Funções - Segunda Lista de Exercícios

Recomendações

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de "modelagem matemática". Em ambas as situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados.
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que dêem a você uma idéia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas idéias com os colegas.
- *Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela*

Módulo 1 - Generalidades sobre Funções

1. Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Com a tabela

x	y
a	4
e	3
i	3
o	2
u	1

estabelecemos uma regra entre os elementos de A e B de modo que a cada $x \in A$ colocado na tabela, associa-se o $y \in B$ colocado à sua direita. Verifique se a regra assim estabelecida determina uma função $f : A \to B$.

2. Com os mesmos conjuntos A e B do exercício anterior, quais das tabelas a seguir dão origem a funções $f : A \to B$?

a)

x	y
a	
e	1
i	
o	2
u	

b)

x	y
a	1
e	1
i	1
o	2
u	2

c)

x	y
a	1
e	2
i	3
o	4
u	5

d)

x	y
a	1
e	2
e	3
i	4
u	5
u	1

e)

x	y
a	5
e	5
i	5
o	5
u	5

f)

x	y
a	1
i	2
u	3

g)

x	y
a	3
e	4
i	5
o	5
u	4

h)

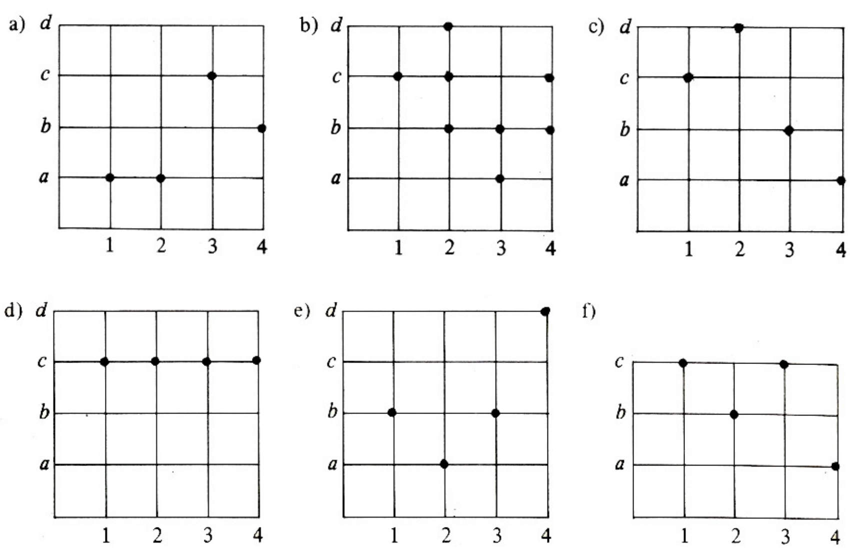
x	y
a	1
e	4
i	2
o	5
u	3

i)

x	y
a	2
e	1
i	2
o	3
u	3

3. Entre as funções determinadas pelas tabelas do exercício anterior, determine quais são injetoras, quais são sobrejetoras e quais são bijetoras.

4. Em cada item a seguir, considere o conjunto G dos pontos assinalados na malha



formado por pontos do produto cartesiano $A \times B$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, exceto em f), onde $B = \{a, b, c\}$. Em cada caso, verifique se G determina uma função.

5. Dentre as funções determinadas pelo conjunto $G \subset A \times B$ do exercício anterior, determinar quais são injetoras, quais são sobrejetoras e quais são bijetoras.

6. Nos exercícios 2 e 4, nos casos em que se tem funções $f : A \to B$, determine $\text{Im}(f)$.

7. Sabe-se que um triângulo está inscrito na semi-circunferência de diâmetro a é retângulo. Se os catetos são x e y, expresse y como função de x. Expresse a

área desse triângulo como função de x.

8. Um retângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a tem lados x e y, sendo que y está sobre o diâmetro a. Expresse y em função de x. Expresse a área do retângulo em função de x.

9. Expresse o lado do quadrado inscrito em um triângulo ABC, em função da base a e da altura h.

10. A tela dos monitores dos computadores mais antigos são compostas de pequenos quadradinhos que se iluminam chamados "pixels". Considere que uma tela retangular tenha 1200 pixels na horizontal e 800 pixels na vertical. Um "bug"inicia sua trajetória na tela a partir da margem esquerda a 80 pixels da base e, ao fim de cada segundo, ela caminha 6 pixels na horizontal para a direita, e 4 na vertical para cima.

    (a) Com base nessas informações complete a tabela:

Instante	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	s	$\cdots$
Horizontal	0	6	12				$\cdots$		$\cdots$
Vertical	80	84					$\cdots$		$\cdots$

    (b) Determinar a posição do "bug"nos instantes 20s, 25s, 50s.

    (c) Determinar em que instante o "bug"sai da tela.

    (d) Determinar a posição em que o "bug"sai da tela.

    (e) Expresse a posição do "bug"em função do tempo s.

11. Considere que no caso do exercício anterior, no mesmo instante em que o "bug"entra pelo lado esquerdo da tela "mug", um outro "bicho informático", inicia seu passeio pela tela pelo lado direito a 100 pixels da base e que ao fim de cada segundo ele se desloque 6 pixels na horizontal para a esquerda e 2 pixels na vertical para cima.

    (a) Faça uma tabela indicando a posição do "mug"a cada segundo;

    (b) Determine a posição do "mug"nos instantes 20 s, 35 s e 50 s.

    (c) Determine o instante em que o "mug"deixa a tela.

    (d) Determine o ponto em que isso ocorre.

    (e) Determine o ponto de cruzamento das trajetórias do "bug"e do "mug".

    (f) Haverá encontro do "bug"com o "mug"?

(g) Encontre uma expressão para a posição do "mug"em função do tempo s.

12. Tico e Teco, torcedores fanáticos de certo time da capital, ganharam de seus tios uns cofrinhos na forma de porquinhos. No de Tico havia R$30,00 e no de Teco R$ 50,00. Os moleques resolveram guardar parte da mesada semanal. Tico prometeu guardar R$ 5,00 por semana e Teco, R$ 3,00.

    (a) Faça uma tabela representando a situação semanal das mesadas de Tico e Teco.

    (b) Determinar as quantias nos cofrinhos em 20 semanas.

    (c) Quando terão quantias iguais?

    (d) Em que semana Tico terá R$ 12,00 a mais que Teco?

    (e) Em que semana Teco terá R$ 12,00 a mais que Tico?

    (f) Em que momento Tico terá o dobro da quantia de Teco?

    (g) Expresse a quantia guardada pelo Tico em função do número n de semanas.

    (h) Expresse a quantia guardada pelo Teco em função do número n de semanas.

13. Calcular $f(a)$ sabendo que:

    a) $a = -1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 2$

    b) $a = 0$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{1 - x^2}$

    c) $a = \dfrac{7}{2}$ e $f(x) = \dfrac{2}{x}$

    d) $a = 1$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 5x + 1}$

14. Se $f(x) = x^3 + 4x - 3$, calcule $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(\sqrt{2})$.

15. Seja $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$, calcule:

    (a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ (b) $\dfrac{1}{g(a)}$ (c) $g(a^2)$ (d) $[g(a)]^2$ (e). $g(\sqrt{a})$ (f) $\sqrt{g(a)}$

16. Calcular $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, fazendo as simplificações possíveis, supondo que $x \neq a$, em cada um dos itens a seguir:

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ c) $f(x) = 4x^4$

17. Se $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ calcular:

$$(a)\ f(-x) \qquad (b)\ f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (c)\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad (d)\ f(f(x))$$

18. Determine o domínio das seguintes funções

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$ b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+2}{x+1}}$ d) $f(x) = 4\sqrt{\dfrac{-8x+12}{x+5}}$

e) $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2}$ f) $f(x) = \sqrt{x-x^3}$

g) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ h) $\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}}$

19. Seja $f : A \to \mathbb{R}_+$. Determine o domínio A para as seguintes funções:

a) $f(x) = 3x+1$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

c) $f(x) = \dfrac{2x-5}{1-x}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

e) $f(x) = |3-x| - 1$ f) $\sqrt{\dfrac{x}{10}}$

20. Seja $f : A \to [0,1]$. Determine o domínio A, quando f é dada por:

a) $f(x) = 3x-1$ b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

c) $f(x) = -x^2 + x + 2$ d) $f(x) = \dfrac{1-x}{3-x}$

21. As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Explique.

22. As funções f e g, cujas regras são dadas respectivamente por

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

podem ser iguais? Explique.

23. As funções f e g, definidas de $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\leqslant x\leqslant 0 \text{ ou } x>1\}$ em $\mathbb{R}$, são dadas pelas regras:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

Elas são iguais? Explique.

24. As funções

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x-1} \end{array}$$

são iguais? Explique.

25. Construir o gráfico e determinar o conjunto imagem das seguintes funções:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -1\leqslant x\leqslant 1 \\ -2 & \text{se} \quad x<-1 \text{ ou } x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{se} \quad x\neq -2 \\ 3 & \text{se} \quad x=-2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se} \quad 0\leqslant x<2 \\ -x^2+9 & \text{se} \quad 2\leqslant x\leqslant 3 \\ -1 & \text{se} \quad x<0 \text{ ou } x>3 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & \text{se} \quad -2\leqslant x\leqslant 0 \\ x^2-2x+1 & \text{se} \quad 0<x\leqslant 2 \\ -1 & \text{se} \quad x<-2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -|x+2| & \text{se} \quad 0\leqslant x\leqslant 2 \\ -x^2-4x & \text{se} \quad -2\leqslant x<0 \\ -4 & \text{se} \quad x<-2 \text{ ou } x>2 \end{cases}$

26. Em cada item a seguir escrevemos abreviadamente $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Verificar se o conjunto dado pode ser o gráfico de uma função $y = f(x)$. Em caso afirmativo, explicitá-la:

a) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y = 1\}$

b) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\}$

c) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$

d) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^3\}$

e) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 4y = -4\}$

f) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$

27. Usando, por exemplo, o WINPLOT[1] obtenha o gráfico das funções a seguir:

(a) $f(x) = ax + b$ para diferentes valores das constantes a e b

(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$

(d) $y = \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = |x|$

28. Esboçar o gráfico das seguintes funções (pode usar o WINPLOT)

$(a)\ f(x) = 4 - x^2$ $\quad(b)\ g(t) = -1$ $\quad(c)\ f(s) = -\dfrac{1}{s}$

$(d)\ f(x) = x(1-x)$ $\quad(e)\ h(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad(f)\ h(z) = |1-z|$

$(g)\ g(x) = |1-x^2|$ $\quad(h)\ f(t) = |t^2 - 2t - 3|$ $\quad(i)\ f(t) = t^2 - 2|t| - 3$

$(j)\ f(t) = |t^2 - 2|t| - 3|$ $\quad(k)\ f(x) = |2x-1|$ $\quad(l)\ f(x) = |1 - |1-x|\,|$

29. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostre que $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{f(a)}{a^2}$

30. Se $f(x) = ax + b$ mostre que vale $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

31. Se $f(x) = x^2$ mostre que $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

[1]Esse *software* para construção de gráficos está disponível gratuitamente em `http://math.exeter.edu/rparris`. Para construções geométricas veja também o *software* livre KSEG em `http://www.mit.edu/ ibaran`.

32. Uma função f com domínio $A \subset \mathbb{R}$ é *par* se $f(-a) = f(a)$ para todo a em A tal que $-a \in A$, e *ímpar* se $f(-a) = -f(a)$. Determine em cada alternativa abaixo se f é par, ímpar, ou nem par nem ímpar.

    (a) $f(x) = 3x^3 - 4x$ (b) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$ (c) $f(x) = 9 - 5x^2$

    (d) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$ (e) $f(x) = -2$ (f) $f(x) = 2x^3 + x^2$

    (g) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ (h) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-4}$

    (j) $f(x) = |x| + 5$ (k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ (l) $f(x)\dfrac{x}{x^2+1}$

33. Dada uma função qualquer f, definida em toda a reta (ou num intervalo $]-a, a[$), mostre que a função $g(x) = f(x) + f(-x)$ é par.

34. Uma função f é dita *aditiva* se o domínio de f é $\mathbb{R}$ e $f(a+b) = f(a) + f(b)$ é verdadeiro para todos os números reais a e b.

    (a) Dê um exemplo de função aditiva.

    (b) Dê um exemplo de função não-aditiva.

    (c) Mostre que se f é uma função aditiva, então $f(0) = 0$.

    (d) Mostre que uma função aditiva deve satisfazer a $f(-x) = -f(x)$.

35. Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ considere as funções $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $q(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que p é par e que q é ímpar.

36. Seja f a função definida pela equação $y = x + \dfrac{1}{x}$.

    (a) Qual o domínio de f?

    (b) Qual a imagem de f?

    (c) Esboçe o gráfico de f.

    (d) Quais dos seguintes pontos pertencem ao gráfico de f: (-1,-2), (2,1), (1,2), (-2,-5/2), (3,7/2)?

Módulo 2 - Funções Injetoras, Sobrejetoras e Inversas

37. Nas funções seguintes classifique em: injetora; sobrejetora; bijetora; não é nem injetora nem sobrejetora.

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=2x-1$

(b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ tal que $g(x)=1-x^2$

(c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ tal que $h(x)=|x-1|$

(d) $m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $m(x)=3x+2$

(e) $p:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ tal que $p(x)=\dfrac{1}{x}$ (onde $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$)

(f) $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $q(x)=x^3$

(g) $r::\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $r(x)=|x|(x-1)$

38. Para cada uma das funções a seguir, obtenha a expressão para a sua inversa.

(a) $f(x)=2x+3$; (b) $f(x)=ax+b;\ \ a\neq 0$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; (e) $f(x)=\sqrt{x-4}$ (f) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(g) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ (h) $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ (i) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

39. Seja $f(x)$ a temperatura (em $^{\text{o}}$C) quando a coluna de mercúrio de um dado termômetro mede x centímetros. Em termos práticos, qual é o significado de $f^{-1}(C)$?

40. Nos itens a seguir, decida se a função f é inversível ou não:

(a) $f(d)$ é o total de litros de combustível consumido por um avião ao final de d minutos de um determinado vôo.

(b) $f(t)$ é o número de clientes presentes nas Lojas Americanas, t minutos após o meio-dia de 29 de março de 2006.

(c) $f(x)$ é o volume, em litros, de x quilogramas de água a 4 $^{\text{o}}$C.

(d) $f(w)$ é o custo, em reais, de se remeter uma carta que pesa w gramas.

(e) $f(n)$ é o número de alunos de uma turma de Cálculo, cujos aniversários caem no n-ésimo dia do ano.

41. Faça uma tabela para os valores de f^{-1}, onde a f é dada abaixo. O domínio de f são os naturais de 1 a 7. Especifique o domínio de f^{-1}.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	3	-7	19	4	178	2	1

42. A função $f(x)=x^3+x+1$ é inversível. Utilizando uma calculadora gráfica, ou um computador, determine o valor aproximado de $f^{-1}(20)$.

43. Utilizando um computador, ou uma calculadora gráfica, trace o gráfico das seguintes funções, e decida se elas são ou não inversíveis.

    a) $f(x)=x^2+3x+2$ b) $f(x)=x^3-5x+10$ c) $f(x)=x^3+5x+10$

44. Seja $f:]-\infty,-1] \to [1,+\infty[$ definida por $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ qual o valor do domínio de f^{-1} com imagem 3?

45. Determine a função inversa de cada uma das funções abaixo.

    (a) $f(x)=8+11x$ (b) $f(x)=2x^3-5$ (c) $f(x)=7-3x^3$

    (d) $f(x)=x$ (e) $f(x)=(x^3+8)^5$ (f) $f(x)=x^{1/3}+2$

46. Seja f a função definida por $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ para $x \geqslant 0$. Mostre que f é a sua própria inversa.

47. Seja $f: A \to [-9,-1[$ dada por $f(x)=\dfrac{3+4x}{3-x}$. Pede-se:

    (a) Determinar A.

    (b) Mostrar que f é injetora.

    (c) Verificar se f é sobrejetora.

48. Seja $f: A \to]1,10]$ dada por $f(x)=\dfrac{4-11x}{4-2x}$. Pede-se:

    (a) Determinar A.

    (b) Mostrar que f é injetora.

    (c) Verificar se f é sobrejetora.

49. Seja $f: A \to]-4,1]$ dada por $f(x)=\dfrac{10+3x}{10-2x}$. Pede-se:

    (a) Determinar A.

    (b) Mostrar que f é injetora.

    (c) Verificar se f é sobrejetora.

50. Suponha que f é inversível e crescente. O que se pode dizer a respeito de sua inversa ser crescente ou decrescente?

51. Se uma função f é inversível e côncava para cima, o que se pode dizer a respeito da concavidade de sua inversa?

52. Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, onde $x \geqslant 1$, obter uma expressão para sua inversa, o domínio dessa inversa e representar f e f^{-1} graficamente.

53. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$, $x \neq 1$, determinar:

    (a) Sua função inversa f^{-1}

    (b) O conjunto $\mathrm{Im}(f)$.

54. Dada a função $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{4 - x^2}$, $x \geqslant 0$, pede-se:

    (a) Mostrar que f é injetora.

    (b) Determinar a função inversa f^{-1}.

    (c) Determinar o conjunto $\mathrm{Im}(f)$.

55. Determinar, se existir, a função inversa de cada uma das funções a seguir:

    (a) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$, onde $x \in \left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

    (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, onde $x \in \left]-\infty, -2\right[$.

    (c) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, onde $x \in [-2, 1]$.

56. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ |x| & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

verificar se ela é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa.

57. A função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ admite inversa?

Módulo 3 - A Família das Funções Lineares

58. Se $f(x) = 4x - 3$ mostre que $f(2x) = 2f(x) + 3$.

59. Se $f(x) = ax$ mostre que $f(x) + f(1-x) = f(1)$ para todo x real. Mostre também que $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ quaisquer que sejam os números reais x_1 e x_2.

60. Encontre a inclinação e a intersecção vertical da reta cuja equação é $2y + 5x - 8 = 0$.

61. Em cada item a seguir encontre a equação da reta que passa pelo par de pontos

    (a) (3,2) e (-2,4) (b) (1,1) e (2,-2)
    (c) (-3,-3) e (4,9) (d) (-1,-3) e (-2,5)
    (e) (0,0) e (3,2) (f) (5,0) e (0,5)
    (g) (-2,-3) e (5,-7) (h) $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$
    (i) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

62. Nos itens de (a) a (d) encontre os valores de x para os quais a inclinação da reta ligando os dois pontos dados:

    (i) é zero (ii) não existe (iii) é positivo (iv) é negativo

    (a) (2,3) e $(x, 5)$ (b) (6,-1) e $(3, x)$
    (c) $(4, x)$ e $(x, 2)$ (d) $(-6, x^2)$ e $(x^2, -2)$

63. Determine se a reta passando pelos dois primeiros pontos é paralela à reta passando pelos dois últimos

    (a) (6,2) e (0,2); (5,1) e (12,10) (b) (-2,-4) e (-4,1); (7,4) e (-3,19)
    (c) (6,-1) e (11,1); (5,-2) e (20,4) (d) (-1,4) e (7,1); (4,2) e (15,-2)

64. Nos itens a seguir encontre a equação da reta que possui inclinação m, e que passa pelo ponto dado.

    (a) $m = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ (b) (-2,5), $m = -\frac{2}{3}$
    (c) $m = 1$, $(-4, -3)$ (d) $m = -1$, $(-3, -3)$
    (e) (0,3), $m = -2$ (f) (3,0), $m = 2$
    (g) (-4,3), $m = 0$ (h) (1,-3), $m = 0$

65. Nos itens a seguir determine a inclinação e as intersecções com os eixos x e y das funções definidas pelos gráficos:

(a) $\{(x, y) \,|\, 3x + 4y - 6 = 0\}$ (b) $\{(x, y) \,|\, x - 2y + 4 = 0\}$
(c) $\{(x, y) \,|\, -4x + 5y + 12 = 0\}$ (d) $\{(x, y) \,|\, 2y + y = 0\}$

66. O gráfico de uma função linear, f, tem coeficiente angular $m = 2$. Se $(-1, 3)$ e $(c, -2)$ pertencem ambos ao gráfico de f, encontre o número c.

67. Nos problemas a seguir, determine o ponto de intersecção das duas retas, se existir, e desenhe os gráficos em cada situação.

(a) $3x + y - 1 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$

(b) $-2x + 3y - 6 = 0$ e $-2x + 3y + 3 = 0$

(c) $-2x + 5y + 30 = 0$ e $5x + 2y - 2 = 0$

(d) $-x + y - 2 = 0$ e $x + y - 2 = 0$

(e) $y - 3x = 0$ e $y - 3x + 1 = 0$

(f) $y + x + 1 = 0$ e $2y + 2x + 1 = 0$

68. (a) Qual a equação da reta que passa pelos pontos $(0, 3)$ e $(5, 0)$.

(b) Mostre que a equação da reta que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(a, 0)$ pode ser escrita na forma (chamada forma *segmentária*):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (a \cdot b \neq 0)$$

69. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(2, 1)$ e que é perpendicular à reta $y = 5x + 3$.

70. Encontre a equação das retas paralela e perpendicular à reta $y + 4x = 7$ e que passa pelo ponto $(1, 5)$.

71. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x - 1}{4}$. Para que valores do domínio a imagem é menor que 4?

72. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{2}$ é negativa?

73. Valores correspondentes a p e q são dados na tabela a seguir:

p	1	2	3	4
q	950	900	850	800

(a) Determine q como uma função linear de p.

(b) Determine q como função linear de p.

74. Uma função linear foi utilizada para gerar os valores da tabela a seguir. Encontre esta função.

x	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
y	27,8	29,2	30,6	32,0	33,4

75. Três operários trabalhando 8 horas por dia, constróem um muro de 30 m em cinco dias. Quantos dias serão necessários para que cinco operários, trabalhando 6 horas por dia, construam um muro de 75 m?

76. Encontre o comprimento do segmento da reta $3x+4y=-12$ que está entre as intersecções horizontal e vertical.

77. O custo de uma plantação é, normalmente, uma função do número de hectares semeado. O custo do equipamento é um *custo fixo*, pois tem que ser pago independentemente do número de hectares plantado. O custo de suprimentos e mão-de-obra varia com o número de hectares plantados e são chamados de *custos variáveis*. Suponha que os custos fixos sejam de R$ 10.000,00 e os custos variáveis de R$ 200,00 por hectare. Seja C o custo total, calculado em milhares de reais, e x o número de hectares plantados.

(a) Encontre uma fórmula para C em função de x.

(b) Esboce o gráfico de C *versus* x.

(c) Explique como você pode visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico.

78. Pimentas picantes foram graduadas de acordo com as unidades de Scoville, em que o nível máximo de tolerância humana é de 14.000 Scovilles por prato. O Restaurante Costa Oeste, conhecido por seus pratos picantes, promete um prato especial do dia, que irá satisfazer ao mais ávido aficcionado por pratos apimentados. O restaurante importa pimentas indianas, graduadas em 1.200 Scovilles cada, e pimentas mexicanas, com uma graduação de 900 Scovilles cada.

(a) Determine a equação de restrição de Scoville, relacionando o número máximo de pimentas indianas e mexicanas que o restaurante deve utilizar na composição do prato especial.

(b) Resolva a equação da parte (a) obtenha, explicitamente, o número de pimentas indianas usadas nos pratos mais picantes em função do número de pimentas mexicanas.

79. Um corpo de massa m está caindo com velocidade v. A segunda Lei de Newton do Movimento $F = ma$, estabelece que a força resultante, F, com sentido para baixo, é proporcional à sua aceleração, a. A força resultante, F, é composta pela Força de gravidade F_g, que age para baixo, menos a força de resistência do ar F_r, que age para cima. A força devida à gravidade é mg, onde g é uma constante. Suponha que a resistência do ar seja proporcional à velocidade do corpo.

(a) Obtenha uma expressão para a força resultante F, em função da velocidade v.

(b) Obtenha uma fórmula, dando a em função de v.

(c) Esboce o gráfico de a *versus* v.

80. Numa fotocopiadora consta a seguinte tabela de preços:

N^o de cópias	preço por cópia
de 1 a 99	0,15
de 100 a 999	0,12
1000 ou mais	0,10

(a) Qual o custo de 99 cópias?

(b) Qual o custo de 101 cópias?

(c) Qual o custo de 999 cópias?

(d) Qual o custo de 1001 cópias?

(e) Esboce um gráfico representado o custo C em função do número n de cópias

(f) Que observações você faz sobre uma regra de preços como a proposta pela tabela acima? Como você corrige a tabela para evitar distorções?

Módulo 4 - Funções Quadráticas

81. Fatore as seguintes expressões quadráticas

(a) x^2-3x e $2x^2+x$

(b) $\pi x^2+3\pi$ e $17x^2+51x$

(c) $\sqrt{2}x^2+2x$ e $\sqrt{\pi}x^2-\pi$

(d) x^2-9 e x^2-49

(e) x^2-3 e x^2-1

(f) x^2-2 e $x^2-\pi$

(g) $x^2+x+\dfrac{1}{4}$ e x^2+x+6

(h) $x^2+x+\dfrac{1}{4}$ e x^2-x-6

(i) x^2-2x+3 e $x^2-3x-40$

(j) $3x^2-5x-2$ e $8x+2x-1$

(k) $2x^2-5bx-3b^2$ e $x^2-4x-21$

(l) x^4-2x^2+1 e x^6-4x^3-21

82. Utilizando uma calculadora gráfica, ou um computador, estude o comportamento do gráfico de $p(x)=ax^2+bx+c$ nas seguintes situações:

(a) Dê valores fixos para b e c (por exemplo, $b=1$ e $c=2$) e varie a. Fazendo isso, o que acontece com o gráfico de $p(x)$?

(b) Dê valores fixos para a e b (por exemplo, $b=3$ e $b=5$) e varie c. Descreva o que acontece com o gráfico de $p(x)$.

(c) Dê valores fixos para a e c (por exemplo, $a=2$ e $c=3$) e varie b. Descreva o que acontece com o gráfico de $p(x)$.

83. Observe como fazemos para completar os quadrados das funções $p(x)=x^2+2x+10$ e $q(x)=x^2-x$.

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2+2x+10 \\ p(x) &= x^2+2x+1-1+10 \\ p(x) &= (x+1)^2+9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2-x \\ p(x) &= x^2-2\left(\tfrac{1}{2}\right)x+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ p(x) &= x^2-x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4} \\ p(x) &= \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Utilize essa idéia para completar os quadrados das funções:

(a) $p(x)=x^2+5x+2$

(b) $p(x)=x^2+3x+1$

(c) $p(t)=-3t^2-5t+1$

(d) $p(t)=t^2-2t$

(e) $p(x)=x^2+3x$

(f) $p(x)=x^2+4x-3$

(g) $p(x)=4x^2+12x+10$

(h) $p(x)=-16x^2+6x$

(i) $p(x)=x^2+4b+c$

(j) $p(x)=ax^2+ax+b$

(k) $p(x)=\pi(x^2-2x)$

(l) $p(x)=24(-x^2-3x+1)$

84. Resolva as seguintes equações completando os quadrados:

(a) $3x^2+6x-1=0$ (b) $3x(3x-2)=6x-5$

(c) $y^2-15y-4=0$ (d) $6u^2+7u-3=0$

(e) $x^2-2x+9=0$ (f) $4z^2-4z-1=0$

(g) $p(2p-4)=5$ (h) $(x-2)^2+3x-5=0$

(i) $(3x-2)^2+(x+1)^2=0$ (j) $5y^2-15y+9=0$

85. Deduza a fórmula para a solução da equação quadrática $ax^2+bx+c=0$.

86. Use a fórmula para a solução da equação quadrática para resolver as seguintes equações:

(a) $5x^2+6x-1=0$ (b) $2x^2=18x+5$

(c) $x(2x-3)=2x-6$ (d) $6x^2-7x+2=0$

(e) $2x^2=13(x-1)+3$ (f) $2x^2-6x-1=0$

(g) $1200y^2=10y+1$ (h) $x^2+2bx-c^2=0$

(i) $x^2-6ax+3a^2=0$ (j) $\pi u^2+(\pi^2-1)u-\pi=0$

(k) $x(x-\sqrt{2}+4)=4(x+1)$ (l) $3x^2=5(x-1)^2$

87. Determine o valor de b em $B=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geqslant b\}$ de modo que a função $f:\mathbb{R}\to B$ definida por $f(x)=x^2-4x+6$ seja sobrejetora.

88. Determine o maior valor de a em $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leqslant a\}$ de modo que a função $f:A\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^2-3x+4$ seja injetora.

89. Dada a função quadrática $p(x)=ax^2+bx+c$, prove que as coordenadas (x_v,y_v) do vértice da parábola são dadas por

$$x_v=-\frac{b}{2a}\qquad\text{e}\qquad y_v=-\frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta=b^2-4ac$ é o *discriminante* de $p(x)=0$.

90. Determinar os vértices e a imagem das parábolas

(a) $y=4x^2-4$ (b) $y=-x^2+3x$

(c) $y=2x^2-5x+2$ (d) $y=-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(e) $y=-x^2+x-\frac{2}{9}$ (f) $y=x^2-\frac{7}{3}x-2$

91. Qual deve ser o valor de c para que o vértice da parábola $y = x^2 - 8x + c$ esteja sobre o eixo dos x?

92. Qual deve ser o valor de k para que $y = 2x^2 - kx + 8$ tenha duas raízes reais e iguais?

93. Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$ determine aqueles cujo produto é máximo.

94. Dentre todos os números de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

95. Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice sobre a reta $y = -4x + 5$.

96. Um arame de comprimento ℓ deve ser cortado em dois pedaços. Um pedaço será usado para formar um círculo, e outro, um quadrado. Onde se deve cortar o arame, para que as áreas das figuras sejam as maiores possíveis?

97. Em uma reação química, um *catalisador* é uma substância que acelera a reação mas que, ela mesma, não sofre transformação. Se o produto de uma reação é um catalisador, a reação é chamada de *autocatalítica*. Suponha que a taxa, r, de uma dada reação autocatalítca é proporcional à quantidade da substância original que ainda permanece vezes a quantidade de produto, p, produzido. Se a quantidade inicial da substância original é A e a quantidade que ainda permanece é $A - p$:

    (a) Exprima r em função de p.

    (b) Qual é o valor de p quando a reação está ocorrendo de forma mais rápida?

98. Para as seguintes funções f, encontre o discriminante de $f(x) = 0$ e determine se as raízes são reais e diferentes, reais e iguais, ou não existem. Esboce o gráfico de $f(x)$ sem desenhar mais de quatro pontos.

(a) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

(b) $f(x) = z^2 + z + 1$

(c) $f(x) = 4x^2 - x - 5$

(d) $f(x) = 7x^2 - 5x - 2$

(e) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \dfrac{1}{4}$

(f) $f(x) = x^2 - ax - 1$

(g) $f(x) = 3x^2 + \pi x + 4$

(h) $f(x) = x^2 - 2ax + a^2$

(i) $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3}$

(j) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

99. Determine os valores de K para os quais as equações tem raízes reais e iguais.

    (a) $5x^2 - 4x - (5 + K) = 0$

    (b) $(K + 2)x^2 + 3x + (K + 3) = 0$

    (c) $x^2 + 3 - K(2x - 2) = 0$

    (d) $(K + 2)x^2 + 5Kx - 2 = 0$

    (e) $x^2 - x(2 + 3K) + 7 = 0$

    (f) $(K - 1)x^2 + 2x + (K + 1) = 0$

100. Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

101. Determinar os valores de m para que a equação do segundo grau $(m+2)x^2 + (3-2m)x + (m-1) = 0$ tenha raizes reais.

102. Determinar os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m+1)x + (m+1)$ tenha um zero real duplo.

103. Determinar os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m-1)x + (m-2) = 0$ não tenha raizes reais.

104. Prove as *relações de Girard* para equações do segundo grau: se $ax^2 + bx + c = 0$ possui raízes x_1 e x_2, então $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

105. Mostre que uma equação do segundo grau que tem x_1 e x_2 como raízes é a equação $x^2 - Sx + P = 0$, onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

106. Obtenha uma equação do segundo grau que possua as raízes:

    (a) 2 e 3

    (b) $\dfrac{1}{2}$ e $-\dfrac{3}{2}$

    (c) $0,4$ e 5

    (d) 1 e $-\sqrt{2}$

    (e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

107. Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ de modo que se tenha $\mathrm{Im}(f) = [2, +\infty[$.

108. Cada uma das expressões a seguir pode ser escrita na forma $\sqrt{a}\sqrt{c^2 \pm (dx+b)^2}$, sendo que c é uma fração. Observe como fazemos isso para $\sqrt{-4x^2+x}$. Chamando $q(x) = -4x^2 + x$ temos:

$$\begin{aligned}
q(x) &= -4(x^2 - \tfrac{x}{4}) \\
q(x) &= -4\left(x^2 - 2\left(\tfrac{1}{8}\right)x + \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{8}\right)^2\right) \\
q(x) &= -4\left((x - \tfrac{1}{8})^2 - \tfrac{1}{64}\right) \\
q(x) &= 4\left(\tfrac{1}{64} - (x - \tfrac{1}{8})^2\right) \text{ já que } -4 = (-1)\cdot 4 \\
\sqrt{q(x)} &= 2\sqrt{\tfrac{1}{64} - (x - \tfrac{1}{8})^2} \\
\sqrt{q(x)} &= 2\sqrt{\tfrac{1 - 64(x - \frac{1}{8})^2}{64}} \\
\sqrt{q(x)} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{1 - 64(x - \tfrac{1}{8})^2} \\
\sqrt{q(x)} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{1 - \left(8(x - \tfrac{1}{8})\right)^2} \\
\sqrt{q(x)} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{1 - (8x - 1)^2}
\end{aligned}$$

Utilize essa idéia nos itens a seguir:

(a) $\sqrt{x^2 + 3x + 1}$

(b) $\sqrt{-3t^2 + 5t + 1}$

(c) $\sqrt{x^2 + 3x}$

(d) $\sqrt{-16x^2 + 6x}$.

(e) $\sqrt{-x^2 + x + 1}$

(f) $\sqrt{-x^2 + 2x - 4}$

(g) $\sqrt{6x - 4x^2}$

(h) $\sqrt{4x - x^2}$

(i) $\sqrt{6 + x - 2x^2}$

(j) $\sqrt{-x^2 - 2x + 8}$

(k) $\sqrt{9x - 4x^2}$

109. Dada a função quadrática $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$, prove que:

(a) Se $b > 0$ o gráfico de $p(x)$ corta o eixo dos y com a parte crescente.

(b) Se $b < 0$ o gráfico de $p(x)$ corta o eixo dos y com a parte decrescente.

110. Considere o Polinômio $f(n) = n^2 + n + 41$. Observe que $f(1) = 43$ é primo, $f(2) = 47$ é primo, $f(3) = 53$ é primo. Será que para todos os números $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ será um número primo? Prove ou "desprove" esta afirmação.

111. Prove que somando-se 1 ao produto de quatro números naturais consecutivos o resultado será sempre um quadrado perfeito.

112. Suponha que a, b e c sejam constantes com $a > 0$. Seja f a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $x \geqslant \dfrac{-b}{2a}$. Mostre que a função inversa é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a}$ para $x \geqslant \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

113. À medida que a altura referente ao nível do mar aumenta, o peso de um astronauta diminui até atingir a imponderabilidade. Se o peso w do astronauta a altura x km acima do nível do é dado pela expressão $w = p\left(\dfrac{6400}{x + 6400}\right)^2$, onde p é o peso do astronauta ao nível do mar, a que altitude seu peso é inferior a $0,1p$?

114. Se a distância de frenagem d (em metros) de um carro a velocidade de c km/h é dada, aproximadamente, por $d = v + \dfrac{v^2}{20}$, para quais velocidades o espaço de frenagem é inferior a 20 m?

115. Para que um medicamento faça o efeito desejado a sua concentração na corrente sanguínia deve ser acima do nível terapêutico mínimo. Se a concentração c desse medicamento t horas após ser ingerido é dada por $c = \dfrac{20t}{t^2 + 4}$ mg/L e o seu nível terapeêutico mínimo é 40 mg/L, determine a partir de que instante esse nível é excedido.

116. Considerando que a resistência elétrica R (em Ohms) para um fio de metal puro está relacionado com a temperatura T (em ºC) pela fórmula $R = R_0(1 + \alpha T)$ onde α, R_0 são constantes positivas. Pede-se:

    (a) Para que temperatura tem-se que $R = R_0$

    (b) Se a resistência é considerada 0 para $T = -273°C$, determine o valor de α

    (c) Se a prata tem resistência 1,25 ohms a $0°C$ a que temperatura sua resistência atinge 2,0 ohms?

117. As dosagens para adultos e para crianças devem ser especificadas nos produtos farmacêuticos. Duas das fórmulas para se especificar as dosagens para crianças a partir das dosagens para adultos são a de Cowling, dada por $y=\frac{1}{24}(t+1)\alpha$ e a de Friend, dada por $y=\frac{2}{25}t\alpha$ onde α representa a dosagem para adulto, em mg, e t representa a idade da criança, em anos.

    (a) Se $\alpha = 100$ mg, represente graficamente as expressões das dosagens infantis usando as fórmulas de Cowling e de Friend.

    (b) Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?

118. O IMC (índice de Massa Corporal) é definido como:

$$\phi = \frac{\text{massa}}{(\text{altura})^2}$$

Uma pessoa é considerada obesa quando o índice é maior que 30. Segundo dados publicados na revista Veja de 12/01/2004, dos obesos brasileiros 13% são mulheres, 7% homens e 15% são crianças. Pelo critério anterior você se considera obeso? A partir de que peso você passaria a ser considerado obeso? A partir de que altura uma pessoa de 100 kg deixa de ser considerada obesa? Uma pessoa de 1,75 m passa a ser considerada obesa a partir de quantos quilos?

119. Expresse o volume C do tronco de um cone reto de altura h e raio base r em termos de h e r.

120. Expresse o volume C de um cilindro reto de altura x inscrito no cone reto de altura h e raio da base r.