Funções - Primeira Lista de Exercícios

VERSÃO DE 01/03/2010

Recomendações

- Não é necessário o uso de teoremas ou resultados "complicados" nas resoluções. Basta que você tente desenvolver suas idéias. Faltando alguma "ferramenta" para a solução, pesquise nos livros indicados ou na internet. Em pouco tempo você verá que consegue, mais do que simplesmente encontar uma solução, enxergar caminhos claros guiado pela sua própria intuição.

- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas idéias com os colegas.

- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela. Para isso, leia a parte seguinte.

Antes de começar, um pouco de história . . .

Um matemático muito peculiar foi o indiano S. Ramanujan. Mesmo sem ter uma "grande" formação ele fez inúmeras contribuições na matemática (teoria dos números, aproximações e integrais de funções trigonométricas, etc...). Inclusive hoje, um dos melhores algoritmos usados em computação para estimar o valor de π é de sua autoria. Por exemplo, ele deu a seguinte aproximação para π

$$\pi \approx \left(97\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)^{1/4} = 3,1415926526...$$

Como ele a obteve? De "forma experimental". Vejamos como: primeiro ele observou que na expressão $\pi^4 = 97,0409091034002...$ o par de algarismos 09 aparece duas vezes, seguidos de um 10, que é um número 'próximo' de 09. Desta forma,

$$97,40909090909... = \frac{2143}{22} = 97\frac{1}{2} - \frac{1}{11}$$

é naturalmente uma aproximação para π^4. Logo, extraindo as raízes, teremos

$$\pi \approx \left(97\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)^{1/4}.$$

A intuição em matemática não vem "do nada". É preciso testar casos, refletir sobre eles, e buscar regularidades. Tenha isso em mente ao estudar os exercícios.

Agora vamos aos exercícios.

1. Expresse cada número como decimal:

   a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{9}{15}$ d) $-\frac{7}{8}$

   e) $-3\frac{17}{20}$ f) $\frac{4}{11}$ g) $-\frac{8}{7}$ h) $-\frac{56}{14}$

2. Expresse cada número decimal como uma fração na forma mais reduzida possível:

   a) $2,4$ b) $-3,6$ c) $0,5555\ldots$

   d) $0,\overline{18}$ e) $0,09595\ldots$ f) $3,\overline{27}$

   g) $1,38181\ldots$ h) $-4,1\overline{7}$ i) $2,472472\ldots$

3. Cortou-se, primeiramente, $\frac{2}{7}$ de um fio. Depois cortou-se 0,6 do restante. A parte que restou foi dividida em 50 partes iguais, cada uma medindo 16 metros. Calcule o comprimento do fio.

4. Será que é possível escrever um decimal com um número infinito de algarismos e que não seja uma dízima periódica, seguindo alguma regra para a colocação dos algarismos?

5. Transforme os decimais em frações (irredutíveis). Em seguida, faça o que se pede.

   a) 2,5 e 2,4999... b) 1,02 e $1,01\overline{9}$ c) 3,74 e 3,73999... d) $5,\overline{9}$ e 6

   e) O que você observou nas frações dos itens anteriores?

   f) Prove que todo decimal finito admite duas representações decimais distintas.

6. Responda às perguntas, justificando em cada caso.

   (a) A soma de dois números racionais é um número racional, ou será que pode ser irracional?

   (b) E a soma de dois números irracionais é sempre irracional, ou será que pode ser racional?

   (c) O produto de dois números racionais é um número racional, ou será que pode ser irracional?

   (d) E o produto de dois números irracionais é sempre irracional, ou será que pode ser racional?

7. Efetue a expressão em cada item. Em seguida, responda às perguntas

a) $\dfrac{1}{1+1}$ b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}$ c) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}$ d) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$

e) Em cada caso, que fração você obtém? Como elas são formadas?
f) Continuando com esse processo, sem fazer contas, qual você acha que será a próxima fração? Por quê?

8. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras? Explique sua resposta.

a) $3 \in \mathbb{R}$ b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

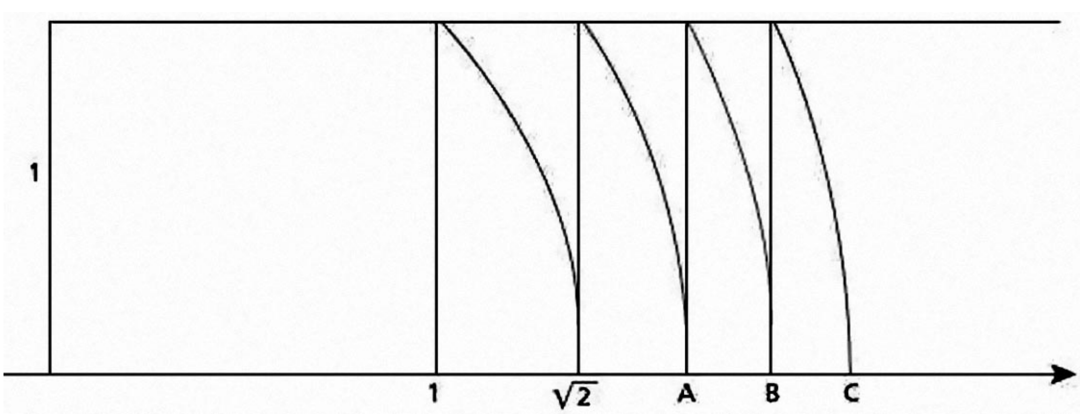
d) $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

g) $\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ h) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

9. Mostre que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$.

10. Mostre que existem a e b racionais, tais que $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

11. Que números reais são representados pelos pontos A, B e C na figura a seguir? Explique sua resposta.



12. Efetue as operações indicadas e escreva, em cada caso, se o resultado é um número racional ou irracional.

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

(b) $7 - \sqrt[3]{5} - (8 - \sqrt[3]{5})$

(c) $\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}$

(d) $5 + \sqrt{11} - (3 - \sqrt{11})$

(e) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

(f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(g) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$

13. *Desafio 1.* Prove que:

   (a) Um número racional $\dfrac{m}{n}$, com $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$ (a fração é irredutível), pode ser representado como um decimal finito se, e somente se, $n = 2^j 5^k$, onde $j, k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

   (b) Todo número racional $\dfrac{m}{n}$, onde $n = Np$, $N \in \mathbb{Z}$, p é um primo, $p \neq 2$ e $p \neq 5$, pode ser representado como uma dízima periódica.

14. Utilizando os axiomas que definem o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, faça o que se pede nos itens seguintes:

   (a) Mostre que se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$

   (b) Mostre que se $abc = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$

   (c) Se $ab = ac$, então $b = c$? Por quê?

   (d) Se $a^2 = b^2$, então $a = b$? Por quê?

   (e) Mostre que $\dfrac{a \cdot c}{b \cdot c} = \dfrac{a}{b}$, para todos os $b, c \neq 0$

   (f) Mostre que $\left(\dfrac{c}{d}\right)^{-1} = \dfrac{d}{c}$, para todos os $c, d \neq 0$

15. Prove a *Lei do cancelamento da Multiplicação*: para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ se $ab = ac$, e $a \neq 0$, então $b = c$.

16. As fórmulas a seguir serão muito úteis. Verifique-as:

   (a) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

   (b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

   (c) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

17. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $x^2 \geqslant 0$.

18. Demonstre que:

    (a) $1 > 0$;

    (b) Se $a \leqslant b$ e $c \geqslant d$ então $a - c \leqslant b - d$.

    (c) Se $0 < a < b$ então $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

    (d) Se $a > 1$ então $a^2 > a$.

    (e) Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.

    (f) Se $0 \leqslant a < b$ então $a^2 < b^2$.

    (g) Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ e $a^2 < b^2$ então $a < b$.

19. Dados dois números a e b reais e positivos, chama-se *média aritmética* de a e b ao número $\dfrac{a+b}{2}$ e chama-se *média geométrica* ao número $\sqrt{ab}$. Se $0 < a < b$, mostre que

    (a) $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

    (b) $a < \sqrt{ab} < b$.

    (c) $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$.

20. Sendo a e b números reais quaisquer, mostre que $a^3 \leqslant b^3$ se, e somente se, $a \leqslant b$.

21. Se $x \in \mathbb{R}$ tem a propriedade que $0 \leqslant x < h$ para todo número real positivo h prove que $x = 0$.

22. Prove que os seguintes números são irracionais: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt[3]{7}$.

23. Usando o fato que $\sqrt{2}$ é irracional, prove que entre dois reais a e b com $a < b$, existe um número irracional da forma $r\sqrt{2}$, sendo r racional.

24. Euclides[1] mostrou que há um número infinito de primos usando um argumento muito simples. Ele supôs que huvesse somente um número finito de primos, digamos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e então considerou o número $p_1 \cdots p_n + 1$ consistindo do produto de todos esses primos mais 1. Dessa forma, esse número

[1] Viveu por volta de 300 aC.

não poderá ser primo, já que é maior que todos os primos listados. Portanto, algum primo p_k da lista acima deve dividi-lo. Obtenha com isso uma terrível contradição.

25. Determine o valor de x, sabendo que $\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}$.

26. Verifique que para todo número $x > 0$, se tem $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$. (*Dica:* tente multiplicar ambos os lados da desigualdade por x e observar o que acontece.)

27. Resolva a expressão $(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20} = 1$.

28. Qual o valor de x^2, se $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$? (*Dica:* Eleve ao cubo e depois procure uma equação do segundo grau.)

29. Prove que:

    a) $|x| \geqslant 0$

    b) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$

    c) $|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

    d) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$

    e) $||x|-|y|| \leqslant |x+y|$

    f) Se $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

    g) Dado $c > 0$, tem-se $|x| > c$ se, e somente se, $x < -c$ ou $x > c$.

30. Resolva as inequações

    a) $|x-7| < 9$

    b) $|2x+3| \leqslant 10$

    c) $|3x-1| < x$

    d) $|2x^2+3x+3| \leqslant 3$

    e) $|x-1| + |x-3| < 4x$

    f) $\dfrac{1}{|x+1||x-3|} \geqslant \dfrac{1}{5}$

31. Represente graficamente os seguintes intervalos:

    a) $[1, +\infty[$

    b) $]-2, +\infty[$

    c) $[3, 8[$

    d) $]-\infty, -1[\cup [2, +\infty[$

32. Dentre os conjuntos a seguir, distingua quais são intervalos, representando-os com as notações adotadas.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x < 3x - 7\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(x+3)^2} = x + 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 - 4} \leqslant x - 1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \dfrac{1}{2} \text{ e } x \leqslant 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x}{|x|} = 1,\ x \neq 0\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < |4 - x|\}$

33. Se $a > 0$ e b é um número qualquer, mostre que $|x - b| < a$ é equivalente a $b - a < x < b + a$ e também equivalente a $x \in]b - a, b + a[$.

34. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

a) $|x^2 + 2x + 1| < 0$ b) $|(x - 2)^2| > 0$

c) $x|x + 1| > 0$ e $x|x + 1| < 0$ d) $\sqrt{3x^2} > 0$

e) $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} > 2$ f) $\sqrt{2|x| - 1} > 0$

g) $3|x| + 1 > 0$ e $3|x| + 1 < 0$ h) $\dfrac{3}{x} < 5$

i) $\dfrac{2}{x - 1} < 4$ j) $\dfrac{x}{(3 - x)^2} < 2$

k) $\dfrac{2}{x} - 3 < \dfrac{4}{x} + 1$ l) $\dfrac{2x - 3}{x + 2} < \dfrac{1}{3}$

m) $\dfrac{x - 3}{x - 1} > x - 4$ n) $\dfrac{x - 2}{x + 3} < \dfrac{x + 1}{x}$

35. Nos itens a seguir, determine para quais valores de x o trinômio é maior que zero, e para quais valores de x é menor que zero. Para isso, fatore o trinômio (ou complete os quadrados) e estude o sinal. Expresse a resposta na notação de intervalo.

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $x^2 + x - 42$ c) $2x^2 - x - 1$

d) $x^2 - 9$ e) $16x^2 - 2x$ f) $x^2 + 3x$

g) $x^2 + x + 1$

Observe como resolvemos a letra g). Faça o mesmo para os próximos itens.

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \qquad \text{(completamos o quadrado)} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Assim, $x^2 + x + 1 > 0$ se, e somente se, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, isto é, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}$. Como $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $x^2+x+1>0$ para $x \in]-\infty,+\infty[$. Por outro lado, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 < -\frac{3}{4}$ não tem solução, já que o membro esquerdo da desigualdade é um número positivo. Logo a solução para $x^2+x+1<0$ é ϕ, o conjunto vazio.

h) x^2+1 i) $-x^2$ j) $-x^2+2x-2$

k) x^2+3x+3 l) $2x^2+x+1$ m) x^2+x-1

36. Resolva as desigualdades, expressando a solução na forma de intervalo, quando possível.

a) $x(x-3)(6-x)<0$

b) $\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+5} \geqslant 0$

c) $|5x|>1$

d) $|3x-4| \geqslant 2$

e) $\dfrac{|x-1|(x^2-2)}{x-1}>0$

f) $|x-3|>x+1$

g) $\dfrac{(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2+2)(x^6+6)}>0$

h) $|x-1|-|x-3| \geqslant \dfrac{|x-1|}{2}$

i) $\dfrac{6-x-x^2}{(x^2+x+1)(x+4)(x-6)^2} \geqslant 0$

j) $\dfrac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x^2+3)(2x+1)} \geqslant 0$

37. Mostre que se $|x-6|<1$ então $|x|<7$.

38. Suponha que $|x-8|<2$ quão grande $|x-5|$ pode ser?

39. Obtenha um número $\delta>0$, tal que se $|x-1|<\delta$ então $|x^2-1|<\dfrac{1}{10}$.

40. Obtenha um número $\delta>0$, tal que se $|x-4|<\delta$ então $|\sqrt{x}-2|<\dfrac{1}{10}$.

41. Os elementos da *série de Fibonacci* são definidos como

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots$$

Com base nisso, faça que se pede:

(a) Pesquise mais (em livros ou na internet) a respeito da série de Fibonacci, do número áureo e de suas propriedades na natureza. Pesquise também se existe alguma fórmula para gerar os elementos desta seqüência.

(b) Explique como esta seqüência é formada.

(c) O quociente de um termo desta seqüência pelo termo seguinte se aproxima de que valor, à medida que aumentamos os termos da seqüência?

42. *Desafio 2.* Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$ (n natural e $a_n \neq 0$) um polinômio com coeficientes inteiros. Seja $r = \dfrac{p}{q}$ um número racional com p e q primos entre si. Se r é raiz de $f(x)$, prove que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

43. Usando o exercício anterior, prove que são irracionais:

    (a) $\sqrt{3}$

    (b) $\sqrt[4]{5}$

    (c) $\sqrt{p}$, com p um número primo.

    (d) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

44. *Desafio 3.* **A Conjectura de Fermat**. Antes de morrer, Pierre Fermat afirmou ter obtido uma prova para a seguinte afirmação (conjectura):

    > Não existem 3 naturais distintos x, y e z tais que $x^n + y^n = z^n$ quando $n \geqslant 3$.

    Observe que o expoente n é um número natural também.

    (a) Verifique que há infinitas soluções para a conjectura de Fermat, quando $n = 1$ ou $n = 2$.

    (b) Já que Andrew Willes provou a conjectura de Fermat, use o que você sabe de matemática para tentar encontrar três naturais distintos x, y e z, tais que $x^2 + y^3 = z^2$.