescente ou decrescente? Por quê?

(b) Verifique se $f$ é inversível e, caso seja, calcule sua inversa.

(c) Qual o domínio de $f^{-1}$?

(d) Esboce os gráficos de $f$ e de $f^{-1}$ em um mesmo sistema cartesiano, e explique explique a relação entre os gráficos.

47. (a) Uma população cresce de acordo com a equação $P(t) = P_0 e^{kt}$ (com $P_0$ e $k$ constantes). Encontre o valor da população em função do tempo $t$, se ela cresce a uma taxa contínua de 2% ao ano e inicia em 1 milhão.

(b) Desenhe um gráfico da população que você encontrou no item anterior *versus* tempo.

48. O ar em uma fábrica está sendo filtrado de modo que a quantidade $P$ de poluente (medido em mg/litro) está diminuindo de acordo com a equação $P = P_0 e^{kt}$, onde $t$ representa o tempo em horas. Se 10% do poluente são removidos nas primeiras cinco horas:

(a) Que porcentagem do poluente ainda permanecem após 10 horas?

(b) Quanto tempo levará até que o poluente seja reduzido a 50% ?

(c) Desenhe um gráfico da poluição *versus* tempo. Mostre os resultados de seus cálculos no gráfico.

(d) Explique por que a quantidade de poluente pode diminuir dessa forma.

49. Uma das componentes principais de uma contaminação nuclear, como a de Chernobyl, é o estrôncio-90, que decai exponencialmente a uma taxa contínua de aproximadamente 2,47% ao ano. Estimativas preliminares, após o desastre de Chernobyl, sugeriram que levaria uns 100 anos até que a região fosse novamente segura para a habitação humana. Que percentual do estrôncio-90 original ainda permaneceria após esse tempo?

50. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia-vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Explique sua resposta.

51. A matéria de jornal a seguir é do *The New York Times*, de 27 de maio de 1990. Preencha os três espaços em branco. (Para o último espaço, suponha que os juros foram capitalizados anualmente, e dê sua resposta em dólares. Despreze a ocorrência de anos bissextos.)

***213 Anos Após o Empréstimo, Tio Sam Está Perdido***

por LISA BELKIN

Especial para o *The New York Times*

SANTO ANTÔNIO, 26 de maio — Há mais de 200 anos, um rico comerciante da Pennsylvania, chamado Jacob DeHaven, emprestou $450.000,00 ao Congresso Continental para socorrer as tropas do Forte Valley. Aparentemente, o empréstimo nunca foi pago. Agora, os descendentes do sr. DeHaven estão acionando o governo dos EUA para receber aquilo de que acreditam ser credores. O total: _____ em dólares atuais, se os juros forem capitalizados diariamente a 6%, a taxa daquela época. Se a capitalização for anual, a conta é somente _____ .

**A Família É Flexível**

Os descendentes se dizem dispostos a ser flexíveis quanto ao montante de um acordo e que até poderiam vir a aceitar um gesto de gratidão ou, talvez, uma estátua de DeHaven. Mas eles também observam que os juros estão se acumulando em _____ por segundo.

## Módulo 3 - Composição de Funções e Mudanças de Escala

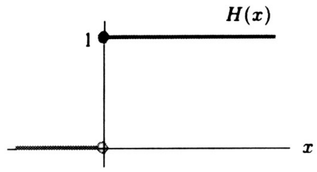
52. (a) Escreva uma equação para o gráfico obtido, através de uma expansão vertical de fator 2, do gráfico de $y = x^2$, seguido de uma translação vertical de 1 unidade para cima. Esboce o gráfico.

    (b) Qual é a equação, se a ordem das transformações (expandir e transladar), na parte (a), for trocada?

    (c) Os dois gráficos são iguais? Explique o efeito de trocar a ordem das transformações.

53. Qual é a diferença (se é que existe) entre $\ln(\ln(x))$, $\ln^2(x)$ e $(\ln(x))^2$?

54. A função *degrau* de Heaveside, $H$, é dada pelo gráfico a seguir:




Com base nela, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $2H(x)$ b) $H(x)+1$ c) $H(x+1)$ d) $-H(x)$ e) $H(-x)$

55. Sejam $S(x)=\sqrt{x}$ e $H(x)=x+1$. Mostre que:

a) $(S(H(x)))^2 = H(x)$ b) $(H(S(x)))^2 = H(x)+2S(x)$

56. Se $f(x)=\log_2 x$ e $g(x)=2^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:

a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(x)-f(x-1)$

d) $f(x)+f(2)$ e) $f(g(x))$ f) $f(f(g(x)))$

g) $g(f(x))$ h) $f(x)+f(1+x)$ i) $g(g(f(x)))$

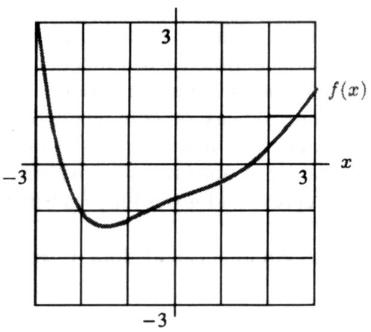
57. Se $f(x)=\ln x$ e $g(x)=e^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:

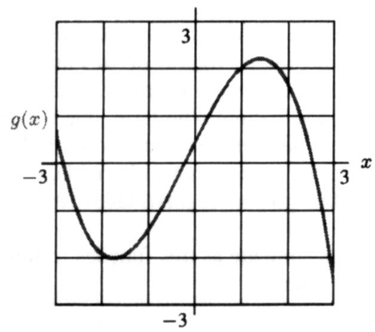
a) $f(1)$ b) $f(e^2)$ c) $g(f(x))$

d) $f(3)+f(\sqrt{x})$ e) $f(x^2-1)-f(x^2+1)$ f) $f(f(g(x)))$

g) $f(x)+f(10+x)$ h) $f(g(x))$ i) $g(g(f(x)))$

58. Considere as funções $f$ e $g$ dadas pelos gráficos a seguir:




Com base nelas:

a) Encontre $f(g(1))$, $g(f(2))$ e $f(f(1))$.

b) Esboce os gráficos de $f(g(x))$, $g(f(x))$ e $f(f(x))$.

59. Considere as funções:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \textit{seno hiperbólico} \text{ de } x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \textit{cosseno hiperbólico} \text{ de } x$$

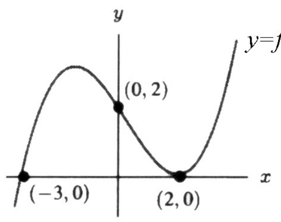
Com base nelas, calcule:

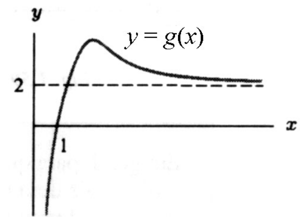
a) $\cosh(0)$ e $\cosh(1)$ b) $\operatorname{senh}(0)$ e $\operatorname{senh}(1)$

c) $\cosh(\ln x)$ e $\operatorname{senh}(\ln x)$ d) $\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

e) $\operatorname{senh}(-x)$ e $\cosh(x)$ f) $\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$

60. Considere o gráfico das funções dadas a seguir:



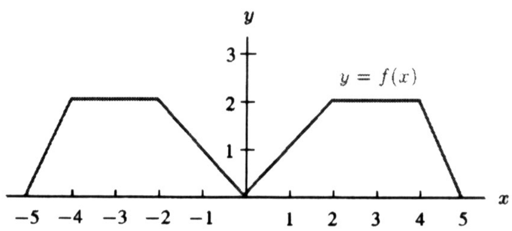




Com base neles, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 2f(x)$ b) $y = f(x+1)$ c) $y = f(x) + 1$

d) $y = 2g(x)$ e) $y = g(x+1)$ f) $y = g(x) + 1$

61. Considere o gráfico da função $y = f(x)$ dado a seguir:




Com base nele, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 2f(x)$ b) $y = 2 - f(x)$ c) $y = \dfrac{1}{f(x)}$

# Módulo 4 - Proporcionalidade

Nos Problemas 62- 65 escreva uma fórmula representando a função descrita.

**62.** A energia cinética, $K$, é proporcional ao quadrado da velocidade, $v$.

**63.** A força gravitacional, $F$, entre dois corpos é inversamente proporcional ao quadrado da distância, $d$, entre eles.

**64.** A velocidade média, $v$, para uma viagem sobre uma distância fixada é inversamente proporcional ao tempo de viagem.

**65.** O volume de uma esfera é proporcional ao cubo do seu raio $r$.

**66.** Simplifique cada uma das seguintes:
(a) $8^{2/3}$ (b) $9^{-3/2}$

**67.** A área da superfície de um mamífero, $S$, satisfaz à equação $S = kM^{2/3}$, onde $M$ é a massa do corpo, e a constante de proporcionalidade, $k$, depende da forma do corpo do mamífero. Um humano de massa de corpo 70 quilos tem área de superfície 18.600 cm$^2$. Ache a constante de proporcionalidade para humanos. Ache a área de superfície de um humano com massa de 60 quilos.

**68.** Biólogos estimam que o número de espécies de animais com um certo comprimento de corpo é inversamente proporcional ao quadrado do comprimento do corpo.[26] Escreva uma fórmula para o número de espécies de animais, $N$, de um certo comprimento, como função do comprimento, $L$. Há mais espécies com grande comprimento ou com pequeno comprimento? Explique.

**69.** O tempo de circulação de um mamífero (isto é, o tempo médio que leva todo o sangue no corpo para circular uma vez e voltar ao coração) é proporcional à raiz quarta da massa do corpo do mamífero.

(a) Escreva uma fórmula para o tempo de circulação, $T$, em termos da massa do corpo, $B$.

(b) Se um elefante de massa de 5.230 quilos tem um tempo de circulação de 148 segundos, ache a constante de proporcionalidade.

(c) Qual é o tempo de circulação de um humano com massa de corpo de 70 quilos?

**70.** A massa de sangue de um mamífero é proporcional à massa do corpo. Um rinoceronte com massa de corpo de 3.000 quilos tem massa de sangue de 150 quilos. Ache uma fórmula para a massa de sangue de um mamífero como função de massa de corpo e avalie a massa de sangue de um humano com massa de corpo de 70 quilos.

**71.** O período, $T$, de um pêndulo é proporcional à raiz quadrada do seu comprimento, $l$.

(a) O pêndulo de um relógio de armário tem 3 pés de comprimento e um período de 1,924 segundos. Ache a constante de proporcionalidade, e escreva $T$ como função de $l$.

(b) O pêndulo de Foucault, construído em 1851 no Pantheon de Paris tinha 197,0 pés de comprimento. Qual era seu período?

**72.** Alometria é o estudo do tamanho relativo de diferentes partes do corpo como conseqüência do crescimento.[27] Neste problema você verificará a precisão da equação alométrica: o peso de um peixe é proporcional ao cubo de seu comprimento. A Tabela 1.23 relaciona o peso,[28] $y$, de um tipo de peixe chamado *plaice* com seu comprimento, $x$. Estes dados suportam a hipótese de que (aproximadamente) $y = kx^3$? Se sim, avalie a constante de proporcionalidade, $k$. Justifique suas respostas.

**73.** Quando Galileu estava formulando as leis do movimento, ele considerou o movimento de um corpo partindo do repouso e caindo sob a ação da gravidade. Originalmente ele pensava que a velocidade de um tal corpo caindo era proporcional à distância da queda. O que dizem os dados experimentais na Tabela 1.24 sobre a hipótese de Galileu? Que hipótese alternativa é sugerida pelos dois conjuntos de dados na Tabela 1.2

**TABELA 1.23**

| Comprimento (cm) | Peso (g) | Comprimento (cm) | Peso (g) |
|---|---|---|---|
| 33,5 | 332 | 39,5 | 538 |
| 34,5 | 363 | 40,5 | 574 |
| 35,5 | 391 | 41,5 | 623 |
| 36,5 | 419 | 42,5 | 674 |
| 37,5 | 455 | 43,5 | 724 |
| 38,5 | 500 | | |

**TABELA 1.24**

| Distância (pés) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Velocidade (pés/seg) | 0 | 8 | 11,3 | 13,9 | 16 |

**TABELA 1.25**

| Tempo(seg) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Velocidade (pés/seg) | 0 | 32 | 64 | 96 | 128 |

**74.** De acordo com a National Association of Realtors,[29] o rendimento bruto anual mínimo, $m$, em milhares de dólares, necessário para obter um empréstimo hipotecário de 30 anos para $A$ milhares de dólares a 9% é dado na Tabela 1.26. Note que quanto maior o empréstimo, maior o rendimento bruto anual mínimo de que precisa o tomador do empréstimo.

**TABELA 1.26**

| $A$ | 50 | 75 | 100 | 150 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 17.242 | 25.863 | 34.484 | 51.726 | 68.968 |

**TABELA 1.27**

| $r$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 31.447 | 34.484 | 37.611 | 40.814 | 44.084 |

É claro que nem toda hipoteca é financiada a 9%. Na verdade, a menos de pequena variação, taxas de juros de hipotecas são determinadas, não por bancos individuais mas pela economia como um todo. O rendimento bruto anual mínimo, $m$, em milhares de dólares, necessário para um empréstimo hipotecário de 100.000 a várias taxas de juros, $r$, é dado na Tabela 1.27. Note que a obtenção de um empréstimo num momento em que os juros são altos exige um rendimento anual bruto mínimo maior.

(a) O tamanho, $A$, do empréstimo é proporcional ao rendimento bruto anual mínimo, $m$?

(b) A taxa de porcentagem de juros, $r$, é proporcional ao rendimento bruto anual mínimo, $m$?

**75.** Em fisiologia, a fórmula de DuBois relaciona a área da superfície de um pessoa, $s$, em m$^2$, ao peso, $w$, em kg, e à altura, $h$, em cm, por

$$S = 0{,}01w^{0{,}25}h^{0{,}75}.$$

(a) Qual é a área de superfície de uma pessoa que pesa 65 kg e tem 160 cm de altura?

(b) Qual é o peso de uma pessoa cuja altura é 180 cm e que tem uma área de superfície de 1,5 m$^2$?

(c) Para pessoas de peso fixo 70 kg, resolva para $h$ como função de $s$. Simplifique sua resposta.

**76.** De acordo com a revista “Car and Drive”, de abril de 1991, um Alfa Romeo a 112 km/h necessita de 54 m para parar. Supondo que a distancia ate parar é proporcional ao quadrado da velocidade, calcule as distancias, ate parar, de um Alfa Romeo a velocidades de 56 km/h e 224 km/h (sua velocidade máxima)