Pré-Cálculo - Segunda Lista de Exercícios

Módulo 1 - Composição de Funções e Mudanças de Escala

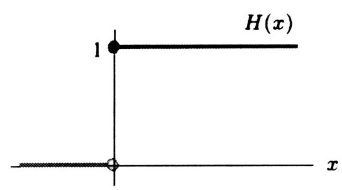
1. (a) Escreva uma equação para o gráfico obtido, através de uma expansão vertical de fator 2, do gráfico de $y = x^2$, seguido de uma translação vertical de 1 unidade para cima. Esboce o gráfico.

   (b) Qual é a equação, se a ordem das transformações (expandir e transladar), na parte (a), for trocada?

   (c) Os dois gráficos são iguais? Explique o efeito de trocar a ordem das transformações.

2. Qual é a diferença (se é que existe) entre $\ln(\ln(x))$, $\ln^2(x)$ e $(\ln(x))^2$?

3. A função *degrau* de Heaveside, H, é dada pelo gráfico a seguir:



   Com base nela, esboce o gráfico das seguintes funções:

   a) $2H(x)$ b) $H(x)+1$ c) $H(x+1)$ d) $-H(x)$ e) $H(-x)$

4. Sejam $S(x) = \sqrt{x}$ e $H(x) = x+1$. Mostre que:

   a) $(S(H(x)))^2 = H(x)$ b) $(H(S(x)))^2 = H(x)+2S(x)$

5. Se $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:

   a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(x) - f(x-1)$

   d) $f(x) + f(2)$ e) $f(g(x))$ f) $f(f(g(x)))$

   g) $g(f(x))$ h) $f(x) + f(1+x)$ i) $g(g(f(x)))$

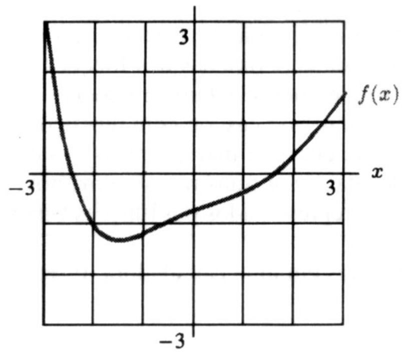
6. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:

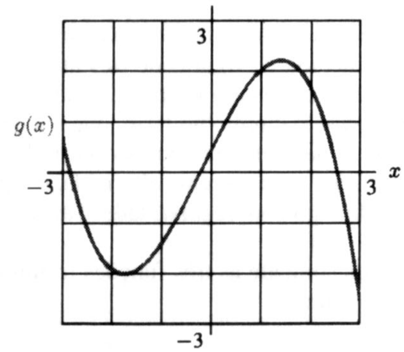
   a) $f(1)$ b) $f(e^2)$ c) $g(f(x))$

   d) $f(3) + f(\sqrt{x})$ e) $f(x^2-1) - f(x^2+1)$ f) $f(f(g(x)))$

   g) $f(x) + f(10+x)$ h) $f(g(x))$ i) $g(g(f(x)))$

7. Considere as funções f e g dadas pelos gráficos a seguir:





Com base nelas:

a) Encontre $f(g(1))$, $g(f(2))$ e $f(f(1))$.

b) Esboce os gráficos de $f(g(x))$, $g(f(x))$ e $f(f(x))$.

8. Considere as funções:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \textit{seno hiperbólico} \text{ de } x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \textit{cosseno hiperbólico} \text{ de } x$$

Com base nelas, calcule:

a) $\cosh(0)$ e $\cosh(1)$

b) $\operatorname{senh}(0)$ e $\operatorname{senh}(1)$

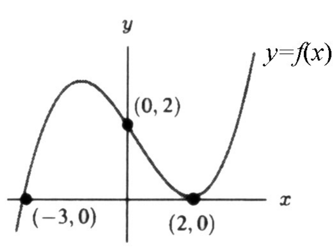
c) $\cosh(\ln x)$ e $\operatorname{senh}(\ln x)$

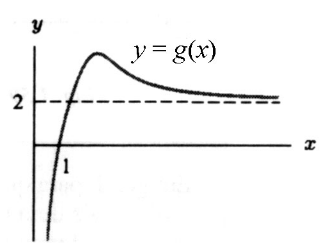
d) $\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

e) $\operatorname{senh}(-x)$ e $\cosh(x)$

f) $\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$

9. Considere o gráfico das funções dadas a seguir:



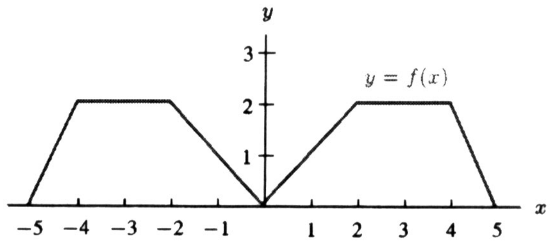


Com base neles, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 2f(x)$ b) $y = f(x+1)$ c) $y = f(x) + 1$

d) $y = 2g(x)$ e) $y = g(x+1)$ f) $y = g(x) + 1$

10. Considere o gráfico da função $y = f(x)$ dado a seguir:



Com base nele, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 2f(x)$ b) $y = 2 - f(x)$ c) $y = \dfrac{1}{f(x)}$

Módulo 2 - Trigonometria e Funções Trigonométricas

11. Converta de graus para radianos:

(a) $30°$ (b) $10°$ (c) $45°$ (d) $135°$ (e) $170°$

(f) $270°$ (g) $15°$ (h) $700°$ (i) $1080°$ (j) $36°$

12. Converta de radianos para graus:

(a) $\frac{5\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 3π (d) $\frac{\pi}{36}$ (e) 10π (f) $\frac{3\pi}{2}$

13. Um caçador está sentado numa plataforma construída numa árvore a 30 metros do chão. Ele vê um tigre sob um ângulo de 30° abaixo da horizontal. A que distância está o tigre?

14. Verifique se as seguintes identidades trigonométricas são válidas

(a) $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$ (b) $1 + \operatorname{cotg}^2 t = \operatorname{cossec}^2 t$

(c) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

(d) $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

(e) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

(f) $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$ (g) $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$

15. Calcule os seguintes valores das funções em cada ângulo. (*Dica:* Use identidades trigonométricas.)

    (a) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$ (b) $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$ (c) $\cos(\frac{\pi}{2} + \pi)$

    (d) $\operatorname{sen}(3\pi) + \cos(3\pi)$ (e) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{12})$

16. De acordo com as propriedades vistas anteriormente, obtenha fórmulas em termos de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ para:

    (a) $\operatorname{sen} 3\theta$ (b) $\cos 3\theta$ (c) $\cos 4\theta$ (d) $\operatorname{sen} 4\theta$

17. Resolva:

    (a) $2\cos^2 x + 3 = 5\cos x$ (b) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$

18. Faça o estudo completo das funções cossecante e cotangente, definidas respectivamente por:

    (a) $f : t \mapsto \operatorname{cossec} t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$ (b) $f : t \mapsto \operatorname{cotg} t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$.

19. Sem utilizar calculadora, complete a seguinte tabela, marcando $\nexists$ quando a função não estiver definida.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{10\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\theta$											
$\cos\theta$											
$\tan\theta$											
$\sec\theta$											
$\operatorname{cotg}\theta$											
$\operatorname{cossec}\theta$											

20. Qual é a diferença entre $\operatorname{sen} x^2$, $\operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$? Expresse cada uma das três funções em forma de composição.

21. Utilizando uma calculadora, calcule o valor da função para valores de θ dados em radianos.

    (a) $\operatorname{sen}\theta$, onde $\theta = 0$; 1; 1,5; -2,6; π; $-\frac{\pi}{2}$; e 5000.

(b) $\cos\theta$, onde $\theta = 0$; 1; 2,5; 3; 5280; -782; π, $-\frac{\pi}{2}$; e $\frac{3\pi}{2}$.

(c) $\text{tg}\theta$, onde $\theta = 0$; 1; 1,5; π; $\frac{\pi}{4}$; e 1000.

(d) $\text{cotg}\theta$, onde $\theta = 1$; 1,5; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; e 700.

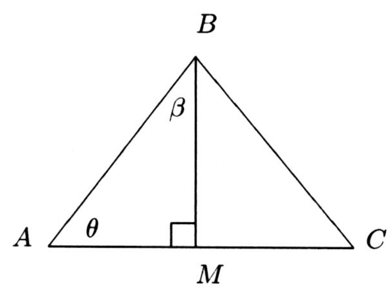
(e) $\sec\theta$, onde $\theta = 0$; 1; 1,5; π; $\frac{\pi}{4}$; e 1000.

(f) $\text{cossec}\theta$, onde $\theta = 1$; 1,5; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; e 700.

22. Se os ângulos de um triângulo medem x, $x+1$ e $x+2$ (em radianos), encontre x.

23. Um satélite foi lançado em uma órbita circular ao redor da Terra. Se sua distância do centro da Terra é de aproximadamente 10 000 km, que distância ele percorre quando varre um ângulo de $\frac{\pi}{4}$, com respeito ao centro da Terra?

24. A seguir temos o triângulo ABC, onde $AB = BC = CA = 2$ e $AM = MC$.



Com base nele encontre:

(a) O comprimento BM

(b) θ e β em radianos.

(c) $\text{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\text{sen}\beta$, $\cos\beta$, $\text{tg}\theta$ e $\text{tg}\beta$.

25. Dado um triângulo ABC, se $\widehat{C} = \pi/2$ e $\widehat{A} = \widehat{B}$, encontre $\widehat{A}$ em radianos e calcule $\cos\widehat{A}$, $\text{sen}\,\widehat{A}$ e $\text{tg}\,\widehat{A}$. (*Dica:* Aqui $\widehat{A}$ representa o ângulo no vértice A, $\widehat{B}$ o ângulo no vértice B, e $\widehat{C}$ representa o ângulo no vértice C. Faça um desenho.)

26. Em $t = 0$ dois carros se encontram na intersecção de duas estradas retas, com velocidades v_1 e v_2. As duas estradas se cruzam formando um ângulo θ.

(a) Qual é a distância entre os carros t horas depois deles passarem pelo cruzamento?

(b) Calcule a distância entre os carros 1 hora após passarem pelo cruzamento se:

(a) $v_1 = v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ (b) $v_1 = v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$

(c) $v_1 = v_2$ e $\theta = 0$ (d) $v_1 = 2v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$

27. Dadas as funções f e g a seguir, obtenha $f \circ g$ e $g \circ f$ e seus respectivos domínios de definição:

(a) $f(x) = \sqrt{9 - 9x^2}$ e $g(x) = \operatorname{cotg} x$.

(b) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$

28. Encontre funções f e g de modo que a função h possa ser escrita como $h = f \circ g$. Nem f nem g devem ser a função identidade.

(a) $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ (b) $h(x) = \operatorname{sen} x^2$

(c) $h(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (d) $h(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

(e) $h(x) = \operatorname{sen}^2 3x$ (f) $h(x) = |\operatorname{sen} x|$

(g) $h(x) = \cos|x|$ (h) $h(x) = \tan(x^2 + 1)$

(i) $h(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ (j) $h(x) = 2^{\operatorname{cossec} x}$

(k) $h(x) = 3\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1$ (l) $h(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x)$

29. Dizer como as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 4^x$ e $h(x) = \operatorname{tg} x$ devem ser compostas para que se obtenha a função $h(x) = 4^{\operatorname{tg} x^2}$.

30. Escavações arqueológicas encontraram um antigo aparelho que, ao que tudo indica, era utilizado para tocar LP's. As marcações de velocidade do aparelho eram $33\frac{1}{2}$, 45 e 78 rotações por minuto. Em cada caso, qual é o período do movimento?

31. Calcular o período das funções

(a) $\operatorname{tg} 4x$ (b) $\operatorname{sen}(x^2)$ (c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)$.

(d) $\cos(\frac{2}{3}x^2)$ (e) $\operatorname{cossec}(\frac{\pi}{7}\sqrt{x})$ (f) $\operatorname{cotg}(7Bx)$ (onde $B > 0$).

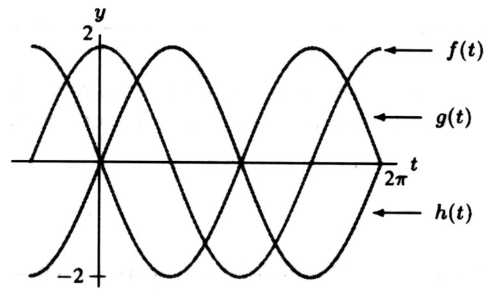
32. Esboce o gráfico das seguintes funções, identificando cuidadosamente as amplitudes e períodos. Não use calculadora gráfica ou computador.

(a) $y = 3\operatorname{sen} x$ (b) $y = 3\operatorname{sen} 2x$ (c) $y = -3\operatorname{sen} 2\theta$.

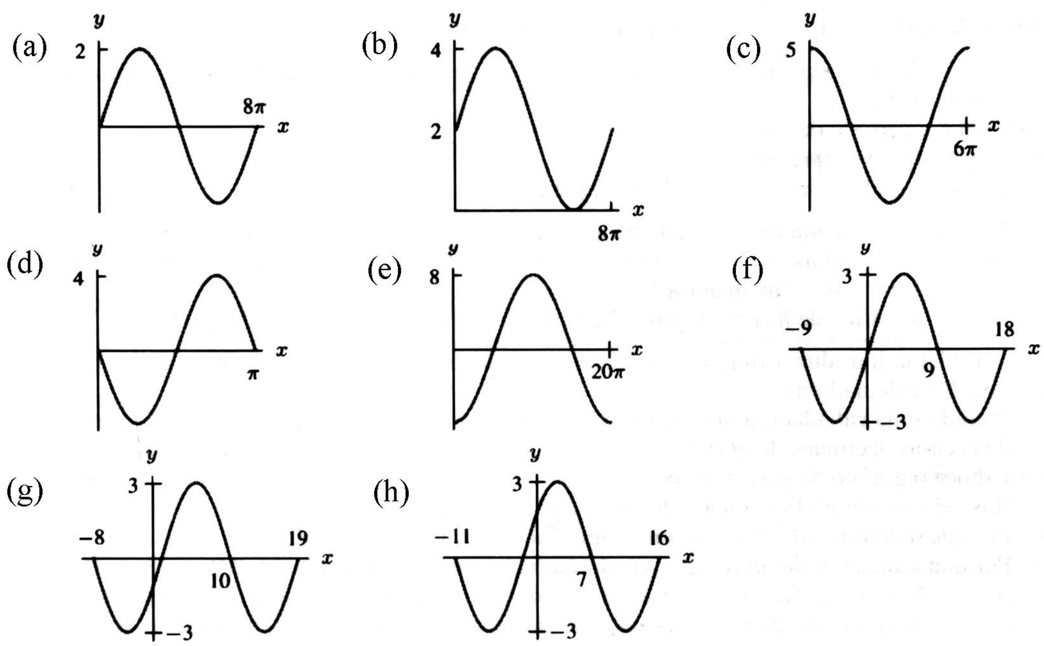
(d) $y = 4\cos 2x$ (e) $y = 4\cos(\frac{1}{4}t)$ (f) $y = 5 - \operatorname{sen} 2t$

33. Relacione as funções abaixo com os gráficos da figura, explicando os por quês.

(a) $y = 2\cos(t - \frac{\pi}{2})$ (b) $y = 2\cos t$ (c) $y = 2\cos(t + \frac{\pi}{2})$.



34. Nos itens a seguir, encontre uma possível fórmula para cada gráfico



35. A profundidade de um tanque oscila, conforme uma senóide, uma vez a cada 6 horas, em torno de uma profundidade média de 7 metros. Se a profundidade mínima é de 5,5 metros e a máxima é de 8,5 metros, encontre uma fórmula para a profundidade em função do tempo, medido em horas.

36. Uma população de animais varia de forma senoidal entre um mínimo de 700 em 1^{o} de janeiro e um máximo de 900, em 1^{o} de julho.

(a) Esboce o gráfico da população *versus* tempo.

(b) Encontre uma fórmula para a população em função do tempo t, medido em meses desde o início do ano.

37. A voltagem V, de um ponto de luz residencial é dada em função do tempo t (em segundos), por $V = V_0 \cos(120\pi t)$.

    (a) Qual é o período da oscilação?

    (b) O que V_0 representa?

    (c) Esboce o gráfico de V *versus* t, identificando os eixos.

38. É dado que duas funções trigonométricas têm período π e que seus gráficos cortam-se em $x = 3,64$, mas não é dado nada mais.

    (a) Você sabe dizer se os gráficos dessas funções se cortam em algum outro valor de x, positivo e menor? Se for o caso, qual é esse valor?

    (b) Encontre um valor de x, maior que 3,64, para o qual os gráficos se cortam.

    (c) Encontre um valor negativo de x para o qual os gráficos se cortam.

39. (a) Usando uma calculadora gráfica, ou um computador, encontre o período de $2\,\text{sen}\,3t + 3\cos t$.

    (b) Qual é o período de $\text{sen}\,3t$? E de $\cos t$?

    (c) Use a resposta da parte (b) para justificar sua resposta da parte (a).

40. (a) Usando uma calculadora gráfica, ou um computador, encontre o período de $2\,\text{sen}\,4x + 3\cos 2x$.

    (b) Dê a resposta exata ao item anterior (como um múltiplo de π).

    (c) Determine o período de $\text{sen}\,4x$ e de $\cos 2x$ e use esses valores para explicar sua resposta na parte (a).

Módulo 3 - Polinômios e Funções Racionais

41. Se $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x^4$ e $h(x) = x^2 + x^4 + x^6$ e $k(x) = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$ encontre números reais a, b e c tais que $k = af + bg + ch$.

42. Obtenha $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que os polinômios $f(x) = x^4 + 20x^3 - 4\alpha x + 4$ e $g(x) = x^2 + 2x + 2$ verifiquem a condição $f = g^2$.

43. Em cada caso, determine um polinômio do segundo grau $f(x)$ de modo que:

(a) $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ e $f(-1) = 0$.   (b) $f(1) = 0$ e $f(x) = f(x-1)$ para todo x

44. Nos itens a seguir, fatore o polinômio o máximo possível.

(a) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$
(b) $p(y) = 2y^3 + 3y^2 - 8y + 3$
(c) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$
(d) $p(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6$.
(e) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 12$
(f) $p(x) = x^3 - 27$
(g) $p(x) = x^4 - 1$
(h) $p(y) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$
(i) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 8x$
(j) $p(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$
(k) $p(x) = -2x^4 + 7x^2 - 3$
(l) $p(x) = x^2 - 4$
(m) $p(x) = x^2 - 3$

45. Nos itens a seguir:

- Encontre todos os valores de x para os quais a função não está definida.
- Expresse a função $f(x)$ na forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são polinômios. Então fatore e simplifique onde for possível.
- Determine para quais valores de x se tem $f(x) = 0$.
- Determine para quais valores de x se tem $f(x) > 0$, e para quais se tem $f(x) < 0$.

(a) $x - 4 + \dfrac{4}{x}$
(b) $4x + 4 + \dfrac{1}{x}$
(c) $\dfrac{10}{5-t} - 1$
(d) $\dfrac{1}{1-x^2} - 1$
(e) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2x+3}$
(f) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{7}{3(3x-1)}$
(g) $1 + \dfrac{2}{x^2-1}$
(h) $\dfrac{1}{1+x^2} + 1$
(i) $\dfrac{-x^3}{x+3}$
(j) $\dfrac{x^3-3}{x(x^2-9)}$
(k) $\dfrac{27}{x+3} - x^2 + 3x - 9$
(l) $\dfrac{9x-3}{x^3-9x} + 1$
(m) $x^2 - 3x + 6 - \dfrac{16}{x+3}$

46. Determinar a de modo que a divisão de $x^4 - 2ax^3 + (a+2)x^2 + 3a + 1$ por $x - 2$ tenha resto 7.

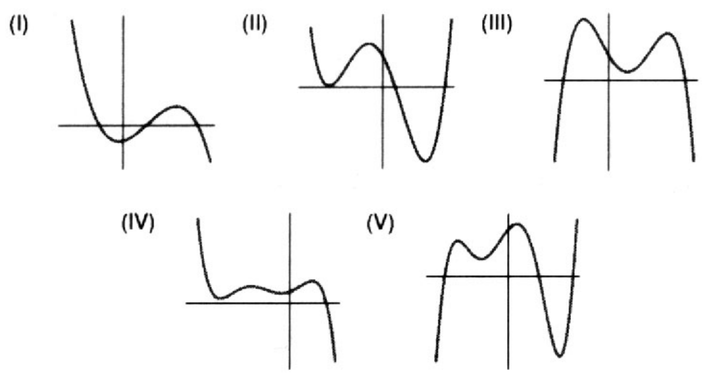
47. Determinar um polinômio do terceiro grau que se anula em $x = 1$ e que dividido por $x + 1$, $x + 2$ e $x - 2$ tenha resto 6.

48. As divisões de um polinômio $f(x)$ por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$ são exatas. O que se pode dizer do grau de f?

49. O gráfico de cada uma das figuras abaixo representa um polinômio. Para cada um deles determine:

    (a) qual o menor grau possível do polinômio.

    (b) O coeficiente líder do polinômio é positivo ou negativo? (O coefciente líder é o coeficiente da potência mais alta de x.)



50. Esboce o gráfico dos seguintes polinômios:

    (a) $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$ (b) $f(x) = 5(x^2-4)(x^2-25)$

    (c) $f(x) = -5(x^2-4)(25-x^2)$ (d) $f(x) = 5(x-4)^2(x^2-25)$

51. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, o que você pode dizer de a, b e c se:

    (a) (1,1) está no gráfico de $f(x)$?

    (b) (1,1) é o vértice do gráfico de $f(x)$?

    (c) A intersecção do gráfico com o eixo dos y é (0,6)?

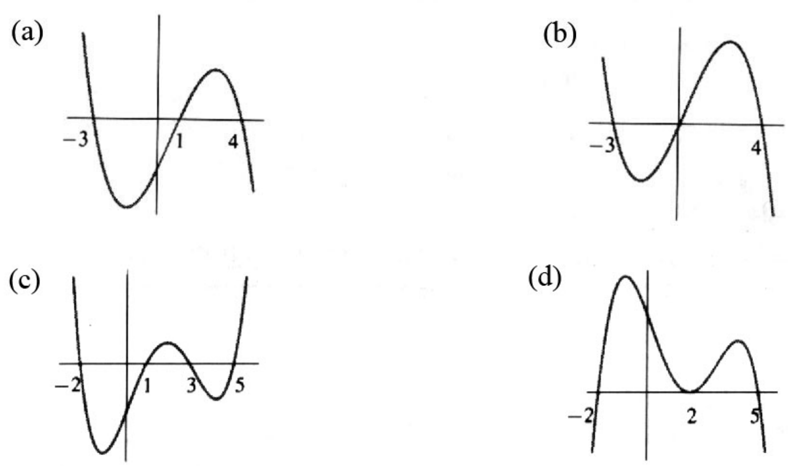
    (d) Encontre uma função quadrática que satisfaça todas as três condições anteriores.

52. Encontre um polinômio cujas raízes sejam -2, -1, 1 e 4, todas com multiplicidade 1.

53. Em cada caso, encontre um polinômio com coeficientes inteiros cujas raízes sejam:

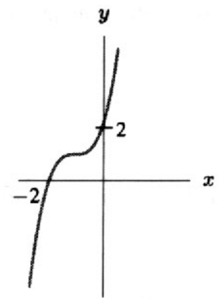
    (a) $\sqrt{2}+1$ e $\sqrt{2}-1$
    (b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
    (c) $\sqrt{6}$, $1-\sqrt{5}$ e -1

54. Para cada um dos itens a seguir: encontre uma possível fórmula para o gráfico; obtenha os intervalos aproximados onde a função é crescente e onde é decrescente.

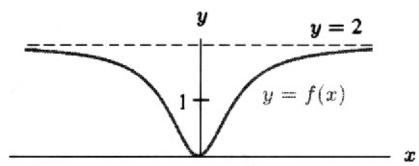


55. Encontre os polinômios cúbicos que representam o gráfico de:

56. Transladando o gráfico de x^3 encontre o polinômio cúbico com gráfico semelhante ao da figura



57. O gráfico de uma função racional é dado pela figra abaixo:



Se $f(x) = g(x)/h(x)$ com $g(x)$ e $h(x)$ ambas funções quadráticas, obtenha as fórmulas para $g(x)$ e $h(x)$. (Há várias possibilidades.)

58. Calcule as assíntotas (verticais e horizontais) e esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$.

59. Encontre as assíntotas e esboce o gráfico de:

(a) $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-2}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

Atenção: Nos itens (d) e (e) há assíntotas inclinadas. Nesses casos faça primeiro a divisão do polinômio para depois traçar o gráfico. Confira seus esboços com um programa de computador.

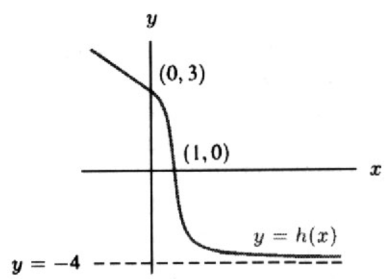
60. Encontre as assíntotas e esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2+1}$.

61. Um terreno é delimitado na forma de um retângulo com área 144 m^2.

(a) Escreva uma expressão para o merímetro P como uma função do comprimeto x.

(b) Esboce um gráfico da função perímetro e determine, aproximadamente, a partir do gráfico, as dimensões nas quais o perímetro é mínimo.

62. A figura a seguir ilustra o gráfico de $h(x)$.



Com base nele faça o que se pede e responda à pergunta:

(a) Esboçe o gráfico de $y = h^{-1}(x)$, e de $y = \dfrac{1}{h(x)}$.

(b) O que acontece com a assíntota quando você esboça o gráfico da inversa?

63. Construa o gráfico de $f(x) = x^3 + 2x$ e, a partir dele, obtenha o número de raízes reais de $f(x) = 0$.

64. Quantas são as raízes da equação $x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$ no intervalo $[0,3[$?

65. Determine α de modo que $f(x) = x^3 + x^2 + 5x + \alpha$ tenha pelo menos uma raiz no intervalo $]-2,0[$.